

多目的問題としての資本資産評価モデル

古川 浩一, 中里 宗敬

1. 資本市場の理論とOR

こんにち、本論で中心的にとりあげる資本資産評価モデル (Capital Asset Pricing Model, 以下 CAPM と略す) をはじめとして、裁定取引理論 (Arbitrage Pricing Theory, APT), オプション評価理論 (Option Pricing Theory, OPT) など、資本市場における取引や証券の評価をめぐるさまざまな理論が展開され、金融経済学 (Financial Economics) といわれる分野を形成するに至っている。

たしかに、そこで扱われる問題は、市場で行動する典型的な合理的投資家の行動とかれらの行動の結果としての市場の均衡であり、また、それを用いた投資政策であるので、それら諸理論をまとめて呼ぶときに「経済学」が用いられることも故なしとはしない。

しかし最近では、この分野に関して、しばしばインベストメント・テクノロジーと呼ばれたり、理論や応用を含めて金融工学なる名称も散見されるようになっていく。そして実際、この分野に技術者やエンジニアが大きな関心を示すようになってきている。

ここで、経済学と工学のいずれが適切であるかの議論は行なわないが、少なくとも、テクノロジーや工学という言葉が用いられるようになり、エンジニアが深く関わるようになったのは、次のような理由によると考えてよいであろう。

1つに、資本市場における証券の評価には、株価の変動をとりあげなければならないが、そのためには確率過程は避けて通ることができない。この領域は一般に技術者やエンジニアのものともみられており、確率を駆使した理論や方策は技術であり、工学であるとされるに至っている。

2つに、資本市場は証券 (この証券は、投資家にとって資産を意味するので以降「資産」と呼ぶことにする。)

の売買を通して将来に予想されるリターン、つまり「カネ」を取引きする場であるが、カネは、他の財と違ってどこで取引されようとも同質であり、また微小な単位に分割できると想定することができる。

こうした性質をもつ「場」では、状態を一般化したモデルとして表現し、そのモデルを用いた分析、解析を行なうことの意義はきわめて大きい。もともと、資本市場は、技術者やエンジニアがとっつきやすい性質を備えており、かれらがそのことに気づき、多大な関心を示し始めたことが挙げられる。

3つに、現代の資本市場についての分析は、Markowitz が提案したポートフォリオ・セレクションに端を発するが、かれの出発点は、所与の予算制約のもとで最適な複数の株式の組合せ (ポートフォリオ) を選択するという課題であった。こんにちの資本市場の理論は、合理的に最適なポートフォリオを選択する投資家の行動を基礎にし、すべての投資家がそのように行動するときに市場がどのような状態になるかをとりあげている。所与の制約のもとでの最適化が、ORのもっとも基本的な問題の1つであることはいうまでもない。つまり、こんにちのこの分野の課題は、もともとORの問題であったといってもよい。

2. Markowitz のポートフォリオ理論の意義

Markowitz は、制約付きの最適化問題としてポートフォリオの選択を定式化することを試みたが、かれの優れたところは、資産への投資という特質を生かして、リターンとリスクという2つの目標を設定して定式化を行なったことであった。つまり、投資問題を多目的最適化問題として定式化したことである。

およそ投資という場合、将来のある時点あるいはある時点までの期間において、その見返り (リターン) を得ることを期待して、いま資金を投下することを意味している。つまり、いまの資金と将来の確実でない資金とを比較することが基本的な課題である。

ふるかわ こういち, なかさと むねのり

東京工業大学 経営工学科 〒152 目黒区大岡山 2 丁目

もちろん、投資は高いリターンを期待して行なわれるものであるが、あくまでリターンは期待であるから、リターンに伴う不確実性の程度を合わせて評価することが求められる。しかも、資本市場では一般的に、高いリターンは高いリスクを伴う（逆のときは逆になる）ことが知られている。かれは、できれば高いリターンを、またできれば低いリスクをという相反する

目標を同時に達成する最適化を試みたわけである。

Markowitz のアイデアでもう1つ優れているのは、2つないしそれ以上の資産を組み合せるとき、各資産のリターンの変動は、それぞれ無関係に生じているわけではないことを考慮していることである。そして、かれは、各資産のリターンの変動の間の関係こそ、ポートフォリオを組むときのキー・ポイントになることを、そのモデルによって明示した。

Markowitz のポートフォリオ・セレクションを基礎にした資本市場の理論が、基本的に、

- ①最適化問題を基礎にしていること、
- ②この最適化問題が多目的問題であること、
- ③投資対象である各資産のリターンの変動の間に存在する関係が、解を求めるときに重要な役割を果たすことを、以下、CAPMについて明らかにし、合わせて、その限界にも触れることにする。

3. CAPMの概要

CAPMは、合理的な投資家が摩擦のない効率的市場で取引することにより資産の価格が瞬時に調整され、市場が均衡状態になったとき、資産価格の間にはどのような関係があるのかを示している。

そのさい、資産のリターンが不確定の危険資産の場合、投資家が考慮する資産の特性はリターン（投資収益率の期待値を用いる）とリスク（投資収益率の標準偏差を用いる）のみであると仮定される。投資家は複数の危険資産を適当に組み合わせることにより、よりリターンが高く、よりリスクの小さいポートフォリオを捜し求める。

いま、各資産(i)のリターン(\bar{r}_i)とリスク(σ_i)を推定し、それらを σ - \bar{r} 平面上にプロットすると図1のようになるとしよう。

さて、これらの資産を組み合せて作ることのできるポートフォリオは無数に存在するが、それらすべてを集め

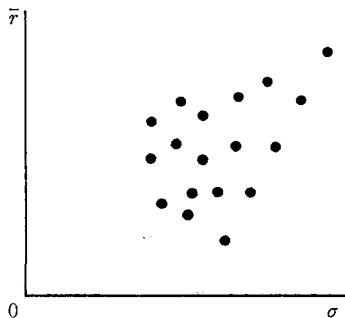


図 1

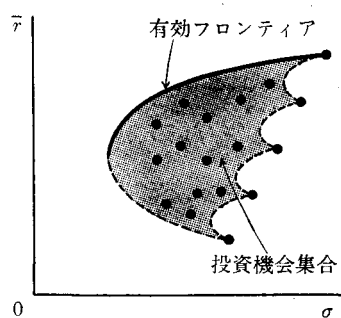


図 2

た集合を投資機会集合と呼ぶ。これが投資家にとって代替案の集合となる。投資機会集合を σ - \bar{r} 平面上に表わすと図2を得る。

投資機会集合の境界がこのように非線形となるのは、資産の投資収益率の間の相関が完全ではないからである。

投資家はこれらの代替案の中から1つのポートフォリオを選択するわけだが、その選択の基準はリターンとリスクに関する2つの目的関数により示される。この目的関数は代替案の集合に対して半順序関係を与えるので、最適解は非劣解(パレート解)として与えられる。このパレート解を有効ポートフォリオ (efficient portfolio) といい、その集合を有効フロンティア (efficient frontier) と呼ぶ(図2参照)。このように、投資家の行動は典型的な多目的最適化問題としてとらえることができる。

ここで、利子率 r_f が確定している安全な資産 f (無危険資産) が存在し、投資家は自由にこの無危険資産に投資し、あるいはこれを借り入れることができると仮定する。いま、危険資産だけからなるポートフォリオに無危険資産を組み入れた混合ポートフォリオを考える。ある危険資産ポートフォリオと無危険資産を組み合わせた混合ポートフォリオは、 σ - \bar{r} 平面上においてそれら2つを結ぶ直線上に示される。

このようにして得られる混合ポートフォリオをすべての危険資産ポートフォリオについて考えると新たな代替案の集合が得られるが、これに対するパレート解集合は無危険資産の利子率 r_f から有効フロンティア上に引かれた接線となる、これを資本市場線 (capital market line: CML) と呼ぶ(図3参照)。

CMLが有効フロンティアと接する点Mはマーケット・ポートフォリオ (market portfolio) と呼ばれる。このマーケット・ポートフォリオは、無危険資産が存在するときすべての投資家が共通に選択する最適危険資産ポー

トフォリオに他ならない。マーケット・ポートフォリオを用いるとCMLは次式により示される。

$$\bar{r}_p = r_f + \frac{\sigma_p}{\sigma_M} (\bar{r}_M - r_f) \quad (1)$$

ただし、

\bar{r}_p : CML上のポートフォリオのリターン

σ_p : CML上のポートフォリオのリスク

\bar{r}_M : マーケット・ポートフォリオのリターン

σ_M : マーケット・ポートフォリオのリスク

r_f : 無危険資産のリターン

である。

CAPMでは、このCMLをもとにして個別資産の評価を行なう。すなわち、個別資産(i)とマーケット・ポートフォリオ(M)の關係に注目し、有効フロンティアがマーケット・ポートフォリオにおいてCMLと接する条件を用いることにより、次式のような証券市場線 (security market line: SML)を得る。

$$\bar{r}_i = r_f + \beta_i (\bar{r}_M - r_f) \quad (2)$$

ここで、 β_i は、

$$\beta_i = \sigma_{iM} / \sigma_M^2$$

ただし、 σ_{iM} : 資産(i)とマーケット・ポートフォリオ(M)の収益率の共分散

である。

SMLは、個別資産のリターンが確定のリターン部分(右辺第1項)とリスクプレミアム部分(第2項)とに分解されることを示している。後者のうちの $(\bar{r}_M - r_f)$ は全ての資産に共通のファクターであるので、 β_i がその資産を特徴づける唯一のパラメータであり、個別資産の実質的なリスクの大きさを示す測度であることがわかる。

さて、資本市場で行動する投資家は、現在における各資産の市場価格をみて、将来に予想されるリターンとリスクを評価し、その資産の購入(投資)や売却を決める。このような投資家の行動が数多く集められた結果として、各資産の市場価格が決まることになる。CAPMは、均衡状態において、資産価格形成のもととなる各資産のリターンを β なるリスク測度と関連づけて示している。したがって、式(2)が与えられるなら、これに対応して各資産の価格も定まることになる。しかも、ここで重要なことは、CAPMでは各資産のリターンが、 β を通して、市場全体の水準(マーケット・ポートフォリオ)に対し相対的に与えられることである。したがって、どの資産

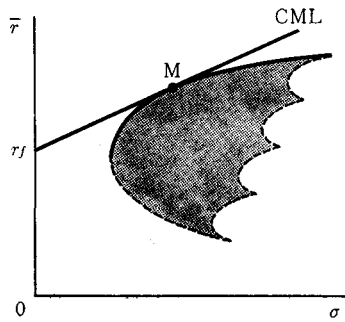


図 3

価格も他の資産の価格に対する相対的な大きさとして与えられることになる。

4. 代替案の集合と評価空間

これまででは、CAPMを σ - \bar{r} 平面上で議論してきた。これは投資家が σ と \bar{r} という2つの評価基準にもとづいて行動するとしている

からである。しかし、もともと投資家は、どの資産にどれだけ投資するかという決定を行なうことにより、かれのポートフォリオを最適化しようとしているはずである。いいかえれば、投資家が最終的に行なう意思決定は、かれのポートフォリオを最適化するような各資産への投資割合、すなわち投資比率ベクトルを決めることである。したがって、CAPMにおいて、投資家の意思決定が σ と \bar{r} についての評価だけで十分であるためには、少なくとも、 σ - \bar{r} 平面上で与えられるマーケット・ポートフォリオは、投資家が求めている投資比率ベクトルを一意に定めるものでなくてはならない。

この点を明らかにするために、投資比率ベクトル(x)の張る空間から σ - \bar{r} 平面への写像について考えてみよう。

いま、市場に n 個の危険資産があるとすると、空売りが無い場合、投資家の代替案の集合は、

$$X = \{x \mid e^T x = 1, \forall_i x_i \geq 0\} \quad (3)$$

ただし、

$$e = (1, 1, \dots, 1)^T$$

という R^n の部分空間となっている。

ここで、

$$\bar{r} = (\bar{r}_1, \bar{r}_2, \dots, \bar{r}_n)^T$$

とすると、 X から投資家の評価空間(σ - \bar{r} 平面)への写像は、次の2つの式で与えられる。

$$r = \bar{r}^T x \quad (4)$$

$$\sigma^2 = x^T V x \quad (5)$$

ただし、

V : 投資収益率の分散共分散行列

である。

ところで、 σ - \bar{r} 平面上でのCAPMの議論が意味をもつためには、少なくともマーケット・ポートフォリオについて、この逆写像が存在しなくてはならない。そこで、 $n=3$ の場合についてこの写像を図解してみよう。

まず、式(3)より、代替案の集合 X は R^n 空間における

超平面上の凸閉集合であることがわかる(図4参照)。

次に、 X から \bar{r} への写像は式(4)で与えられており、 X は x_1 を除いた R^{n-1} 上でも表現することができるので、図4に対応づけて図示すると図5になる。また、 X から σ への写像は式(5)で与えられており、同様に x_2 を除いて考えると図6になる。最後に、図5と図6を合成すると図7が得られ、代替案の集合から評価空間への写像を描くことができる。

さらに、図7の図形を σ - \bar{r} 平面へ正射影すると、CAPMで用いる投資機会集合を得ることができる(図8参照)。

さて、図7において有効フロンティアは左側の膨らみの稜線上の一部に相当する。また、この稜線上では \bar{r} を定めると、それに対応する投資比率ベクトルは一意に定まることがわかる。マーケット・ポートフォリオは有効フロンティア上の1点であるので、これに対応する投資比率ベクトルも一意に定まる。したがって、 σ - \bar{r} 平面上のマーケット・ポートフォリオから X への写像が存在する。

このように、 σ - \bar{r} 平面上で求められたマーケット・ポートフォリオからその投資比率ベクトルを導くことができるので、投資家は危険資産に対する最適な投資意思を

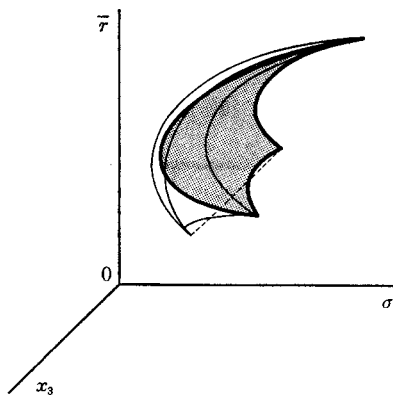


図 8

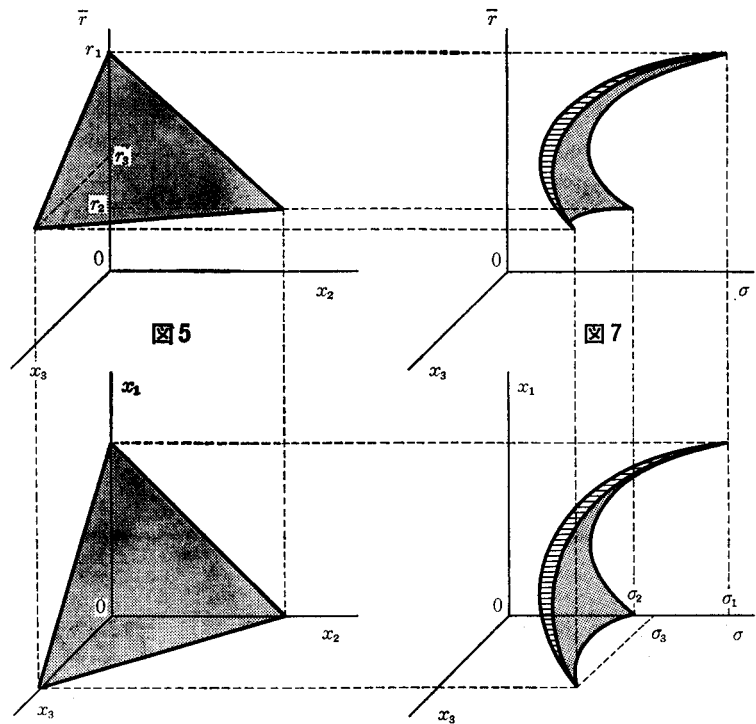


図 4

図 6

決定し、行動することができる。

5. ま と め

本論ではまず、こんにち注目を集めている資本市場の理論がもともとORと深く関わっていることを述べ、次に、資本市場の理論でも最も基本的なものの1つであるCAPMを例に、投資家の投資意思決定が多目的最適化問題として記述されることを示した。

すなわち、CAPMは、投資比率ベクトルからリスク・リターンという2次元の評価空間への写像をもとに議論しており、典型的な多目的最適化問題をなしているということである。しかも、CAPMの均衡状態は、無危険資産の導入により最適解が一意に定まるような特殊な系をなしている。

資本市場の理論は、市場の理論として経済学と密接に関連している。しかし、同時に、それは解が一意に定まる特殊な多目的最適化問題であることに注意しなくてはならない。

参 考 文 献

[1] W. F. Sharpe, "A Simplified Model for

- Portfolio Analysis," *Management Science*,
Vol.9, No.2 (January 1963), pp.277-293.
- [2] H. Markowitz, *Portfolio Selection*, John
Wiley & Sons, 1959.
- [3] W. F. Sharpe, *INVESTMENT*, 3rd,
Prentice-Hall, 1985.

- [4] 桐谷維, ポートフォリオ・セレクション —金融
資産選択の理論—, 春秋社, 1968.
- [5] 榊原茂樹, 現代財務理論, 千倉書房, 1986.
- [6] 清水清孝, 多目的と競争の理論, 共立出版株式会
社, 1982.

Cプログラミング入門

中津山幹男著 A5・224頁 定価 1680円

やさしい例題・演習問題を数多く解くことにより基本的なCプログラミング技術を習得できるよう配慮されたテキスト。C言語に慣れるための簡単なプログラムからビットごとの演算など高度なプログラムまで詳説。

アセンブリプログラミング入門

大駒誠一著 A5・224頁 定価 2200円

BASIC, FORTRAN などのある程度理解している人を対象に, 機械語の命令を一つ一つ着実に組み立てていくアセンブリプログラミングを通し, 電子計算機の内部動作を理解させるためのテキスト。パソコン使用可。

ブレイマイコン・シリーズ1 BASIC (改訂版)

刀根 薫著 B5・224頁 定価 1980円

PC-9801用に文法を統一し, より見やすくプログラムの階層化を行なうなど, 利用しやすいよう改訂。また, フロッピーディスクを活用したプログラムを新たに加えてアップツードータ化をはかっている。

ブレイマイコン・シリーズ9 TURBO Pascal

岡本安晴著 B5・176頁 定価 2400円

データ処理用の統計解析プログラムを, 初心者でもすぐに書けるよう配慮された入門書。基本的な文法や操作法の説明とそれに基づく統計計算プログラム例を示し, より複雑な機能の解説とそのプログラム例を示す。

〒102 東京都千代田区九段南 4-3-12

培風館

TEL (03)262-5256 振替東京 4-44725