企業体の効率性分析手法
——DEA入門——（1）

刀根　薫

はじめに

企業体の効率性に関する論議はどちらかといえば相対的な観点からなされることが多い.「あそこの支店はどこそこの支店よりうまくやっている」といった類の評価である．そして多基準的でもある．単に利益を上げるばかりが目的ではなく，売上高，品揃え，社会的責任，公害などの多くの出力を持つ．また入力の方も人件費，宣伝費，売り場面積など多様である．こういった多種類の入力に対してその企業体がどれだけの出力を産出しているかが問われることになる．比率尺度（ratio scale）が用いられるゆえんである.一方，公共企業体の活動ともなれば，入力，出力ともに多くの法的制約が存在し，また予算制約がつく．逆に，効率性の問題は2次的になりがちである．しかしこの分野でも最近，効率性は重要なテーマとなってきた．

これから述べるＤＥＡ（Data Envelopment Analysis）はそのような多入力，多出力系のシステムの相対的な効率判定を目的とし，テキサス大学のチャーンズ教授とクーパー教授が中心となって開発しつつある手法である．この方法によれば，企業体の相対的なD効率性が判明し，効率的なフロンティアに達していない企業体のどこを改善すればそこに達するようになるかの示唆が得られる．

また，さまざまな非効率性が「システム」に起因するものか「マネジメント」に起因するものであるかについてもこの手法を用いて検討することができるし，さらに,「最も効率的なスケール」に関する具体的な議論も展開することが可能である．以下，この手法について次の順に説明する．

1. D効率とは
2. 分数計画から線形計画へ
3. D効率分析の前提条件と効率的フロンティア
4. 説明的例題
5. 生産関数に関する想定とＤＥＡの変更
6. 規模の効率性に関する考察
7. テクニカルな効率性と規模の効率性
8. マネジメントの効率性とシステムの効率性
9. 事例研究

1.　D効率とは

まず工学的問題の効率性について述べ，次にその展開として，多入力，多出力のシステムの効率性について述べる．

1.1　効率の良し悪し

D効率(DEA efficiency）と呼ぶ基準は，次のような工学的な効率表現のごく自然なアナロジーである．

［例1］ボイラーの熱効率

とね　かおる　埼玉大学大学院政策科学研究科
〒338 浦和市下大久保255

あるボイラーは1単位の燃料入力（$x_r=1$ とする）に対して y_r の出力を産むとする．理想的なボイラーは……それが存在すると仮定して……1単位の入力（$x_R=1$ とする）に対して y_R の出力を産むものとする．このとき当該ボイラーの熱効率は，

$$E_r=y_r/y_R \tag{1.1}$$

として表現することができる．一般に

$$0 \leqq E_r \leqq 1 \tag{1.2}$$

であり，1に近いほど効率はよい．

この問題は次のように，多少無理やりに，分数計画に定式化される．

目的関数 $\max_{u,v} h_r=uy_r/vx_r$ (1.3)

制約

$$uy_r/vx_r \leqq 1 \tag{1.4}$$

$$uy_R/vx_R \leqq 1 \tag{1.5}$$

$$u \geqq 0,\ v \geqq 0 \tag{1.6}$$

この分数計画の最適解は(5)の制約がきくので，

$$u^*/v^*=x_R/y_R \tag{1.7}$$

を満たし，そのとき目的関数は

$$h_r^*=x_R\, y_r/x_r\, y_R$$

となるが，$x_r=x_R=1$ であるから

$$h_r^*=y_r/y_R \tag{1.8}$$

となって上記の熱効率 E_r と一致する．

［例2］預金の効率性

入力 x_j（預金額）に対して，出力 y_j（利子）を産出する預金が $j=1, \ldots\ldots, n$ まで n 種類あるとする．仮に入力の大きさにかかわらず利子率 y_j/x_j が各種預金ごとに一定であると仮定すれば，最も効率的な預金種は，$\max(y_j/x_j)$ $(j=1, \ldots\ldots, n)$ を与えるものになるが，これも，多少無理やりに，次の分数計画に定式化できる．

各 $j_0(=1, \ldots., n)$ につき次の分数計画を解く．

目的関数 $\max_{u,v} h_{j0}=uy_{j0}/vx_{j0}$ (1.9)

制約 $uy_j/vx_j \leqq 1\ (j=1, \ldots\ldots, n)$ (1.10)

$$u \geqq 0,\ v \geqq 0 \tag{1.11}$$

ある j_0 の最適目的関数値が $h_{j0}=1$ ならば，j_0 は効率的な預金であり，$h_{j0}<1$ ならば非効率的であることは言うまでもない．h_{j0} が1に近いほど効率的である．

この例の場合，前のボイラーのように絶対的な効率的フロンティアは不明であるので，評価は相対的にならざるを得ない．

1.2 多入力，多出力のD効率

チャーンズとクーパーは，分析の対象となる企業体を一般に DMU(Decision Making Unit)と呼んでいる．本稿では，それを DMUまたは活動と呼ぶことにする．分析の対象は同種の入力と同種の出力を持つものとする．たとえば，チェーン店，スーパー，(一般的な)支店，学校，発電所，病院等々である．これらはそれぞれのカテゴリごとに似たような機能を持って活動している．ただしある程度の独立した経営上の権限は持っているものとする．各DMUは複数個の入力と出力を持つ．各 DMU j ごとに

入力 (x_{ij}) $(i=1, \ldots, m)$ （m種類の入力）

出力 (y_{rj}) $(r=1, \ldots, s)$ （s種類の出力）

とし，データとして与えられているものとする．

入力として何を採用し，出力として何を採用するかは大きな問題であるが，その点はちょっと脇において話を進めるとして，一般に入出力値とも非負であり，入力値は小さいほど，出力値は大きいほどよいものとする．

これらのデータをもとに各DMU $j_0(=1, \ldots, n)$ ごとに次の分数計画 〈FP〉 を考える．

〈FP〉

目的関数 $\max_{u,v} h_{j0}=\sum_{r=1}^{s} u_r\, y_{rj0}/\sum_{i=1}^{m} v_i\, x_{ij0}$ (1.12)

制約 $\sum_{r=1}^{s} u_r\, y_{rj}/\sum_{i=1}^{m} v_i\, x_{ij} \leqq 1\ (j=1, \ldots, n)$ (1.13)

$$u_r>0\ (r=1, \ldots, s) \tag{1.14}$$

$$v_i>0\ (i=1, \ldots, m) \tag{1.15}$$

この分数計画の意味は次のとおりである．入力（一般に複数）と出力（一般に複数）にそれぞれウエイト$\{v_i\}$，$\{u_r\}$をかけて和をとり（加重和），

両者の比を作る．その値がすべてのDMUについて1以下という条件下で，当該のDMU j_0の比を最大にするようにウエイト$\{v_i\}$，$\{u_r\}$の値を決める．

この分数計画の最適解を(u^*, v^*)とし，最適目的関数値をh_{j0}^*とする．このとき，一般に

$$0<h_{j0}^*\leqq 1 \tag{1.16}$$

である．D効率性を次のように定義する．

［定義1］

$h_{j0}^*=1$であるDMUをD効率的と呼び，$h_{j0}^*<1$であるDMUをD非効率的という．

2. 分数計画法から線形計画法へ

〈FP〉は次のように〈LPO〉に変形できる．以下，$\sum$記号の下にrがついている場合は$r=1$からsまで，iがついている場合は$i=1$からmまで，jがついている場合は$j=1$からnまでの和とする．また，添字の意味が明らかな場合には$\sum$記号だけで用いることもある．

〈LPO〉

目的関数 $\max z_{j0}=\sum_r u_r y_{rj0}$ (2.1)

制約 $\sum_i v_i x_{ij0}=1$ (2.2)

$\sum_r u_r y_{rj}-\sum_i v_i x_{ij}\leqq 0\ (j=1,\ldots,n)$ (2.3)

$u_r>0\ (r=1,\ldots,s)$ (2.4)

$v_i>0\ (i=1,\ldots,m)$ (2.5)

〈LPO〉の最適解を(u^*, v^*)とすれば，それは〈FP〉の最適解と定数倍を除いて一致する．したがって，〈LPO〉の最適目的関数値$z_{j0}^*=1$ならば，活動j_0はD効率的である．

2.1 D効率的フロンティア

DMU j_0に関する〈LPO〉の最適解を(u^*, v^*)とする．その値は一般にj_0に依存して決まるので，j_0という添え字をつけて区別したほうがよいが，若干わずらわしいので，単に(u^*, v^*)と書くことにする．

いま，(u^*, v^*)に関するD効率的フロンティアを次の（添え字の）集合$E(j_0)$として定義する．

［定義2］D効率的フロンティア

$$E(j_0)=\{j:\sum_r u_r^* y_{rj}-\sum_i v_i^* x_{ij}=0,\ j=1,\ldots,n\} \tag{2.6}$$

各j_0につき$E(j_0)$が空でないことは自明である．j_0自身が$E(j_0)$にはいっている場合にはj_0はD効率的であるが，そうでない場合には，

$$z_{j0}^*<1 \tag{2.7}$$

であり，

$$\sum_r u_r^* y_{rj0}<\sum_i v_i^* x_{ij0}=1 \tag{2.8}$$

である．

そこで，y_{rj0}の一部または全部を増加させて左辺を1にすることができれば，活動j_0をD効率化することができる．u_r^*の値はそのときy_{rj0}の一単位の変化に対する効率性への感度を意味している．感度係数として利用することもできる．もし装置工業の場合のようにある出力が他の出力の値と連動して動くような場合には，そのことを考慮して出力を一様に変化させることも考えられる．

2.2 入力を目的関数とするLP化

〈FP〉を次のようにLP化することもできる．

〈LPI〉 目的関数 $\min_{u,v} w_{j0}=\sum_i v_i x_{ij0}$ (2.9)

制約 $\sum_r u_r y_{rj0}=1$ (2.10)

$\sum_r u_r y_{jr}-\sum_i v_i x_{ij}\leqq 0(j=1,\ldots,n)$ (2.11)

$u_r>0\ (r=1,\ldots,s)$ (2.12)

$v_i>0\ (i=1,\ldots,m)$ (2.13)

この〈LPI〉の最適解を(u, v)とし，最適目的関数値をw_{j0}とすれば，

$$z_{j0}^*=1/w_{j0} \tag{2.14}$$

という関係が成立する．

また，$(u/w_{j0}, v/w_{j0})$は，〈LPO〉の最適解である．逆に，〈LPO〉の最適解(u^*, v^*)から〈LPI〉の最適解$(u^*/z_{j0}^*, v^*/z_{j0}^*)$を作ることもできるので，どちらを解いても同じことである．したがって，(u, v)をもとに定義するD効率的フロンティアは(u^*, v^*)のそれと同一である．

（i） $w_{j0}=1$ならば，j_0はD効率的

（ii） $w_{j0}>1$ならば，j_0はD非効率的

であるが，後者の場合，

$$1=\sum u_r y_{rj_0}<\sum v_i x_{ij_0} \qquad (2.15)$$

であるから，入力 x_{ij_0} のどれかまたは全部をある量だけ減少させて，右辺を1にできればDMU j_0 はD効率的に転化する．これが入力の制御による効率化であり，出力の場合と同じように v_i の値は感度として利用することができる．

2.3 LPの解の利用法

すでに前項でも述べたように，<LPO>や<LPI>の最適解をもとに入力，出力をそれぞれ別々に変化させてD効率化を試みることもできるが，一般には入力，出力は連動して変化する傾向がある．そのような場合でも，上の関係を利用することができる．要は，

$$\sum u_r^* y_{rj_0}-\sum v_i^* x_{ij_0}=0 \qquad (2.16)$$

が j_0 について成立するように $\{y_{rj_0}\}$ と $\{x_{ij_0}\}$ を連動させればよい．そのとき，

$$\sum v_i^* x_{ij_0}=1$$

という制約は一般に崩れるが，それは本質的に問題とならない．元の問題<FP>の目的関数は，入，出力の比として定義されているからである．

2.4 LPを解くに当っての注意事項

普通のLPでは変数は非負条件を満たすことが前提となっているが，<FP>,<LPO>,<LPI>では，

$$u_r>0,\ v_i>0 \qquad (2.17)$$

という正値条件をしている．このことは，どの入力もどの出力も評価点を持たせたいという強い意志を表明していることに当たるが，これを単に非負条件として問題を解くとD効率性の判定で明らかな見誤りが発生することがあることにもよる．

LPを具体的に解くには，この条件は

$$u_r\geqq \varepsilon\,(r=1,\dots,s) \qquad (2.18)$$

$$v_i\geqq \varepsilon\,(i=1,\dots,m) \qquad (2.19)$$

という制約にした上で，$\varepsilon=10^{-4}-10^{-8}$ 程度に設定するとよい．

2.5 D効率分析と従来の方法の関係

これまで述べてきたことからもわかるように，DEAは結果的に，複数個の入力と出力にそれぞれウエイトを掛けて和を作り，出力／入力という比率で効率性を見ようとするものである．そのウエイトの値を従来は人間の勘や経験に頼って決めていたものを，データ自身に決めさせる点に特徴がある．しかもそのウエイトを対象とする意思決定者ごとに可変とし，ある意味でその対象にとって最も好ましいウエイトづけをした上で，効率性の判定をする．その結果DEAで非効率的と判定されたDMUは他のどんなウエイトづけによっても非効率的であると結論できる．その対象にとって効率的フロンティアの存在とそれからの乖離も明らかにする．このフロンティアへの移行により，より少ない入力でより多くの出力が得られるよう導かれるのである．

しかしながらこの考え方には，入力と出力の対 (x, y)……これを一般に活動と呼ぶことにする……の可能な集合に対して，いくつかの仮定が設定されたことを意味する．その点を次節で明らかにし，さらに分析を進める．

次号予告

特集　分枝限定法

分枝限定法と分割配送問題……鈴木　久敏（東京工大）
マルチプロセッサ・スケジューリング問題に対する分枝限定法の適用……笠原　博徳（早稲田大）
非線形最適化に対する分枝限定法の適用……正道寺　勉（日本工業大）
系統復旧問題の分枝限定法による解法と復旧操作に関する知識のOR的分析と評価……駒井研二，坂口敏明（三菱電機）
製品出荷計画エキスパートシステムと分枝限定法……福村　聡，他（川崎製鉄）
人工知能における推論と分枝限定法……赤間　清（北海道大）

連載講座

企業体の効率性分析手法—DEA入門（2）……刀根　薫（埼玉大）

1