オプションとポートフォリオ・インシュアランス ――安全性を考えた新しい投資方法――

浦谷　規

1.　はじめに

近年の円高は，わが国を世界一の金持にしてしまっている．日本の地価総額は，総面積がおよそ30倍もある米国とほぼ等しいとされるし，東京株式市場の時価総額は，ニューヨーク市場を今年抜いて400兆円という世界一の規模にした．また，わが国の対外純資産は，スイス，西独，サウジアラビアを急速に越し，世界一の金持国になったとされる．経済学とは，貨幣価格すなわち「価格とは何か」に答える学問であるが，最近の情報化社会には従来の考え方では対応しきれなってきているのではないだろうか．

1986年末の世界全体の債券と株式の総額は，おおむね12兆ドルとされる．この厖大な額を人間の手で借手と貸手について記録することは不可能であり，すべてコンピュータ上にあるものといえる．世界中の金融機関のコンピュータがネットワークで結ばれて，瞬時にしてお金は世界をかけめぐっているといえよう．身近な例でも，すでに私たちの給与は銀行振込みで，ほとんどの買物の支払いはカード等で自動引落し可能となっており，日銀券は不用なくらいにまでなっている．つまり，お金はコンピュータ上にあるといっても過言ではないだろう．

うらたに　ただし　静岡県立大学　経営情報学部
〒422 静岡市谷田395

さて，コンピュータ上にあるお金，すなわち金融機関の資産は，箪笥預金と異なり効率的利用される．高収益でかつ安全な投資へ最適化がなされる．計算機上にデータがあり，最適化が必要とあれば，これはオペレーションズ・リサーチの人々が最も得意とする研究分野であろう．そこで，以下に投資の安全性を確保するための一手段であるオプションとポートフォリオ・インシュアランスを紹介する．

2.　ポートフォリオ・インシュアランス

わが国の世帯当り平均預金額は600万円をこえ，ほとんどの人が有利に殖やしたいと考えているであろう．また，年金や保険を扱う，いわゆる機関投資家も安全を第一にして効率的運用を計画している．常識的にも理論的にも高収益の投資は，リスクすなわち損をする確率が高く，低収益の投資は安全である．ポートフォリオ・インシュアランスとは，高収益のリスクの大きい投資に何とかして保険のような機能を持たせようとする手法である．ポートフォリオとは，株と預金というように投資対象の組合せを呼ぶもので，以下に，ポートフォリオ・インシュアランスの例として株と預金の組合せにより保険的機能を付加する手法を示そう．投資には通常の保険のような災難の相互扶助は成り立たない．なぜなら，人は強欲にも高リスク高収益に競って投資してしまうからである．

最も単純な場合として，株と預金のポートフォ

リオを以下のように考えてみよう．株の価格は一定期間に$u\,(>1)$倍に増加するか$d\,(<1)$倍に減少するかのどちらかであり，同一期間中に預金は金利収入がはいり$r\,(>1)$倍に必ずなるとする．ただし$u>r>d$とする．今，株の価格をSとし，Δ株購入し，預金をBするとしよう．このときの総資産をCで表わすと

$$C=S\Delta+B \tag{1}$$

である．1期後には上昇した時の総資産C_uは

$$C_u=u\,(S\Delta)+rB \tag{2}$$

であり，下落したときの総資産C_dは

$$C_d=d\,(S\Delta)+rB \tag{3}$$

である．さて，C_u, C_dを既知として，購入する株数と預金額を求めると

$$\begin{pmatrix}\Delta\\ B\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}(C_u-C_d)/(u-d)S\\ (uC_d-dC_u)/(u-d)r\end{pmatrix} \tag{4}$$

となり，現在の総資産Cは

$$C=\frac{1}{r}\left[\left(\frac{r-d}{u-d}\right)C_u+\left(\frac{u-r}{u-d}\right)C_d\right] \tag{5}$$

である．$(r-d)/(u-d)=p$ とおくと，$(u-r)/(u-d)=1-p$となり，総資産Cは，1期後の総資産C_uとC_dの期待値$pC_u+(1-p)C_d$を割引率rで現在価値にしたものになる．上下変動が毎期独立であるとし，n期後の総資産をC_k(上昇がk回あり下落が$(n-k)$回ある，$R=0,1,\cdots n$)とすると，(5)式は一般的に

$$C=\frac{1}{r^n}\left[\sum_{k=0}^{n}\frac{n!}{k!(n-k)!}p^k(1-p)^{n-k}C_k\right] \tag{6}$$

と表わされる．

$C_k(k=0,1,\cdots n)$を書き直すと，$d^nS, ud^{n-1}S, \cdots u^kd^{n-k}S, \cdots, u^{n-1}dS, u^nS$で$(n+1)$通りの$n$期先の予想株価となる．さて，$n$期間の資金配分すなわち$\Delta$と$B$を変化させて，総投資額を$n$期後に一定額$K$以上にしてみよう．そこで，$u^kd^{n-k}S\geq K$となる$C_k$は$\log(K/Sd^n)/(\log u-\log d)$よりも大きい最小の整数$k^*$のときである．上昇回数が$(k^*-1)$回以下のときには，目標額$K$を達成できないから$C_k=K(k<k^*)$とする．上昇回数が$k^*$以上のとき$C_k=u^kd^{n-k}S$のままとすると，(6)式は，

$$C'=\frac{1}{r^n}\left[\sum_{k=k^*}^{n}\frac{n!}{k!(n-k)!}p^k(1-p)^{n-k}u^kd^{n-k}S+\sum_{k=0}^{k^*-1}\frac{n!}{k!(n-k)!}p^k(1-p)^{n-k}K\right] \tag{7}$$

となり，2項分布関数をF_Bとすると，(7)式は

$$C'=SF_B(k^*;n,\frac{u}{r}p)+Kr^{-n}(1-F_B(k^*;n,p)) \tag{7'}$$

となる．

以上の構成をふまえて，数値例で3期間のポートフォリオ・インシュアランスを考えてみよう．現在の株価を$S=80$とし，$K=80$として3期先にたとえ株価が下落しても80は必ずもどってくるように株と預金を組み合せたポートフォリオを作ってみる．株価の上昇率および下落率を等しく1期間当り50%とし，預金金利を10%とすると，$u=1.5$，$d=0.5$，$r=1.1$である．したがって(5)式より株価の値上りの確率$p=0.6$，値下りの確率$1-p=0.4$となる．3期先までの株価予想は**図1－(a)**の通りであり，3期後に80を割らないように終端値を270, 90, 80, 80とする．**図1－(b)**は，3期の終端値から(5)式を用いて逆算したポートフォリオの価値である．**図1－(c)**は(4)式を用いて，各期のポートフォリオを株の価値と預金額に分けて表わした図である．したがって現時点で，株の価値57.5を買い，預金として36.7保有すれば，株価の上下率および金利が予想通りである場合には，3期にこれらを売却したときに，80を割らない額を受け取ることが可能となる．ただし，そのためには**図1－(d)**のように，保有株数と預金額を株価変動に合せて変化させねばならない．

たとえば，話を大きくして，現在1株が8千円の株を百万株投資するとしよう．すると80は80億円という単位で考えられる．したがって，現在94.2億円投資すれば，幸運にも3期間とも上昇すれば，270億円にもなりうるし，不運にも3期とも下落しても80億円は確保しうる．ところで，幸運な場合の保有株数を考えると，現在は71.9万株，1期に

株価が上昇した時には，84.8万株に増加させる．この時に必要な資金は，(84.8−71.9)万株を1株12千円で購入するので，15.6億円必要となる．一方現在の預金36.7億円は1期後には10%の金利がついて，40.4億円になる．その差額24.8億円を預金として残せる．2期にまた株価が上昇した場合には，(100−84.8)万株を1株18千円で購入するので，27.3億円必要となる．預金の24.8億円は元利合計が27.3億円になっており，ちょうど株投資額を賄える．図1−(d) のように，株価が上昇した時には，株保有数を増加させ，下落した時には減少させ預金を増加させると，金利が最低保証額80億円を維持することになる．この結果，94.2億円の投資で単純平均130億円あり，収益率は38%となる．一方94.2億円を全額株式投資した場合，単純平均は111億円で収益率は25%である．それにもまして最終受取額が**図2**に示すように80億を割らない保証がポートフォリオ・インシュアランスと呼ばれる由縁なのである．さらに，全額を預金にした場合の受取額125億円より，ポートフォリオ・インシュアランスは見かけ上は平均値では有利となっている．しかし，単純平均ではなく確率を使った正確な平均値では，全額株式もポートフォリオ・インシュアランスも，預金と同じく125億円となる．相違点は，図2の中の収益分布のどの形を投資家が選好するかにある．

保険会社，年金資金の運用などは，ある一定額の収益があがらないと，支払い不能となるためにポートフォリオ・インシュアランスか預金を選好するだろう．しかも，株価の変動が大きい現在のような時には，ポートフォリオ・インシュアランスで確実でかつ運がよければ大きな収益をあげることによって他社との競争に勝つ戦略を取ろうとするであろう．ポートフォリオ・インシュアランスは，株の投機性と預金の堅実性を合成したものになっているからである．

さて，現実にポートフォリオ・インシュアラン

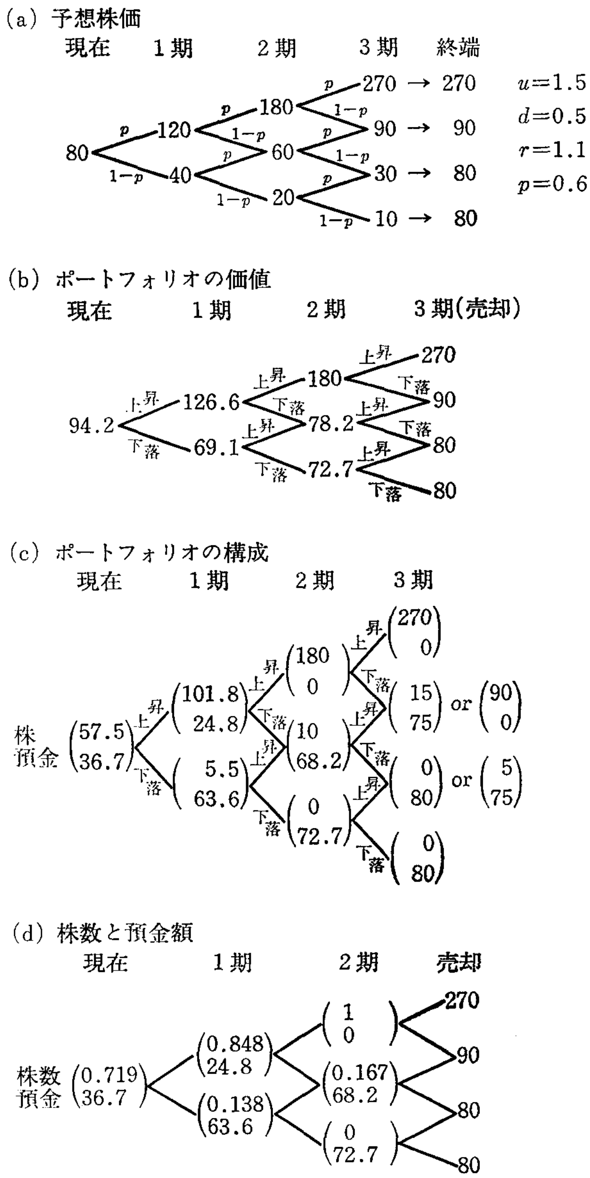

図 1 予想株価とポートフォリオ・インシュアランス

スの考えを適用しようとすると，株価の上昇倍率 $\boldsymbol{u}$ および下落倍率 $\boldsymbol{d}$ (これらをVolatilityと呼ぶ) の予想および預金金利 r の決定をしなければならない．多額の預金には，コールレートとか現先レート等の金利で，預金金利(r)は一応決定できる．しかし，株価の変動率(Volatility)の予想には，次節のオプションの考えが必要となる．

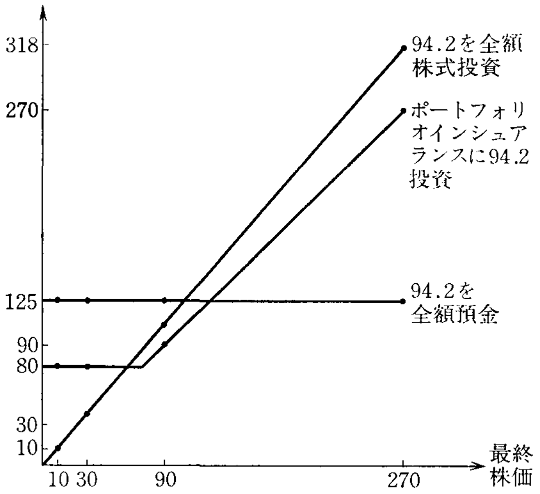

図 2　株価と最終受取額

3. オプション

ポートフォリオ・インシュアランスは株の投機性と預金の堅実性を組み合せたものであった．ところで，例で考えた94.2投資して，最悪でも80もどる仕組みを，最終の受取から80を引いて，最悪の場合まったく返済されないとしたとき初期投資はいくらにすべきか考えてみよう．3期後の80は，初期には60.1の現在価値があるから，94.2−60.1＝34.1の投資をすればよい．このとき，運よく3期に株価が，80以上であれば，190か10の収入を手にすることになる．これは(7′)式から$\frac{K}{r^n}$を引くと，

$$C_0=SF_B(k^*;,n\frac{u}{r}p)-Kr^{-n}F_B(k^*;n,p) \quad (8)$$

と表わせる．(8)式が2項分布によるオプション価格式と呼ばれるものである．

さて，オプション(Call Option)とは，ある期間後に，価格が一定額以上になった時，価格と一定額との差を受けとる権利であり，その権利はオプション価格で買うことができる．オプションの買手は，比較的小額で，運がよければ多額を受けとりうる．一方オプションの売手は，売った時点でオプション価格を受けとり，値下りした時にも損失を緩和できるが，値上りのときは大きくもうけることはない．

表 1　オプション (Call) の売手と買手の収入

	初期投資	3期の収入			
株　　式	80	10	30	90	270
オプション買手	341	0	0	10	190
オプション売手	80	55.4	75.4	125.4	125.4

たとえば，オプションを売るとその価格の34.1受けとるが，これは3期後には，45.4になり，株価が30のときは，オプションの買手は株を売らないけれど自分で売却したとしても合計75.4，株価が10のときは，合計55.4と損失は緩和される．一方株価が80以上のときは，125.4(＝45.4+80)に甘んじなければならない．株のように変動が大きい資産を保存している時には，そのオプションを売ってリスクを回避し堅実な投資にすることが可能となる．

したがって現在のようにドルが不安定なとき，ドルのオプションは為替差損を回避する有効な手段であるといえる．一見すると，オプションの買手はギャンブラーのようにみえるが，投資額34.1×1.1^3とその期待値45.4は等しい．また当然オプションの売手もその期待値は106.5で80×1.1^3と等しい．つまり，オプション取引は，金利収入を株価の変動にしたがって，売手と買手が分けるだけで，その分配は期待値上は公平なものであり，いわゆるギャンブルとは性格が異なる．

さて(8)式のオプション価格式における変動の時間間隔を少なくした極限状態を考えてみよう．終端を時刻tとすると，オプションの満期はtとなる．満期時に様式を行使価格Kで売却するかどうかの選択が行なえるものとする．時刻tまでにn回変動があるとすると，1期間は$\frac{t}{n}$である．1期間の金利による倍率$\hat{r}=r^{\frac{t}{n}}$とし，株上昇倍率$u=e^{\sigma\sqrt{\frac{t}{n}}}$，下落倍率$d=e^{-\sigma\sqrt{\frac{t}{n}}}$とする．$\sigma$は株価の標準偏差である．確率過程の教科書通り，$n$を無限大にすると，(8)式の連続的な場合のオプション価格が(9)式の通り求められる．

$$C_0=SN(x)-Kr^{-t}N(x-\sigma\sqrt{t}) \quad (9)$$

ただし，

$$x=\left[\log(S/K)+(r+\frac{1}{2}\sigma^2)t\right]/(\sigma\sqrt{t})$$

$N(\cdot)$は標準正規分布関数

(9)式が Black-Scholes [1] のオプション価格式として1973年に確率微分方程式から導出され，米国におけるオプションの理論的研究の基礎となった．理論的には，スプリンケル債で日本にもなじみのある C. Sprenkle や Samuelson, Baumol 等が価格式を1960年代から提案していたが，不必要なパラメータがあり完全ではなかった．米国では，オプション取引の拡大により一般的になったためか，確率過程の Karlin の教科書[2]の演習問題に採用されるほどにもなっている．なお，確率微分方程式は，(10)式のとおりである．

$$\frac{1}{2}\sigma^2 S^2\frac{\partial^2 C}{\partial S^2}+(\log r)S\frac{\partial C}{\partial S}-\frac{\partial C}{\partial t}-(\log r)C=0 \tag{10}$$

(10) 式を解くのは少々面倒であるが，(8) 式を連続にするため，すでに見たとおりの変換をした後，テーラー展開をすると(10)式は導びかれる．

わが国では，オプションという言葉は英語の選択権とは異なる意味で人々に強く知られている上に，未だ取引が開始されていないためか抵抗がある．しかし外国為替等の海外との取引では，わが国の金融機関はすでに大幅に導入しており，私たちの知らないうちに私たちのお金はオプションに使われている．米国では，旧約聖書の創生期にあるヤコブがラバンの娘ラケルを嫁にもらう話の時代からあったものとしている．しかし実際には，1973年にシカゴオプション取引所(Chicago Board Options Exchange) が開設され，株，貴金属，金融先物，外国為替などのオプション取引がいちじるしく拡大した近年十数年間に人々に受け入れられたといえよう．特に80年代には，ニューヨーク市場では株式と同量のオプションが取引されるまで展開されてきている．

オプションには，コール・オプション (Call option) とプット・オプションとがある．ここまでは，コール・オプションについて解説してきたが，プット・オプションについては今までの議論の正負を逆にするだけで十分である．すなわちコールでは，株価が行使価格＋コール価格以上のときに，オプションの買手はその売手から株を購入することで利益を得るのに対して，プットでは株価が行使価格＋プット価格以下のときに，オプション買手がその売手の株を市場に買却して利益を得る．

したがって，同一の満期と行使価格Kをもつ株に対して次のプットコール・パリティ式が成り立つ．

$$C_0=P+S-Kr^{-t} \tag{11}$$

(11) 式は，現在コールを売りC_0を得，さらにKr^{-t}だけ借金をして，プットと株をそれぞれP, Sで買ったときに，株価がK以上になった時もK未満のときも，満期には同一の結果になることを示している．この様子をまとめると**表 2** の通りとなる．

表 2 プット・コール・パリティ

	現　在	満期時	
		$S^*<K$	$K\leq S^*$
コール売却	C_0	0	$K-S^*$
プット購入	$-P$	$K-S^*$	0
株　購入	$-S$	S^*	S^*
借　金	Kr^{-t}	$-K$	$-K$
合　計	0	0	0

S^*: 満期時の株価

4. オプションの社会的機能

オプションに限らず，現在進行中の金融革新，いわゆる財テクは，社会的に生産性を向上するものではなく，単なるギャンブルにすぎないとする考え方がある．すでに述べたとおりオプション取引でも，売手と買手はゼロ・サムの関係にあり，生産性を増加させてはいない．しかしながら，両者の期待値は投資額に等しい公平な取引である上，取引相手が互いに望ましいとされるリスクを

分け合うことができる便利な仕組みになっている点が投機とはいちじるしく異なる．

第2に，ポートフォリオ・インシュアランスで説明したとおり，株と預金をダイナミックに売買し続ければ，オプションは不必要であるよう見える．ところが現実には株の売買には取引費用が，特に小額の場合には多くかかり，資金の運用効率は著しく低下してしまう．オプションには一度の売買で同じ保険的機能を付加しうるメリットがある．

第3に，ポートフォリオ・インシュアランスは，上昇と下落が一定とされ，離散的に売買決定がされるために，予測値と異なる現実値になった時には，保険的機能を果すことが困難になる．この時でも，コール・オプションと預金のポートフォリオか，またはプット・オプションと株のポートフォリオで保険的機能は可能となる．これは(10)式を変形しても確認されるし，3節で述べたことを逆に，すなわちオプションに預金と組み合せることにより，可能となることは明らかである．

以上をまとめると，個人や企業の資産選択に便利な道具としてオプションは役立つものである．冒頭に述べたとおり，情報化社会におけるお金とは，単にコンピュータ上にある情報といえるだろう．したがって，このお金の情報的機能は，現代雑に変動する生産・消費関係に柔軟にかつ機動的の複に対応し，人々の実生活に支障をきたさないように働かなければならない．オプションやその他の金融革新として出現した金融新商品は，近年いちじるしく発展した情報処理・通信技術が，従来人間の処理ではおいつかなかった資金の効率的利用を可能にしたところに発生したものである．言いかえれば，生産活動ではすでにORやQCによって合理的自動生産として達成されてきたことと同じことが，金融取引きに急速に広がりつつある過渡期を金融革新と呼んでいるといえよう．

5. おわりに

ここで紹介したオプションは，OR屋にとっては非常に単純な確率過程の応用問題であっただろう．確率過程応用の他のオプション・モデルとしては，(1)変動率が株価に依存するもの，(2)株価のジャンプを取り入れたもの，(3)株価の変動に上下だけでなく同じ価格に留まる状態を加えた3項分布モデル等が研究されている．しかし，何よりもOR屋にとって研究したいことは，目的の収益とリスクを設定した上での最適投資戦略であろう．市場変動の統計的傾向に合わせて，機動的に各オプション価格モデルを使いながら，最適ポートフォリオを作っていくことにある．

現在はコンピュータネットワークの発展によって種々のデータベースから，株価情報は容易に引き出せる上，オプションの簡単なプログラムは，Bookstaber [3] 等に BASIC プログラムが紹介されているので，わが国の株と預金のポートフォリオ・インシュアランスやオプションについて誰でも実験ができるであろう．また理論的研究はCox[4]や大村[5]で，既存の研究成果のサーベイも可能である．今後，OR屋の特技である数学的モデルによる解析と，その計算機利用が，オプションのみならず金融という情報処理の一分野に活用されるべきだと考える．コンピュータ上にある情報は，OR屋が創りだすアルゴリズムによってはじめて役に立つものになるといっても過言ではないだろう．

参 考 文 献

[1] Black, F., and Scholes, M. "The Pricing of Options and Corporate Liabilies" J. of Political Economy, 81, 1973

[2] Karlin, S "A Second Course in Stochastic Process" Academic Press. 1981

[3] Bookstaber, R. "The Complete Investment Book," Scott, Foresman and Company, 1984, Illinois

[4] Cox, J. and Rubinstein, M. "Options Markets," Prentice-Hall, 1985

[5] 大村敬一，清水正俊「株式オプション」金融財政事情研究会，1987