事例研究

選挙区事例からみた議員定数配分方法の比較分析

大山　達雄

わが国の衆議院議員定数を是正する公職選挙法改正案は，昨年5月末に衆院，参院を通過し成立した．この法案はいわゆる8増7減案と呼ばれているものであるが，それによると，最高裁で違憲とされた衆議院議員選挙の“1票の重みの格差”の是正のための“暫定的な措置”として

(1) 8選挙区で定数を各々1人増やし，7選挙区で各1人を減らし，総定数を現在511から512とする

(2) 3選挙区で新たに隣接地域を編入するなど，選挙区の境界変更を行なう

を実施し，抜本的な改正は昭和60年国勢調査の確定人口の公表を待って速やかに検討するということであった．しかしながら議員定数をどのようにして定めるかという問題は，政治的，社会的な要因を含む複雑な問題であって，容易に解決できるものではないことは諸外国におけるその歴史的経緯を見ても明らかである．

各選挙区の有権者数とそれらの選挙区に対する総議員定数が与えられたとき，それぞれの選挙区に議員定数をどのように割り当てれば良いかを求めるのが**選挙区議員定数問題**である．この問題はそれ自身1つの数理的な問題であるが，それを完全に解決することができるならば，議員定数問題ばかりでなく，より広範な実際問題にも応用することが可能となる．

本稿では，これまでに提起され，実際に各国で採用されたことのあるいくつかの議員定数配分方法にわが国の実際の有権者数データを当てはめてみた数値結果を紹介し，数値例の詳細な分析とともに，各々の議員定数配分方法の特性，特徴について比較，検討を加えることにする．

1. はじめに

わが国の衆議院議員選挙区は全国で130区，議員定数は511名(昨年5月末より512名)であった．昭和59年9月の有権者数調査(自治省)によると，130選挙区の中で議員1人当りの有権者数の最も多い千葉4区と最も少ない兵庫5区では約4.51倍の格差がある．このことがいわゆる“1票の格差”の問題として，近年裁判所でもたびたびとりあげられている．昭和58年11月の最高裁判決では，昭和55年総選挙時の最大格差3.94倍が“違憲状態”，あるいは昭和59年9月の広島高裁判決では昭和58年総選挙時の最大格差4.40倍が“違憲”と判定されたのがそれらの具体例である．

兵庫5区の議員1人当りの有権者数を1としたとき，それが2以上になる選挙区は全国で48区あり，また，3以上になる選挙区は全国で18区もある．このような格差は，人口が地方ではあまり増えないのに対して，大都市近郊地域では大都市への集中化傾向ともあいまって増えつつあることから，年々増加する傾向にある．このような状況の

おおやま　たつお　埼玉大学　大学院政策科学研究科
〒338 浦和市下大久保255
(昭和62年2月25日受理)

表 2.1 東京都の選挙区別有権者数と議員定数（昭和58年12月現在）

選挙区	有権者数	現議員定数
1	456747	3
2	781973	5
3	794489	4
4	840600	5
5	625680	3
6	589395	4
7	1081159	4
8	353728	3
9	639963	3
10	1091399	5
11	1223564	4
計	8478697	43

表 2.2 東京都選挙区別の理想議員定数（議員1名当りの有権者数を20万人とした場合）

選挙区	理想議員定数
1	2.284
2	3.910
3	3.972
4	4.203
5	3.128
6	2.947
7	5.406
8	1.768
9	3.200
10	5.457
11	6.118

表 2.3 最適議員定数と理想議員定数

選挙区	最適議員定数	理想議員定数
1	2	2.284
2	4	3.910
3	4	3.972
4	4	4.203
5	3	3.128
6	3	2.947
7	6	5.406
8	2	1.768
9	3	3.200
10	6	5.457
11	6	6.118

下で，各選挙区の議員定数をどのように設定すれば議員1人当り有権者数に関して格差が少なくなるかを考慮する選挙区議員定数問題は，政治，法律，社会などにも関連する各種の要因を内部に含んだ非常に複雑な，そしてまた解決困難な問題である．

以下，2章では選挙区議員定数問題に対してまず考えられる動的計画法による解法例を紹介する．3，4章では剰余数，除数，比率系配分方法のわが国の有権者数データへの適用例とそれぞれの議員定数配分方法の特性，特徴を述べる．最後に5章ではゲーム理論の応用による，投票力指数の概念を用いた議員定数配分問題へのアプローチの数値例を紹介する．

2. 動的計画法による解法

選挙区議員定数問題を1つの数理計画問題として定式化することによって，動的計画法を適用することができる．わが国の衆議院選挙区の全国130区を対象とするのは計算が膨大となるので，ここでは東京都の11選挙区を対象とした例を中心に考えることにする．現在の東京都の選挙区議員定数および有権者数は**表2.1**のとおりである．

議員1人当りの有権者数が選挙区によって不変，つまり一定である場合（こういうことは実際には有り得ないことであるが）を理想的な状態としよう．いま東京都の総議員定数を43名とすると，総有権者数が847万8,697人（昭和58年12月現在）であることから，有権者ほぼ20万人が議員1名に対応することになる．そこで東京都の議員1名当りの有権者数を20万人とした場合の各選挙区の“理想議員定数”を求めると**表2.2**が得られる．この理想議員定数にできるだけ近いような各選挙区議員定数を公平かつ公正なものとして，それを動的計画法を用いて求めてみよう．

一般に総選挙区数をN，総議員定数をK（上の東京都の例ではそれぞれ$N=11$，$K=43$）とし，それぞれの選挙区$i\in S=\{1,2,\cdots,N\}$の理想議員定数をt_iと表わす．理想議員定数にできるだけ近いという基準を，各選挙区の議員定数と理想議員定数との差の絶対値（偏差）の和を最小にすると考えることにする．この時，最適性の原理にもとづいた動的計画法による定式化は次のように表わすことができる．

$$f_n(x_n)=\min_{0\leqq d_n\leqq x_n}\{|d_n-t_n|+f_{n-1}(x_{n-1})\},\quad n=1,2,\cdots,N \tag{2.1}$$

$$d_n=x_n-x_{n-1},\quad n=1,2,\cdots,N \tag{2.2}$$

$$x_0=0,\quad x_N=K,\quad f_0(0)=0. \tag{2.3}$$

上の定式化において，x_nは選挙区1から選挙区nまでの議員定数の総和を表わす．したがってd_n

は選挙区 n の議員定数を表わし，$|d_n-t_n|$ は選挙区 n の偏差，$f_{n-1}(x_{n-1})$ は選挙区1から選挙区 $n-1$ までの偏差の和の最小値に相当する．以上から(2.1)において $n=N$，つまり $f_N(x_N)$（東京都の例では $f_{11}(43)$）がわれわれの求める偏差の和の最小値になる．

東京都議員定数問題を上の定式化にもとづいて解くと，**表2.3**のような最適解が得られる．表2.1と表2.3を比較すると，選挙区1，2，4，6，8からそれぞれ1名ずつ現議員定数を削減し，それらを選挙区10に1，選挙区7と11にそれぞれ2名ずつ追加するのがより“公平”な東京都の選挙区議員定数であるということになる．

さて上の例では，すべての選挙区における議員定数と理想議員定数との偏差の総和を最小にするような最適議員定数配分を求めた．いまこの評価基準を各選挙区における議員定数と理想議員定数との偏差の最大値を最小にすることにしてみよう．この場合の動的計画法による定式化は次のように与えられる．

$$f_n(x_n)=\min_{0\leq d_n\leq x_n}\max\{|d_n-t_n|,f_{n-1}(x_{n-1})\},\quad n=1,2,\cdots,N \tag{2.4}$$

$$d_n=x_n-x_{n-1},\ n=1,2,\cdots,N \tag{2.5}$$

$$x_0=0,\ x_N=K,\ f_0(0)=0. \tag{2.6}$$

したがってこの場合の計算のプロセスも(2.1)-(2.3)の場合とほぼ同様であって，ただ最小化操作の評価基準の関数形が(2.1)と(2.4)のように異なるのみである．なお(2.4)-(2.6)によって得られる最適議員定数 $\{d_i\}$ も表2.3の結果と同様である．

3. 剰余数および除数にもとづく議員定数配分方法の適用

この章と次章では，筆者が［1］の中で紹介したいくつかの議員定数配分方法を中心に，実際の東京都の11選挙区の例を対象とした最適議員定数配分結果を紹介する．なお議員定数配分問題については，Lucas［2］，Balinski and Young［3］に全般的な解説，また Balinski and Young［4, 5, 6, 7, 8］に個別的な議員定数配分方法の解説があるので参照されたい．

表 3.1 最大剰余数法と修正最大剰余数法による東京都議員定数の配分

選挙区 i	理想配分 q_i	初期配分 $\lfloor q_i \rfloor$	最大剰余数法		修正最大剰余数法	
			追加配分	議員定数	追加配分	議員定数
1	2.3164	2	0	2	1	3
2	3.9658	3	1	4	1	4
3	4.0293	4	0	4	0	4
4	4.2631	4	0	4	0	4
5	3.1732	3	0	3	0	3
6	2.9891	2	1	3	1	3
7	5.4831	5	1	6	0	5
8	1.7939	1	1	2	1	2
9	3.2456	3	0	3	0	3
10	5.5351	5	1	6	1	6
11	6.2053	6	0	6	0	6
計	42.9999	38	5	43	5	43

3.1 最大剰余数法

最大剰余数法では，まずすべての選挙区 $i\in S=\{1,2,\cdots,N\}$ にそれぞれ議員定数 $\lfloor q_i \rfloor$ 人（q_i を越えない最大整数）を与える．総議員定数が K であることから，あと $K-\sum\lfloor q_i \rfloor$ $(=K')$ 人（$\sum$ は $\sum_{i\in S}$ を表わす）だけの追加配分をする必要がある．そこで $q_i-\lfloor q_i \rfloor$, $i\in S$ を大きい順に並べ，上位から $K-\sum\lfloor q_i \rfloor$ カ所の選挙区に1人ずつ議員定数を追加する．このようにして**表3.1**のような結果が得られる．

最大剰余数法を修正した配分方法がある．それは最大剰余数法の場合と同じ初期配分をもとにして，$q_i-\lfloor q_i \rfloor$ ではなく，$(q_i-\lfloor q_i \rfloor)/p_i$ の大きさの順に同様の追加配分を行なうという方法である．評価基準 $(q_i-\lfloor q_i \rfloor)/p_i$ において $0\leq q_i-\lfloor q_i \rfloor<1$ であることから，修正最大剰余数法は通常の最大剰余数法と比べて有権者数 p_i のより少ない選挙区に有利であるといえる．この修正最大剰余数法にもとづいた議員定数は表3.1に示してあるが，最大剰余数法による配分解に対して，有権者数の少ない選挙区1で1名増加し，より多い選挙区6

で1名減少させるという，異なった議員定数の配分が与えられているのがわかる．

ここで表3.1に得られた議員定数配分の結果が前章の表2.3とまったく同じであることに注目されたいが，実は以下に述べるように，最大剰余数法は次のような最適化問題の最適解を与えることがわかる．

$$\mathrm{P1}: \underset{\{d_i\}}{\mathrm{Min}}\sum|d_i-q_i| \quad \text{sub. to} \quad \sum d_i=K \tag{3.1}$$

$$\mathrm{P2}: \underset{\{d_i\}}{\mathrm{Min}}\ \underset{i\in S}{\mathrm{Max}}|d_i-q_i| \quad \text{sub. to} \quad \sum d_i=K \tag{3.2}$$

問題P1については，最大剰余数法による選挙区 i への最初の議員定数配分が $\lfloor q_i\rfloor$ であることから，

$$d_i=\lfloor q_i\rfloor+s_i, \quad s_i\in\{0,1\}, i\in S \tag{3.3}$$

とおくと，P1を次のように表わすことができる．

$$\underset{\{s_i\}}{\mathrm{Min}}\sum|s_i-(q_i-\lfloor q_i\rfloor)| \tag{3.4}$$

$$\text{sub. to} \quad \sum s_i=K', \quad s_i\in\{0,1\}, i\in S.$$

したがって，$(q_i-\lfloor q_i\rfloor), i\in S$, の大きさに関して，最大のものから順に $i_1, i_2, \cdots, i_{k'}$ とすると，(3.4)の $s_i, i\in S$ については最適解 $\{s_i\}$ が次のように与えられることがただちにわかる．

$$s_i=1 \quad i=i_1, i_2, \cdots, i_{k'} \text{ の時}$$
$$=0 \quad \text{その他の時}. \tag{3.5}$$

このようにして問題P1の最適解は最大剰余数法による配分解となる．(3.2) の問題P2についても同様にして最大剰余数法が最適解を与えることを示すことができる．

ここで注意しておきたいことは，問題P1あるいはP2において，理想議員定数 q_i が有権者1人当りの議員定数が一定，つまり $q_i=p_iK/P$ として与えられる場合には，これらの問題の最適解はいずれも上述の最大剰余数法によって与えられるということである．たとえば，$\sum\lfloor q_i\rfloor>K$ あるいは $\sum\lfloor q_i\rfloor+N<K$ などのような，より一般的な場合には，この配分方法はそのままでは適用不可能となり，前章に述べた動的計画法によるアプローチなどを用いる必要が生ずる．その意味では，動的計画法の概念を用いた議員定数配分方法は，理想議員定数がどのように定義された場合（たとえば本稿第5章に述べるようなゲーム理論的アプローチにもとづいて得られた場合などを含む）にも適用可能な，より一般的な議員定数配分方法であるということができる．

3.2 最大除数法と過半小数法

最大除数法，過半小数法では，議員1人当りの有権者数に相当するパラメータ λ を用いて，各選挙区に対して“保証”される議員定数の総和が K 以上になるような λ の最大値をそれぞれの方式にもとづいて求め，それらのパラメータの値を用いて各選挙区に議員定数を配分する．最大除数法，過半小数法のパラメータをそれぞれ $\lambda_{GD}, \lambda_{MF}$ とおくと，これらの満たすべき不等式は以下のように与えられる．

$$\sum\lfloor p_i/\lambda_{GD}\rfloor\geqq K \tag{3.6}$$

$$\sum\lfloor p_i/\lambda_{MF}+0.5\rfloor\geqq K. \tag{3.7}$$

$K=43$の場合の東京都の例では，不等式(3.6), (3.7) を満たすような $\lambda_{GD}, \lambda_{MF}$ の最大値はそれぞれ $\lambda_{GD}^{\max}=176864$, $\lambda_{MF}^{\max}=2162318/11(=196574.36)$ となる．また $\lambda_{GD}^{\max}, \lambda_{MF}^{\max}$ に対して $S_{GD}=\{i\,|\,p_i/\lambda_{GD}^{\max}$: 整数$\}$. $S_{MF}=\{i\,|\,p_i/\lambda_{MF}^{\max}+0.5$: 整数$\}$ を満足する添字集合はそれぞれ $S_{GD}=\{8\}$，あるいは $S_{MF}=$

表 3.2 最大除数法と過半小数法による東京都議員定数の配分

選挙区 i	最大除数法		過半小数法	
	$d_i=p_i/\lambda_{GD}^{\max}$	$\lfloor d_i\rfloor$	$d_i=p_i/\lambda_{MF}^{\max}+0.5$	$\lfloor d_i\rfloor$
1	2.582	2	2.824	2
2	4.421	4	4.478	4
3	4.492	4	4.542	4
4	4.753	4	4.776	4
5	3.538	3	3.683	3
6	3.332	3	3.498	3
7	6.113	6	6.000	6
8	2.000	2	2.299	2
9	3.618	3	3.756	3
10	6.171	6	6.052	6
11	6.918	6	6.724	6

表 3.3 割当法にもとづく東京都議員定数の配分（表中の＋は前議員定数に対する定数増を表わす）

選挙区＼総定数	42	43	44	45	46
1	2	2	2	2	2
2	4	4	4	4	4
3	4	4	4	4	4
4	4	4	4	+5	5
5	3	3	3	3	3
6	3	3	3	3	3
7	6	6	6	6	6
8	1	+2	2	2	2
9	3	3	3	3	+4
10	6	6	6	6	6
11	6	6	+7	7	7

{7} のように与えられる．したがっていずれの場合も $|S_{GD}|=|S_{MF}|=1$ となるので，選挙区 i の議員定数配分数はそれぞれ $\lfloor p_i/\lambda_{GD}^{\max}\rfloor$，あるいは $\lfloor p_i/\lambda_{MF}^{\max}+0.5\rfloor$ によって与えられることになる．最大除数法，過半小数法にもとづいて東京都議員定数配分を計算すると，**表 3.2** のような結果が得られる．

3.3 割当法

割当法は Balinski and Young [4] によって1974年に提起された議員定数配分方法である．この方法は最大除数法と同じ配分基準にもとづき，下側，上側の割当分特性を満たしながら順次議員定数をいずれかの選挙区に 1 つずつ追加配分していく方法である．

いま総議員定数が k の時の選挙区 i の議員配分数を d_i^k とすると，割当法の手順は以下のように表わすことができる．

(1) $d_i^k=0, k=1,\cdots,K, i\in S. k=0.$

(2) $d_i^k<(k+1)p_i/P$ であってかつ $d_j^k<(k+1)p_j/P$ なるすべての $j\in S$ に対して $p_i/(d_i^k+1)\geq p_j/(d_j^k+1)$ ならば，

$$d_i^k=d_i^k+1$$

$$d_j^k=d_j^k \qquad j\in S, j\neq i$$

とする．

(3) $k<K$ ならば $k=k+1$ として(2)に戻る．

$k=K$ ならば終了．

上のアルゴリズムにもとづいて東京都議員定数の例を計算すると**表 3.3** のような議員定数配分解が得られる．総議員定数43名の場合の割当法による配分解が最大除数法，過半小数法による配分解と一致しているのがわかる．

表 3.4 最大剰余数法，最大除数法，最小除数法，過半小数法にもとづく東京都議員定数の配分（表中の＋は前議員定数に対する定数増，－は定数減を表わす）

選挙区＼総定数	最大剰余数法 42	43	44	45	46	最大除数法 42	43	44	45	46
1	2	2	+3	−2	+3	2	2	2	2	3
2	4	4	4	4	4	4	4	4	4	4
3	4	4	4	4	4	4	4	4	4	4
4	4	4	4	+5	5	4	4	4	+5	5
5	3	3	3	3	3	3	3	3	3	3
6	3	3	3	3	3	3	3	3	3	3
7	5	+6	6	6	6	6	6	6	6	6
8	2	2	2	2	2	1	+2	2	2	2
9	3	3	3	3	3	3	3	3	3	+4
10	6	6	6	6	6	6	6	6	6	6
11	6	6	6	+7	7	6	6	+7	7	7

選挙区＼総定数	最小除数法 42	43	44	45	46	過半小数法 42	43	44	45	46
1	3	3	3	3	3	2	2	2	2	2
2	4	4	4	4	4	4	4	4	4	4
3	4	4	4	4	4	4	4	4	4	4
4	4	4	4	4	+5	4	4	4	+5	5
5	3	3	3	3	3	3	3	3	3	3
6	3	3	3	3	3	3	3	3	3	3
7	5	5	+6	6	6	5	+6	6	6	6
8	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2
9	3	3	3	+4	4	3	3	3	3	+4
10	5	+6	6	6	6	6	6	6	6	6
11	6	6	6	6	6	6	6	+7	7	7

3.4 剰余数および除数系配分方法の特性と特徴

最大剰余数法，最大除数法，最小除数法，過半小数法にもとづいて東京都の議員定数配分を総議員定数を42名から46名まで変化させて求めると，**表 3.4** の結果が得られる．この表の結果から，4 種類の議員定数配分方法に対して，総議員定数が

43，44の時には2種類，また42，45，46の時には3種類の議員定数配分が得られているのがわかる．また最大除数法，過半小数法については総議員定数が42の場合を除くすべての場合に対してまったく同じ定数配分となることも確かめられる．また最大除数法，過半小数法では，有権者数の多い選挙区（たとえば11区）から定数が増えていくのに対して，最大剰余数法，最小除数法では必ずしもそうとは限らず，たとえば1区，9区のように有権者数の少ない選挙区でも増えていくのがみられる．（このことについては次章で再び詳しく述べる）

一般的に言って，最大除数法は最大剰余数法よりも有権者の多い選挙区に有利に働くという特徴がある．たとえば，東京都議員定数の例で総議員定数が43から44（表3.4参照）になったとすると，最大剰余数法では有権者の少ない選挙区1が新しい定数を追加するのに対して，最大除数法では逆に有権者の多い選挙区11が新しい追加定数を得る．このことは，総議員定数が1だけ増加するとき，どの選挙区に新しい定数を追加するか（最大剰余数法の場合はアラバマパラドックス現象が現われることからして必ずしもすべての選挙区の議員定数が非減少であるとは限らない）は，最大剰余数法では各選挙区の有権者数の大小にはほとんど依存しない（剰余数$q_i-\lfloor q_i \rfloor$にのみ依存する）のに対して，最大除数法ではp_i/λ_{GD}の変化がp_iの大きい方が多いことから有権者数p_iの大きい選挙区に有利になる，と考えることができる．なお過半小数法も最大除数法とほぼ同様の傾向を有し，最大剰余数法に比して有権者数の多い選挙区に有利に働く．

一般に割当法は最大除数法に近い配分解を与える．このことは表3.3に示す解が表3.4の最大除数法の解と同一であることからも確かめられる．割当法は，総議員定数を順次増やしながら，次々と新しい追加定数を最大除数法の評価基準にもとづいて配分していく方法である．そのさい，最大

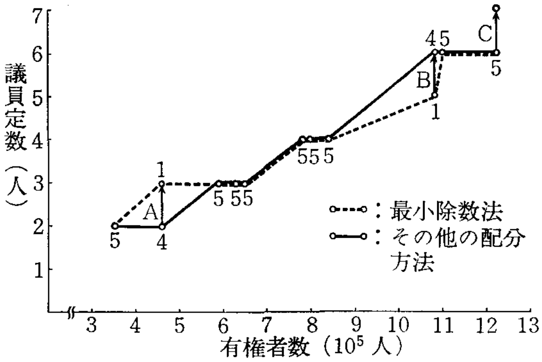

図 3.1 有権者数と最適議員定数

除数法によって得られる解がある選挙区の議員定数の上側割当分特性を満たさない場合には，その選挙区に追加定数を配分しないという方法である．したがって前述のように，これまでに紹介したいくつかの配分方法のうちで最大除数法は有権者数の多い選挙区に最も有利な配分方法（次章に詳述）であるから，それらの選挙区に“有利になり過ぎないように”抑えた方法であるという意味で最大除数法に近いと解釈することができる．

ある議員定数配分方法が総議員定数特性を有するとは，その配分方法にもとづいて総議員定数がKと$K+1$の場合の定数配分を実施した場合に，どの選挙区の議員定数も総議員定数$K+1$の場合の方がKの場合より小さくならないことをいう．表3.4にある最大剰余数法の結果からは，総議員定数が44の時に定数3を有していた選挙区1が総議員定数45の時に定数2に減少するという，アラバマパラドックス現象が見られる．つまり最大剰余数法は総議員定数特性を有さない．なお最大除数法，最小除数法，過半小数法ではこのような現象は生じない．このことは次章に述べる階数関数の性質から得られる．

割当法，最大剰余数法，最大除数法，最小除数法，過半小数法の5種類の議員定数配分方法に対して，総議員定数43の時の有権者数と議員定数をグラフに示したのが**図3.1**である．図中の数字は各点に対応する配分解を与える配分方法が何種類あるかを表わしている．したがって5はすべての

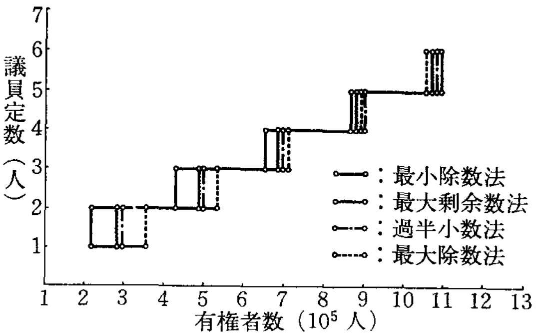

図 3.2 最適議員定数の変化

配分方法がその定数配分解を与えたことを意味する．点線で示した解に対応する配分方法は最小除数法であって，図中の数字 1 に対応する．また図 3.1 中の矢印は総議員定数が 43から44になる場合に 1 名の定数増が生ずる箇所を示している．Aは最大剰余数法，Bは最小除数法，Cは過半小数法と最大除数法による定数増の変化を表わす．

東京都の例（総議員定数43名）において，4 種類の議員定数配分方法が有権者数の増加とともにどのように議員定数を増加させるかを示したのが**図 3.2** である．有権者数が少ないところでは，最小除数法，最大剰余数法が他の配分方法と比べて先に定数増となる（これらの方法は有権者数の少ない選挙区に有利）のに対して，有権者数が80～90万人程度のところでは 4 種類の方法がほぼ同様の傾向を示す．100万人を越える有権者数のところでは，過半小数法や最大除数法が先に定数増を得ている（これらの方法は有権者数の多い選挙区に有利）のが図から確かめられる．

4. 比率にもとづく議員定数配分方法の適用

4.1 等比率法

等比率法は，一般に法 Huntington と呼ばれる局所的最適化手法によってより望ましい議員定数配分を求める方法のうちの最も代表的なものであって，1941年以来現在でも米国下院の州別議員定数の決定に用いられている方法である．等比率法では，任意の 2 つの選挙区 i, j の間の議員 1 人当りの有権者数を表わす“比率”に注目し，その比率の“相対誤差”ができるだけ小さくなるような議員定数配分を得ることを目的とする．等比率法において，2 つの選挙区 i と j の間の議員 1 名当りの有権者数の比率の相対誤差を表わす関数 $\varepsilon_H{}^1$ は次式で与えられる．

$$\varepsilon_H{}^1 = |p_j/d_j - p_i/d_i| / \min\{p_i/d_i, p_j/d_j\}. \tag{4.1}$$

$\sum d_i = K$を満足するような議員定数 $\{d_i\}$ が与えられている時，等比率法の計算方法は以下の通りである．

(i) すべての $p_i, d_i, i \in S$ に対して，以下の量を計算する．

$$\frac{p_i}{\sqrt{d_i(d_i-1)}},\quad \frac{p_i}{\sqrt{d_i(d_i+1)}}$$

(ii) $$\frac{p_i}{\sqrt{d_i(d_i-1)}} < \frac{p_j}{\sqrt{d_j(d_j+1)}}$$

なる組 $\{i, j\}$ が存在するとき，$d_i \to d_i - 1$, $d_j \to d_j + 1$ とする．このような組 $\{i, j\}$ が存在しなければ終了．

上の計算を実行すると，最終的には

$$\max_i \frac{p_i}{\sqrt{d_i(d_i+1)}} \le \min_i \frac{p_i}{\sqrt{d_i(d_i-1)}} \tag{4.2}$$

が成立する．この状態が等比率法の収束状態となる．

表 4.1 等比率法による東京都議員定数配分計算の収束結果（矢印はそれぞれ (4.2) の最大値，最小値を示す）

選挙区 i	議員定数 d_i	$\frac{p_i}{\sqrt{d_i(d_i+1)}}$	$\frac{p_i}{\sqrt{d_i(d_i-1)}}$
1	2	186466.2	322968.9
2	4	174854.5	225736.2
3	4	177653.1	229349.2
4	4	187963.9	242660.3
5	3	180618.3	255432.8
6	3	170143.7	240619.5
7	6	166826.5	→197391.7
8	2	144408.9	250123.5
9	3	184741.4	261263.8
10	6	168406.5	199261.3
11	6	→188800.0	223391.2

東京都の例（総議員定数43）に等比率法を適用すると，最終的には**表4.1**のような収束結果が得られる．(4.2) が成立していること，そしてまた議員定数配分結果がこれまでに紹介した方法による配分結果と同様であることはただちに確認できるであろう．

等比率法によって得られる議員定数配分解は以下のような特徴を有する．つまり，総議員定数が1だけ増加した場合の解は，等比率法の階数関数 $p/\sqrt{d(d+1)}$ (p：有権者数，d：議員定数) に注目して，その関数値が最大の選挙区に新しい定数1を配分（その他の選挙区の定数はそのまま）すれば良い．また総議員定数が1だけ減少した場合の解は，関数 $p/\sqrt{d(d-1)}$ の値が最小の選挙区から定数1を差し引く（他の選挙区の定数はそのまま）ことによって等比率法による新たな配分解を得ることができる．したがって東京都の議員定数配分の例に関しては，総議員定数43の場合の表4.1の結果から，総議員定数が44の場合には $p_i/\sqrt{d_i(d_i+1)}$ の値が最大である選挙区11に追加定数1を配分し，また総議員定数が42の場合には $p_i/\sqrt{d_i(d_i-1)}$ の値が最小である選挙区7から定数1を差し引けば良い．

4.2 その他の比率系配分方法

一般に Huntington 法と呼ばれる比率系配分方法としては，等比率法（以下では Huntington 1 法と呼ぶ）を含めて5種類の議員定数配分方法（それぞれ Huntington 1 法—Huntington 5 法と呼ぶ）が提起されている．Huntington 2 法から Huntington 5 法までのそれぞれの誤差関数は以下のように与えられる．なお以下の表示方法は，選挙区 i が選挙区 j よりも“有利”（選挙区 i における有権者1人当りの議員定数が選挙区 j のそれより大，[1] 参照）であることを前提として，各々の誤差関数が正になるようにしてある．

$$\varepsilon_H{}^2 = d_i/p_i - d_j/p_j > 0 \tag{4.3}$$

$$\varepsilon_H{}^3 = p_j/d_j - p_i/d_i > 0 \tag{4.4}$$

$$\varepsilon_H{}^4 = d_i p_j/p_i - d_j > 0 \tag{4.5}$$

表 4.2 Huntington 3 法による東京都議員定数配分計算の収束結果（矢印はそれぞれ(4.8)の最大値，最小値を示す）

選挙区 i	議員定数 d_i	$\dfrac{p_i}{d_i(d_i+1)/(d_i+0.5)}$	$\dfrac{p_i}{d_i(d_i-1)/(d_i-0.5)}$
1	2	190311.2	342560.2
2	4	175943.9	228075.5
3	4	178760.0	231726.6
4	4	139135.0	245175.0
5	3	182490.0	260700.0
6	3	171906.9	245175.0
7	6	167322.2	→198212.5
8	2	147386.7	265296.0
9	3	186655.9	266651.2
10	6	168907.0	200089.8
11	6	→189361.1	224320.1

$$\varepsilon_H{}^5 = d_i - p_i d_j/p_j > 0 \tag{4.6}$$

上の各々の誤差関数にもとづく Huntington 法の反復計算の収束状態は，以下の関数が成立する場合に得られる．

$$\max_i \frac{p_i}{d_i+0.5} \leqq \min_i \frac{p_i}{d_i-0.5} \tag{4.7}$$

$$\max_i \frac{p_i}{d_i(d_i+1)/(d_i+0.5)} \leqq \min_i \frac{p_i}{d_i(d_i-1)/(d_i-0.5)} \tag{4.8}$$

$$\max_i \; p_i/(d_i+1) \leqq \min_i \; p_i/d_i \tag{4.9}$$

$$\max_i \; p_i/d_i \leqq \min_i \; p_i/(d_i-1). \tag{4.10}$$

[1]にも述べたように，Huntington法はこれまでに紹介した議員定数配分方法と密接な関連を有している．たとえば Huntington 2 法は過半小数法と等価であるし，また Huntington 4 法，Huntington 5 法はそれぞれ最大除数法，最小除数法と等価である．したがってここでは，前章に示さなかった Huntington 3 法を用いた計算結果のみを**表4.2**に紹介しよう．この結果から，東京都の議員定数配分において，総議員定数が43の場合はこれまでの最小除数法と修正最大剰余数法を除くすべての方法と同じ結果が得られているのがわかる．階数関数の性質を用いると，総議員定数が1

表 4.3 等比率法および Huntington 3 法にもとづく議員定数の配分（表中の＋は前議員定数に対する定数増，－は定数減を表わす）

選挙区＼総定数	等比率法 (Huntington 1 法) 42	43	44	45	46	Huntington 3 法 42	43	44	45	46
1	2	2	2	2	+3	2	2	+3	3	3
2	4	4	4	4	4	4	4	4	4	4
3	4	4	4	4	4	4	4	4	4	4
4	4	4	4	+5	5	4	4	4	4	+5
5	3	3	3	3	3	3	3	3	3	3
6	3	3	3	3	3	3	3	3	3	3
7	5	+6	6	6	6	5	+6	6	6	6
8	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2
9	3	3	3	3	3	3	3	3	3	3
10	6	6	6	6	6	6	6	6	6	6
11	6	6	+7	7	7	6	6	6	+7	7

だけ増加した場合には選挙区 1 の定数を 1 だけ増やせばよいこともわかる．等比率法 (Huntington 1 法) と Huntington 3 法について，総議員定数を42から46まで変えた場合の東京都各選挙区の議員配分解は表4.3のように与えられる．**表 4.3** から，これらの方法がお互いに異なる解を与えるというばかりでなく，等比率法(Huntington 1 法), Huntington 3 法のいずれも表3.4に示したいずれの方法とも解が完全には一致していないこともわかる．

4.3 比率系配分方法の特性と特徴

Huntington 法の階数関数の形から各々の配分方法にもとづく解の傾向がわかる．たとえば 5 種類の階数関数の分母には近似的に以下のような大小関係が成立する．

$$d_i+1>d_i+0.5>\sqrt{d_i(d_i+1)}>\frac{d_i(d_i+1)}{(d_i+0.5)}>d_i \qquad (4.11)$$

したがってこのことは Huntington 法に関して最大除数法(Huntington 4 法), 過半小数法(Huntington 2 法), 等比率法 (Huntington 1 法), Huntington 3 法, 最小除数法 (Huntington 5 法) の順に p_iの大きい方に有利になることを意味する．これは表3.4，表4.3に示した実際の東京都の議員定数配分の例からも確かめられる．

最大剰余数法および 5 種類の Huntington 法のすべてが異なる配分解を与える例を**表 4.4** に示す．この例は 7 選挙区，総有権者数 10000人，総議員定数 100名からなる例であるが，どの選挙区もこれらの 6 つの配分方法によって 2 種類以上の異なる定数を得，またどの 2 つの方法も同一の配分解を与えていない．この表の結果からも，前述の有権数 p_i の大きい方に有利になる配分方法の優先順位が最大除数法，過半小数法，等比率法，Huntington 3 法，最小除数法であるのが確かめられる．またこれらの配分方法によると，選挙区 3 から選挙区 7 までは配分方法によって 1 または 2 という配分定数を得るが，選挙区 1 では50から53までの 4 種類，選挙区 2 では40から42までの 3 種類の異なる配分定数が与えられる．このことからも，これらの 6 種類の方法がかなり異なる議員定数を与えることは十分に予測される．また表 4.4 の結果からは，等比率法，過半小数法を除く 5 種類の解は上側，下側の割当分特性をすべて満足しているが，たとえば選挙区 1 の配分解から，最大除数法は上側割当分特性，Huntington 3 法，最小除数法は下側割当分特性を満たしていないのがわかる．

5. 議員定数配分と投票力指数

それぞれの選挙区 $i \in S$ をプレーヤー，そして

表 4.4 議員定数配分方法と配分解
(GD：最大除数法，MF：過半小数法，LF：最大剰余数法)
(EP：等比率法，$HNT3$：Huntington 3 法，SD：最小除数法)

選挙区	有権者数	GD法	MF法	LF法	EP法	HTN 3法	SD法
1	5148	53	52	52	51	50	50
2	4147	42	42	41	41	41	40
3	149	1	2	2	2	2	2
4	148	1	1	2	2	2	2
5	147	1	1	1	2	2	2
6	141	1	1	1	1	2	2
7	120	1	1	1	1	1	2
計	10000	100	100	100	100	100	100

各選挙区の議員定数 d_i をプレーヤーの投票力とする投票力ゲームを考える．いま選挙区の集合Tが総議員定数Kの過半数，つまり，$K/2$より大きい議員定数を獲得する場合，すなわち

$$\sum_{i \in T} d_i > K/2 \tag{5.1}$$

が成立するときに，集合Tはゲームに勝つといい，Tを勝利連合と呼ぶ．このようなゲームは$[K/2; d_1, \cdots, d_N]$と表わされる．この時，各々の選挙区 i の Shapley-Shubik 投票力指数φ_iは，選挙区 i が連合への参加順序をも考えた上で勝利連合の軸となりうる割合であると定義される（[1]，[9] 参照）．したがって φ_iは次式で与えられる．

$$\varphi_i = (\text{選挙区 } i \text{ が勝利連合の軸となるような場合の数})/N! \tag{5.2}$$

ここで選挙区 i が勝利連合の軸であるとは，T が勝利連合であって $T-\{i\}$ が勝利連合ではない場合を言う．(5.2) の定義からもわかるように，連合のすべての順列は“等確率”で起こると考えてよい．したがって (5.2) 式は次のように書くことができる．

$$\varphi_i = \sum \frac{(t-1)!\ (N-t)!}{N!} \tag{5.3}$$

$t = |T| = T$に含まれる選挙区数．

ここで (5.3) における加法記号は，選挙区 i が軸となるようなすべての勝利連合Tに関して加えることを意味する．

東京都の各選挙区の議員定数の例を対象としての Shapley-Shubik 投票力指数を計算すると，現議員定数および新議員定数（前章で最適議員配分として得られたもの）に対して**表 5.1** のような結果が得られる．この表からも現議員定数ケースの投票力指数に比べて新議員定数ケースの方が有権者重みにかなり近いのがわかる．上の投票力指数の定義式からもわかるように，このゲームの勝利連合は“$K/2$より大きい議員定数”を得る場合であると仮定した．したがってこの割合が異なる場合（たとえば $2K/3$）には，また異なる投票力指数が得られるのはもちろんである．

表 5.1 東京都議員定数と Shapley-Shubik 投票力指数

選挙区	有権者数重み (%)	現議員定数ケース		新議員定数ケース	
		定数	投票力指数 (%)	定数	投票力指数 (%)
1	5.3870	3	7.2727	2	3.8095
2	9.2228	5	11.3997	4	9.2857
3	9.3704	4	9.1775	4	9.2857
4	9.9143	5	11.3997	4	9.2857
5	7.3794	3	7.2727	3	6.7100
6	6.9515	4	9.1775	3	6.7100
7	12.7515	4	9.1775	6	14.4949
8	4.1720	3	7.2727	2	3.8095
9	7.5479	3	7.2727	3	6.7100
10	12.8722	5	11.3997	6	14.4949
11	14.4310	4	9.1775	6	14.4949
計	100.0000	43	100.0000	43	100.0000

米国の大統領選挙を例にとり，それぞれの州の Shapley-Shubik 投票力指数あるいは各州の代議員が有する投票力指数を計算した結果が [9] に示されている．それによると，たとえば代議員定数の多いニューヨーク州の投票力指数は $\varphi_{NY}=0.084064$，少ないコロンビア区のそれは $\varphi_{DC}=0.005416$となるので，ニューヨーク州の有権者はコロンビア区の有権者に対して $\varphi_{NY}/\varphi_{DC}=15.521$倍の投票力を有すると言える．一方，Banzhaf 指数（[1]，[9] 参照）にもとづいてこれらの州と区の各有権者が限界的となる割合を計算すると，各選挙区の有権者数の平方根に逆比例することから，ニューヨーク州の有権者はコロンビア区の各有権者の0.2133倍の影響力を有することになる．このようにして結局，ニューヨーク州の各有権者の投票力はコロンビア区のそれに対して$15.521 \times 0.2133 = 3.311$倍であるというのが [9] による結論である．

わが国の衆議院各選挙区の有権者の投票力指数を計算してみると（非常に膨大な計算を必要とする）どのような“格差”がみられるのであろうか，興味あるところである．

おわりに

本稿では，東京都の衆議院選挙区議員定数問題をとりあげ，動的計画法によるアプローチ，いろいろな議員定数配分方法にもとづく計算，あるいはゲーム理論的見地からの投票力指数との関連等について実際の数値計算を試みた．本稿最初にも述べたように，議員定数配分問題は衆議院，参議院ともにわが国全体に関わる非常に重要な解決困難な問題である．その意味では，ここに掲げた例は実際の問題解決にはほど遠く，ただ計算の事例を紹介したに過ぎない．全国を対象としてどのような議員定数是正が望ましいのかといった疑問に答えるには，より詳細な分析が必要であって，それは今後の課題である．

最後になりましたが，本稿の作成にあたっては慶応義塾大学理工学部の柳井浩教授に多くの貴重なコメントをいただきました．ここに改めて感謝の意を表します．

参 考 文 献

[1] 大山達雄，1987：“選挙区議員定数問題の数理”，オペレーションズ・リサーチ，Vol. 32, No. 5, pp. 269-280.

[2] Lucas, W. F. 1983: “The Apportionment Problem”, *Modules in Applied Mathematics*, Chapter 14, Lucas, W. F. (ed.), Vol. 2, Springer-Verlag, pp. 358-396.

[3] Balinski, M. L. and Young, H. P. 1982: *Fair Representation: Meeting the Ideal of One Man, One Vote*, Yale University Press.

[4] Balinski, M. L. and Young, H. P. 1975: “The Quota Method of Apportionment”, *American Mathematical Monthly*, 82, pp. 701-730.

[5] Balinski, M. L. and Young, H. P. 1979: “Criteria for Proportional Representation”, *Operations Research*, 27, pp. 80-95.

[6] Balinski, M. L. and Young, H. P. 1977: “Apportionment Schemes and the Quota Method”, *American Mathematical Monthly*, 84, pp. 450-455.

[7] Balinski, M. L. and Young, H. P. 1977: “On Huntington's Methods of Apportionment”, *SIAM Journal on Applied Mathematics*, 33, pp. 607-618.

[8] Balinski, M. L. and Young, H. P. 1979: “Quotatone Apportionment Methods”, *Mathematics of Operations Research*.

[9] Lucas, W. F., 1983: “Measuring Power in Weighted Voting Systems”, *Modules in Applied Mathematics*, Chapter 9, Lucas, W. F. (ed.), Vol. 2, Springer-Verlag, pp. 183-255.