動的計画の図解

岩本　誠一　九州大学

1. 積分と最適化

連続関数 $f:[a, b]\to R^1$ に1つの実数値を対応させる最も有名なものは，積分値を対応させる写像 $L(f)=\int_a^b f(x)dx$ であろう（図1）．写像 L は線形

$$L(\alpha f+\beta g)=\alpha L(f)+\beta L(g) \qquad (1)$$

かつ単調

$$f\leqq g \Rightarrow L(f)\leqq L(g) \qquad (2)$$

である．他方，最大値（最小値）を対応させる写像 $M(f)=\underset{a\leqq x\leqq b}{\mathrm{Max}} f(x)$　$(m(f)=\underset{a\leqq x\leqq b}{\min} f(x))$（図1）は，非線形であるが単調である．

積分作用素は微分作用素とともに解析学の重要な作用素であり，数学史上でも中心的な存在であったといえるだろう．他方，最大化，最小化の両作用素は動的計画(DP)の基本作用素であり，最適化理論は最適化作用素の解明に他ならない．数理計画法を中心とする最適化理論は比較的新しい数学といえよう．

本稿では積分，最適化の両作用素の相異点と類似性に触れると同時に，DP における最大化作用素の性質を具体的な図によって解明しよう．

2. マクシマックス定理

定理1　Dを2直線 $x=a$, $x=b(a<b)$ と，連続曲線 $y=\varphi(x)$, $y=\phi(x)$ $(\varphi(x)\leqq\phi(x))$ で囲まれた有界閉領域とする．このとき，関数$f: D\to R^1$ が連続ならば，

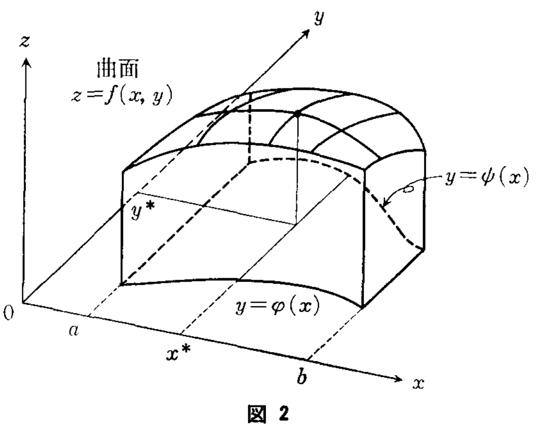

図2

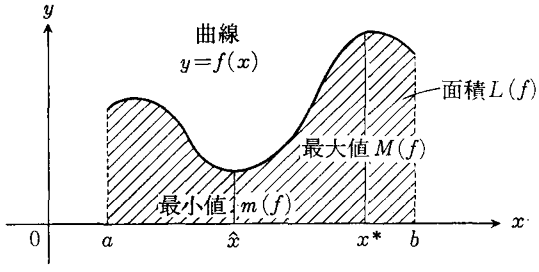

図1

$$\iint_D f(x,y)dxdy=\int_a^b\left(\int_{\varphi(x)}^{\phi(x)} f(x,y)\,dy\right)dx \qquad (3)$$

$$\underset{(x,y)\in D}{\mathrm{Max}} f(x,y)=\underset{a\leqq x\leqq b}{\mathrm{Max}}\ \underset{\varphi(x)\leqq y\leqq\phi(x)}{\mathrm{Max}} f(x,y). \qquad (4)$$

(3) の左辺は D 上で $f(x,y)$ を2変数同時に積分する**2重積分**である．右辺はまず区間$[\varphi(x),\phi(x)]$上をyで積分して，次に$[a,b]$上でxによる積分をくりかえす**累次積分**である．(4)の左辺は**2変数同時最大化**であり，右辺はまずyによる，そして次にxによる**2段階最大化**である(図2)．どちらも，左辺の2変数同時作用を右辺の2段階作用に置き換えてよいことを保証している．事実右辺の計算が左辺より容易であり，実際的である．

定理2　(i) $g,\beta:[a,b]\to R^1$, $h: D\to R^1$ が連続で

$$f(x,y)=g(x)+\beta(x)h(x,y)$$

ならば，

$$\iint_D[g(x)+\beta(x)h(x,y)]dxdy$$

$$=\int_a^b[g(x)+\beta(x)\int_{\varphi(x)}^{\phi(x)}h(x,y)dy]dx. \qquad (5)$$

(ii) $g:[a,b]\times R^1\to R^1$, $h: D\to R^1$は連続で，各 $x\in[a,b]$に対して $g(x;\cdot): R^1\to R^1$ が非減少であって，

$$f(x,y)=g(x;h(x,y)) \qquad (6)$$

ならば，

$$\underset{(x,y)\in D}{\mathrm{Max}} g(x;h(x,y))=\underset{a\leqq x\leqq b}{\mathrm{Max}} g(x;\underset{\varphi(x)\leqq y\leqq\phi(x)}{\mathrm{Max}} h(x,y)). \qquad (7)$$

(6)の関数$f(x,y)$は$g(x;h)$と$h=h(x,y)$との合成であり（可分性），gはhについて非減少である（単調性）．特に$f(x,y)$として

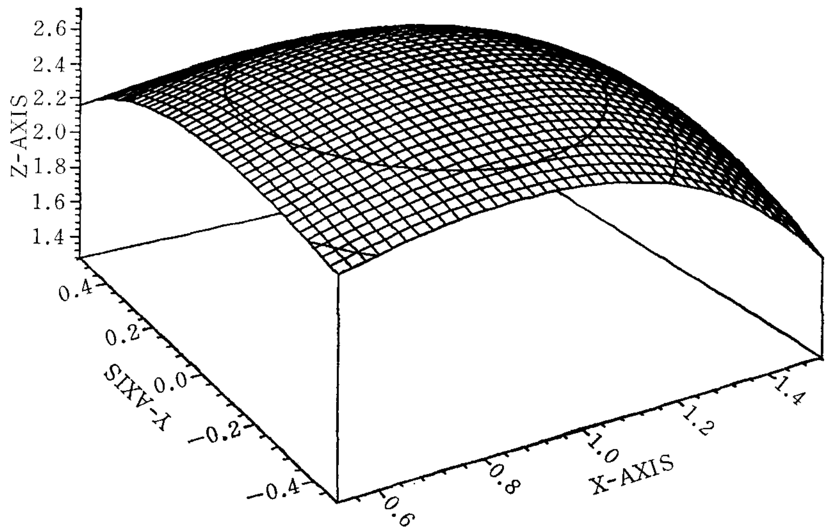

図 3 $f(x,y;0)=(1-x)e^{x}+(1-y)e^{x+y}$

$$f(x,y;h)=g(x;g(y;h)) \qquad (8)$$

も考えられる．この $f(x,y;h)$ に対しては，可分性はむしろ再帰性と呼んだほうがよかろう．(6),(8) を**非減少性をもつ再帰型関数**ともいう．(7) を **Maximax 定理**([4])と呼ぶ．この変形としては次がある：

$$\operatorname*{Max}_{(x,y)\in D} g(x;h(y))=\operatorname*{Max}_{a\leq x\leq b} g(x;\operatorname*{Max}_{\varphi(x)\leq y\leq\phi(x)} h(y)),$$

$$\operatorname*{Max}_{(x,y)\in D}[g(x)+\beta(x)h(x,y)]=\operatorname*{Max}_{a\leq x\leq b}[g(x)+\beta(x)\times\operatorname*{Max}_{\varphi(x)\leq y\leq\phi(x)} h(x,y)],\ (\text{ただし，}\ \beta(x)\geqq 0)$$

$$\operatorname*{Max}_{\substack{a\leq x\leq b\\ c\leq y\leq d}} g(x;h(x,y))=\operatorname*{Max}_{a\leq x\leq b} g(x;\operatorname*{Max}_{c\leq y\leq d} h(x,y)).$$

上式は Max をすべて min にしても成り立つ．また，D は有界閉集合としていたが，一般の集合に対しても一方の最大値が存在すれば，他方も存在して両者は等しくなる([4,5])．

例 1 $f(x,y;k)=(1-x)e^{x}+(1-y+k)e^{x+y}: R^2\to R^1$, $k\in R^1$ (**図 3**) は $g(z;k)=(1-z+k)e^{z}$ (**図 4**) を再帰的に合成して $f(x,y;k)=g(x;g(y;k))$ となる．この最大値は，

$$\operatorname*{Max}_{(x,y)\in R^2}[(1-x)e^{x}+(1-y+k)e^{x+y}]$$

$$=\operatorname*{Max}_{x\in R^1}[1-x)e^{x}+e^{x}(\operatorname*{Max}_{y\in R^1}(1-y+k)e^{y})]$$

より，$(x^*,y^*)=(e^k,k)$ のとき，e^{e^k} (**図 3**)．

例 2 $f(x,y;k)=|x-|y-k|-2k|+2|y-k|+4k$

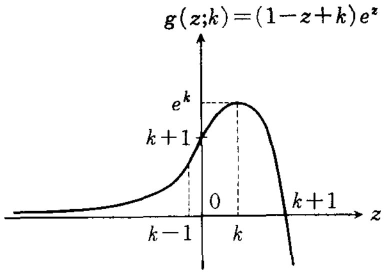

図 4

(**図 5**)の最小値は，$g(z;k)=|z-k|+2k$ (**図 6**) の再帰的合成だから，$(\hat{x},\hat{y})=(2k,k)$ のとき，$4k$.

3. ミニマックス定理

非減少性をもつ再帰型関数 $f(x,y)=g(x;h(y))$ に対しては，凹性や凸性を仮定することなく，ミニマックス定理が成り立つ．

定理 3 ([3]) $g:X\times R^1\to R^1$, $g(x;\cdot)$:非減少, $h:Y\to R^1$ とする．$\displaystyle\min_{x\in X} g(x;h)\ (h\in R^1)$, $\displaystyle\operatorname*{Max}_{y\in Y} h(y)$ が存在するならば，$\displaystyle\min_{x\in X}\operatorname*{Max}_{y\in Y} g(x;h(y))$, $\displaystyle\operatorname*{Max}_{y\in Y}\min_{x\in X} g(x;h(y))$ が存在して，両者は等しい：

$$\min_{x\in X}\operatorname*{Max}_{y\in Y} g(x;h(y))=\operatorname*{Max}_{y\in Y}\min_{x\in X} g(x;h(y)).$$

$$\hat{g}(h)=\min_{x\in X} g(x;h)=g(\hat{x}(h);h),\quad \operatorname*{Max}_{y\in Y} h(y)=h(y^*)$$

とすれば，$(\hat{x}(h(y^*)),y^*)$ が鞍点で，共通なミニマック

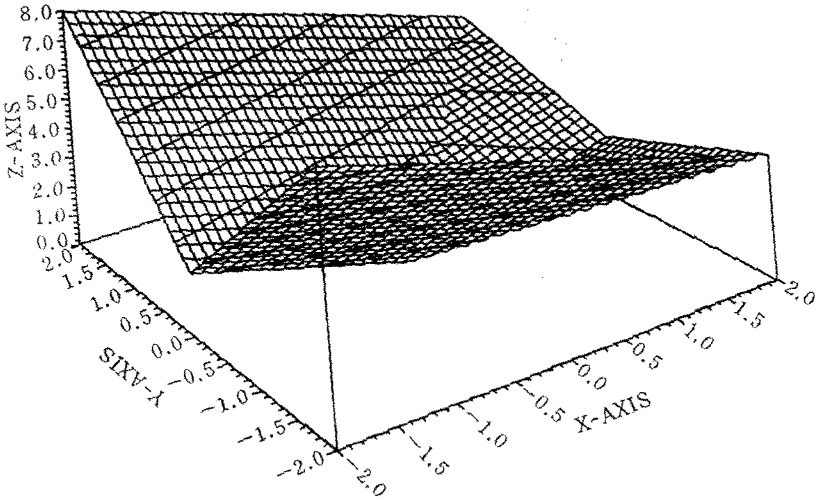

図 5　$f(x, y; 0)=|x-|y||+2|y|$

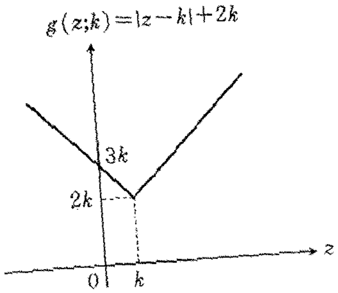

図 6

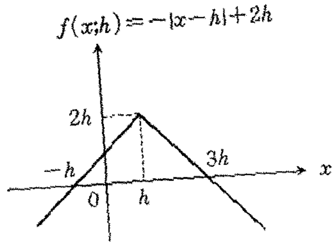

図 8

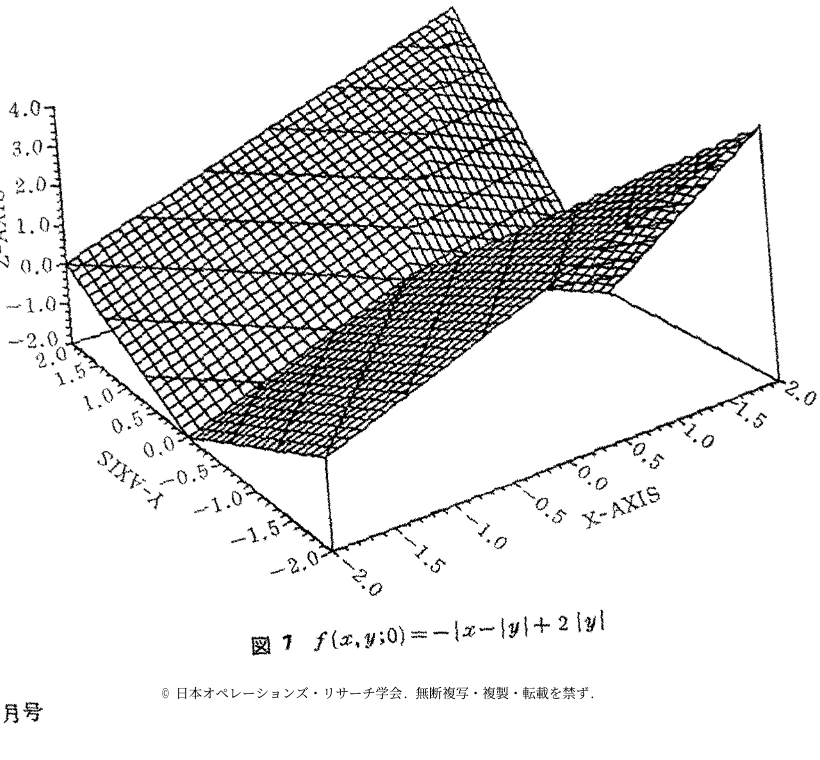

図 7　$f(x, y; 0)=-|x-|y||+2|y|$

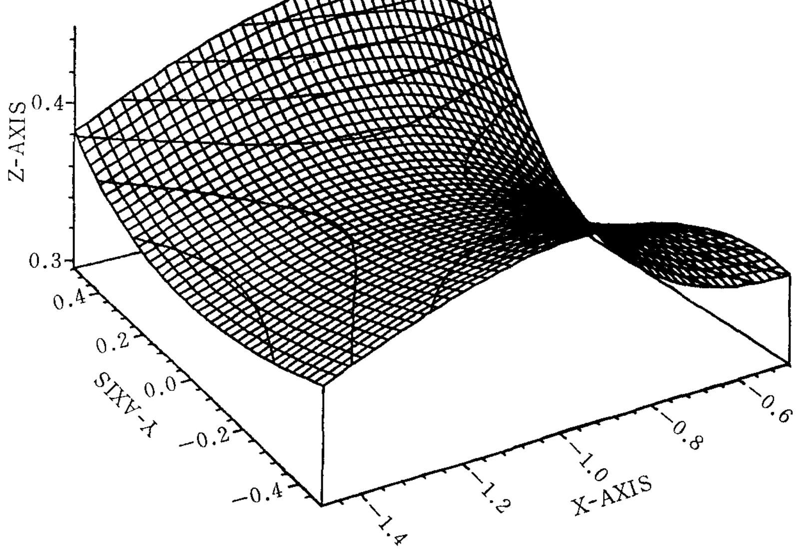

図 9 $f(x,y;0)=(1-x)e^x+(y-1)e^{x+y}$

ス値は $\hat{g}(h(y^*))$ になる.

例として, $f(x,y)=x^2-y^2$ は $g(x;k)=x^2+h$, $h(y)=-y^2$ の再帰的合成であるが, このミニマックス化は有名である. ここでは

$f(x,y;k)=g(x;h(y;k))$, $g(x;\cdot)$: 非減少

で, $\underset{-\infty<x<\infty}{\mathrm{Max}}\ g(x;h)$, $\underset{-\infty<y<\infty}{\min}\ h(y;k)$ が存在する例として次を考えよう.

例 3 $f(x,y;k)=-|x-|y-k|-2k|+2\,|y-k|+4k$ (図 7) は $g(x;h)=-|x-h|+2h$ (図 8), $h(y;k)=|y-k|+2k$ (図 6 参照) の再帰的合成だから, 鞍点 $(x^*,\hat{y})=(2k, k)$, ミニマックス値 $4k$.

例 4 $f(x,y;k)=(1-x)e^x+(y-1+k)e^{x+y}$ (図 9) は $g(x;h)=(1-x+h)e^x$ (図 4 参照), $h(y;k)=(y-1+k)e^y$ (図10) の再帰的合成. 鞍点 $(x^*,\hat{y})=(-e^{-k},-k)$. ミニマックス値 $e^{-e^{-k}}$.

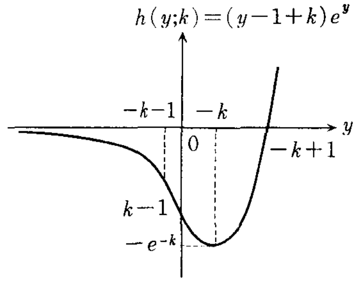

図 10

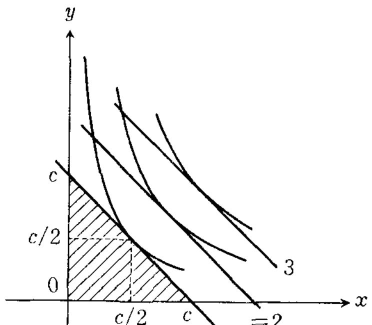

図 11

4. 逆と反転

和が一定以下で積を最大にする問題群

(P) Max xy s.t. $x+y\leqq c(\geqq 0)$, $x\geqq 0, y\geqq 0$

は最大点関数 $(x^*(c),\ y^*(c))=(c/2, c/2)$ と最大値関数 $u(c)=(c/2)^2$ をもつ (図11). 他方, 積が一定以上で和を最小にする問題群

(I) min $x+y$ s.t. $xy\geqq c(\geqq 0)$, $x\geqq 0, y\geqq 0$

は最小点関数 $(\hat{x}(c),\ \hat{y}(c)=(\sqrt{c},\ \sqrt{c})$ と最小値関数 $v(c)=2\sqrt{c}$ をもつ(図12). (P) を**主問題**, (I)を**逆問題**と呼ぶ. 両問題間には**逆関係**

$$u^{-1}(c)=v(c),\ \hat{x}(c)=x^*(u^{-1}(c)),\ \hat{y}(c)=y^*(u^{-1}(c))$$

すなわち

$$v^{-1}=u,\quad x^*=\hat{x}\circ v^{-1},\quad y^*=\hat{y}\circ v^{-1}$$

が成り立つ．逆関係は，(P) の目的関数 $f(\boldsymbol{x})=x+y$，制約関数 $g(\boldsymbol{x})=xy$ の $\boldsymbol{x}$ が $\boldsymbol{x}=(x,y)$ のみならず，$\boldsymbol{x}$ が $\boldsymbol{x}=(x_1,x_2,\cdots,x_N)$，$(x_1,x_2,\cdots)$，$x(t)$ $0\leqq t\leqq T$，$x(t)$ $0\leqq t<\infty$ でも，f, g がもっと一般の式でも成立し，それぞれ DP の再帰式で解くことができる (逆定理[2,6])．

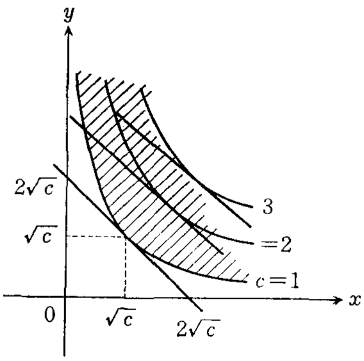

図 12

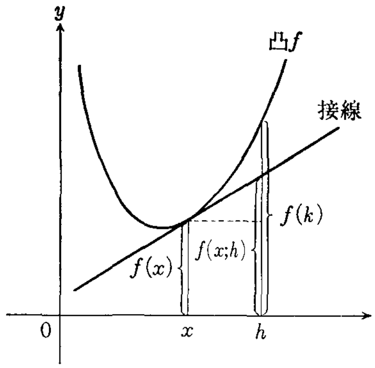

図 13

任意の微分可能な凸関数 $f: R^1\rightarrow R^1$ に対して

$$f(x;h)=f(x)+(h-x)f'(x)$$
$$=F(x)+f'(x)h$$
$$(F(x)=f(x)-xf'(x))$$

を $f(x)$ の h における**線形** (または1次) 近似という (図13)．x を動かすと，

$$f(h)=\underset{x\epsilon R^1}{\mathrm{Max}}\, f(x;h)$$

になり，$x^*(h)=h$ のときに最大値に到達する (図13)．さらに，$f'(x)>0$ ならば，$f(x;h)$ は h の狭義増加だから，Maximax 定理より，

$$f(f(h))=\underset{x_1,x_2\epsilon R^1}{\mathrm{Max}}[F(x_1)+f'(x_1)F(x_2)$$
$$+f'(x_1)f'(x_2)h]$$

で，$x_1{}^*(h)=f(h)$，$x_2{}^*(h)=h$ のとき最大になる (例1は $f(x)=e^x$ に他ならない)．しかも，このとき，$f(x;h)$ の h に関する逆関数が

$$f_{-1}(x;\,k)=x-\frac{f(x)}{f'(x)}+\frac{k}{f'(x)}$$
$$=F_{-1}(x)+\frac{k}{f'(x)}$$

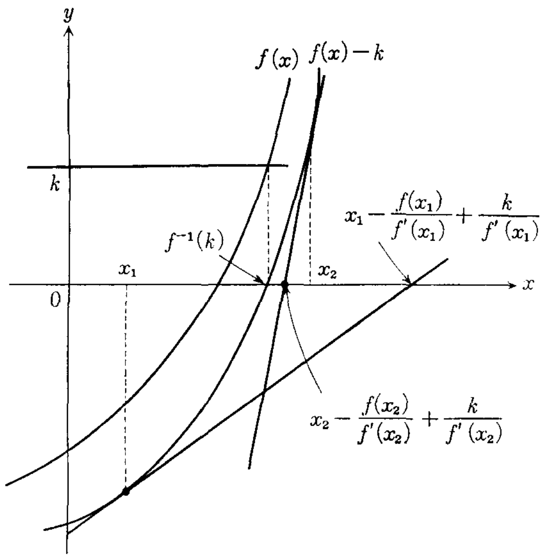

図 14

$$\left(F_{-1}(x)=x-\frac{f(x)}{f'(x)}\right)$$

として定義される．$f_{-1}(x;k)$ を $f(x;h)$ の**反転関数** reverse function という．このとき，

$$f^{-1}(k)=\underset{x\epsilon R^1}{\min}\, f_{-1}(x;k)$$

で，$\hat{x}(k)=f^{-1}(k)$ で最小になる (図14)．これは Newton 法の考え方を最小化作用素で表わしたことになる．また Maximax 定理より，

$$f^{-1}(f^{-1}(k))=\underset{x_1,x_2\epsilon R^1}{\min} f_{-1}(x_1;f_{-1}(x_2;k))$$

で，$\hat{x}_1(k)=f^{-1}(f^{-1}(k))$，$\hat{x}_2(k)=f^{-1}(k)$ が最小点になる．

以上，最適性の原理によって動的計画法を直感的に解説する ([1]) のが常道だが，本稿では敢えて Maximax 定理によった．この定理によれば $N(\geqq 3)$ 変数同時最適化も N 段最適化によって計算され，逆理論・反転理論が展開される ([5])．最後に，図3, 5, 7, 9を描いていただいた九大経済学部時永祥三助教授に感謝する．

参考文献

[1] Bellman, R., "Dynamic Programming," Princeton Univ. Press, NJ., 1957.

[2] Iwamoto, S., "Inverse theorems in dynamic programming I, II, III," *J. Math. Anal. Appl.* 58 (1977), 113-134; 249-279; 439; 448.

[3] 岩本誠一,「Minimax theorem without convex-concavity」, 日本オペレーションズ・リサーチ学会アブストラクト集, 1983年春季.

[4] Iwamoto, S., "Sequential minimaximization under dynamic programming structure," *J. Math. Anal. Appl.* 108 (1985), 267-282.

[5] 岩本誠一,「動的計画論」, 九大出版, 1987.

[6] 近藤次郎,「最適化技法」, コロナ社, 1984.