

図 6 スキー場のリフト待ち時間

れて退去曲線をコントロールすることを考えた。在庫の場合は、退去に相当する需要曲線がまず推定されて、その上で発注による品物の到着曲線を決定している。これ

らの図をマイコンで描けるようにしておけば、可能な退去や発注の方策について検討することが容易にできるだろう。

このお正月10年ぶりにスキーに出かけた。スキー場はかなり込んでいたが、リフトに並ぶ行列の長さは1日中ほぼ一定していた(図6)。待つ時間にして10~15分くらいであったろうか。これはリフトの利用客が、山の上から行列を見て、今すいているぞとか、少し込んできたからゆっくりしていようとかするために、自然と到着の仕方がコントロールされるからであろう。 $\lambda(t) \doteq \mu$ で、必ずしもラッシュ的ではないのだが、流体近似がうまく使える例となっている。

累積分布関数の図的利用

若山 邦紘 法政大学

累積曲線の効用についてはこの特集号でいくつかのテーマがとりあげられているが、この稿では確率分布の累積曲線である累積分布関数の図的利用法について、①一様乱数から任意の分布にしたがう乱数への変換法、②標本分布から理論分布の当てはめ、にスポットを当てよう。

図1を見られたい。乱数をいじったことのある人なら「乱数の変換の説明だな」とすぐに気づくことと思う。

実際、分布関数 $F(x)$ が連続関数であるとき、変数 x と u 、確率変数 X と U の間に次のような関係を考える。

$$u = F(x), U = F(X)$$

すると、 U が u 以下である確率は、

$$\begin{aligned} Pr\{U \leq u\} &= Pr\{X \leq x\} \\ &= F(x) = u \end{aligned}$$

となり、 U は一様分布にしたがうことがわかる。このことから、区間 $(0, 1)$ の一様乱数 u を発生して、

$$u = F(x)$$

となる x を求めれば、 x は分布関数 $F(x)$ をもつ確率変数の実現値とみることができる。

この原理は、離散分布の場合で考えた方がより直観的に理解できよう。図2のように累積分布関数の縦軸の値 u をランダムに決め、どの階段に当たるかで x の値が決まる。 x それぞれの値が出現する確率は対応する階段の高さに等しいのであるから理解しやすい。一般的には、

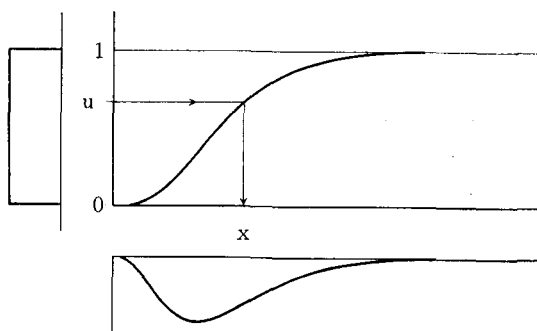


図 1 乱数の変換 (連続分布の場合)

$Pr\{X=k\} = P_k (k=0, 1, 2, \dots)$ としたとき、一様乱数 u に対して、

$$\sum_{k=0}^{x-1} P_k < u \leq \sum_{k=0}^x P_k$$

となる x を見つければよい。

以上の方法は逆関数法と呼ばれ、一般的な乱数変換法の1つとして利用されている。その他には、棄却法、合成法などがある。また、いくつかの理論分布に対しては、その分布の特別な性質を利用した方法が考えられている。

[指数分布] 指数分布の分布関数は $F(x) = 1 - e^{-\lambda x}$ であるから、

$$u = F(x) = 1 - e^{-\lambda x}$$

の対数をとって整理すると、

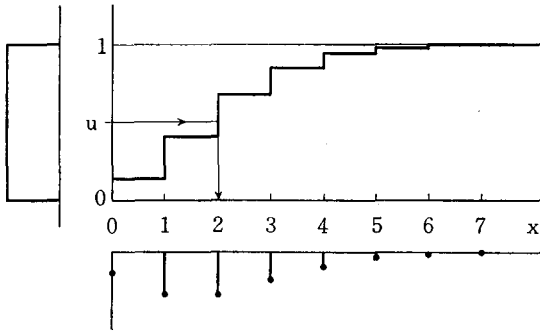


図2 乱数の変換 (離散分布の場合)

$$x = -(1/\lambda) \ln(1-u)$$

ここで、 $1-u$ もまた $(0, 1)$ の一様乱数であるから、あらためて、

$$x = -(1/\lambda) \ln u$$

として指数乱数を得る。

このように解析的に $F(x)$ の逆関数 $F^{-1}(u)$ が得られない場合が多い。 $F(x)$ を折れ線近似したり、 $F^{-1}(u)$ を関数近似したりして逆関数法を適用する。

[正規分布] 一様乱数 u に対して、

$$u = F(x) = \int_{-\infty}^x \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-t^2/2} dt$$

となる $x = F^{-1}(u)$ を求めるには、山内の近似式がよい。すなわち、

$$y = -\ln[4u(1-u)]$$

とおいて、

$$x = F^{-1}(u)$$

$$= [y(2.0611786 - \frac{5.7262204}{y+11.640595})]^{1/2}$$

で計算する。相対誤差は 4.89×10^{-4} である。 u が 0.5 より大きいかどうかによって、得られた x の値に正負の符号をつける。 x は平均 $\mu=0$ 、標準偏差 $\sigma=1$ の擬似正規乱数である。周知のように、正規乱数発生には、中心極限定理を利用する方法、Box-Muller法、渋谷の棄却法などがある。

シャボン玉の寿命を1,000回測定したところ、図3のようなヒストグラムが得られた。寿命が長くなるにしたがい度数が減少していることはわかるが、データはバラツキているように見える。ところが、このデータの累積をとって眺めると、図4のように驚くほど滑らかな曲線が浮かび上がってきた。累積をとると、偶然の変動が除去されるからである、この効果を累積による smoothing 効果という。

観測データが指数分布 $f(x) = \lambda e^{-\lambda x}$ にしている

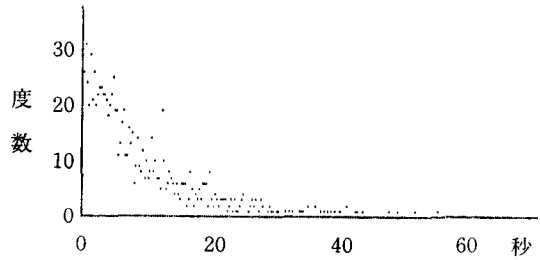


図3 シャボン玉の寿命の度数分布

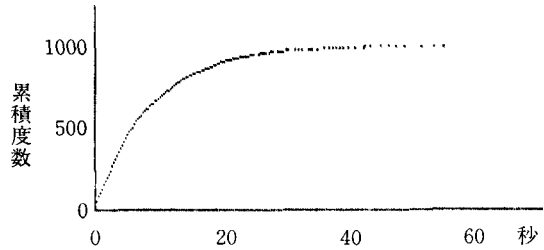


図4 シャボン玉の寿命の累積度数

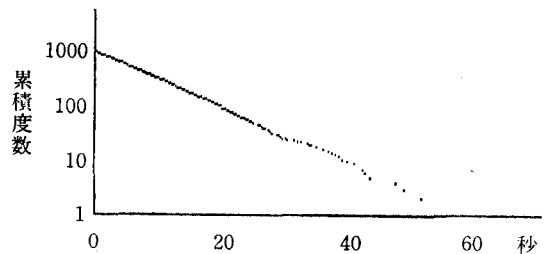


図5 寿命の長い方からの累積度数

場合、寿命の長い方から累積をとると、図4を50%の線で折り返した図5が得られ、これが指数曲線 $e^{-\lambda x}$ となるはずである。このグラフを片対数グラフ用紙にプロットすれば直線になるわけで、図6がその結果である。みごとに直線になった。図から得られる情報は説得力が大きいことがわかるであろう。

このように、ある種の曲線を描くと直線になる特殊なグラフ用紙が市販されている。両対数グラフ用紙、正規確率紙、対数正規確率紙、2項確率紙、ワイブル確率紙などがある。大いに利用していただきたい。

さて、独立な乱数をいくつか発生し、その和をとると近似的に正規分布にしたがうことが知られている。これは中心極限定理によって説明される性質である。区間 $(0, 1)$ の乱数12個の和の分布を調べてみた。図7がその結果であるがどうやら正規分布のような形をしている。平均 $\mu=6.04$ 、標準偏差 $\sigma=1.04$ である。累積をとると、図8のように滑らかなS字カーブが観察できる。このグ

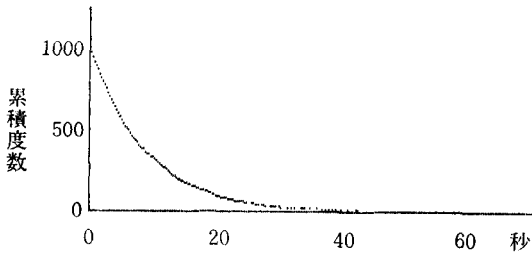


図 6 片対数グラフ用紙での累積度数

ラフを正規確率紙にプロットすると、図 9 のように一直線に並んだ。このグラフ用紙は正規分布の分布関数を描くと直線になるようにグラフ用紙の上と下の部分のスケールを引き伸ばしたものである。分布の母数 μ と σ もこのグラフから読み取ることができる便利なグラフ用紙である。

このような用紙を使えば、定規 1 本で累積曲線が描けるので、正規乱数も指数乱数も簡単に作り出すことができる。

参 考 文 献

- [1] 山内二郎編：統計数値表。日本規格協会 (1972)
- [2] 関根，高橋，若山：シミュレーション。日科技連 (1976)
- [3] 森村英典：おはなし OR。日本規格協会 (1983)

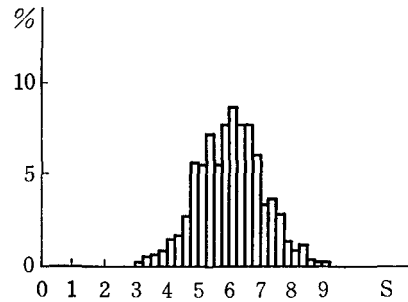


図 7 乱数12個の和の分布

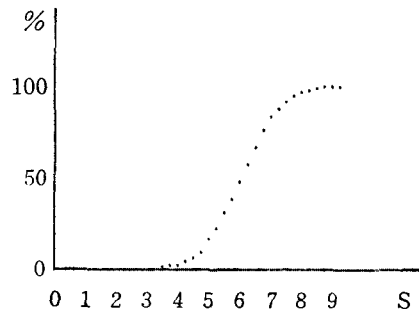


図 8 乱数12個の和の累積分布

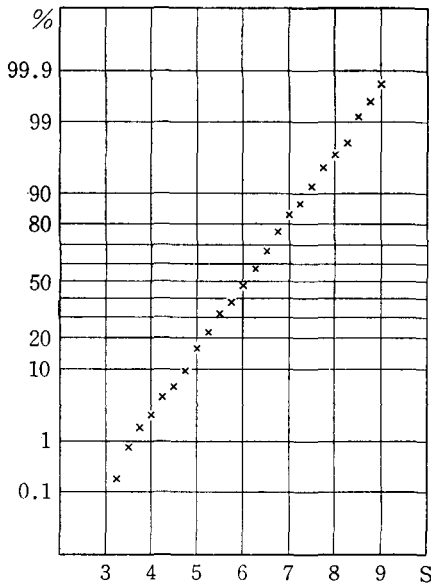


図 9 累積分布 (正規確率紙)