待ち行列と在庫 —流体近似—

森　雅夫　東京工業大学

箱でもシステムでも何でもよい．そこに，ある物が流れ込み，流れ出てゆくとすると，ある時点 t でその中に溜っている量は，明らかに

$$Q(t)=A(t)-D(t)+Q(0)$$

である．ここで $A(t)$ は時刻 t までの累積の流入量であり，$D(t)$ は累積の流出量である．これは箱が水槽であっても，貯金通帳であっても，デパートであっても，待ち行列システムであっても当り前のことである．G.F. ニューエルはこの当り前の関係を使って，ラッシュアワーによって生ずる待ち行列問題の絵解きを考えた．

いま，ある航空会社のエアバスに搭乗する客のチェックイン・カウンター前の混雑を見てみよう．このエアバスの定員は150人で，客の到着の様子について何日かデータを取ってみると，日によって多少の凸凹はあるものの，大体の様子は似たようなものである．これら何日か分のデータを平均し，それを滑らかにつなぐと，各時点での到着率曲線 $\lambda(t)$ が得られる．チェックイン業務は2人の係員が行ない，出発の20分前に開始する．平均的には，1分間当り2人で10人の客のチェックができる．

図1の下の図の $A(t)$ は到着率を累積したもので，(平均の) 累積到着数を表わす．カウンターからの累積の退去数 $D(t)$ は，$A(t)\geqq D(t)$ となることを考慮すると，図のようになる．$A(t)$ と $D(t)$ の (縦方向の) 差は，その時点におけるカウンター前の行列の長さ $Q(t)$ を表わす．サービスが先着順に行なわれる場合，$A(t)$ と $D(t)$ との横方向の差は，その時点に到着した客の待ち時間を表わす．日によって多少のバラツキはあろうが，毎日くりかえされる混雑の様子はこれで大体把握されよう．図から混雑が最も酷くなるのはどの辺りかなどもわかろう．

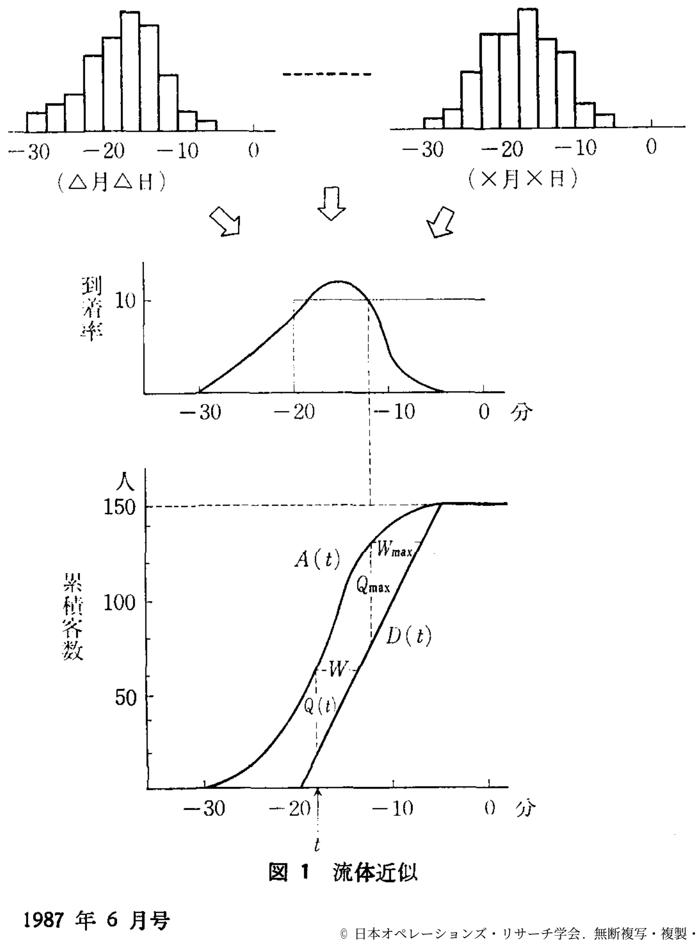

図 1　流体近似

さて，この航空会社ではエアバス客の需要が多いので，近い将来に定員が300人のエアバスを就航させるという．チェックイン業務において，係員をどの時点で，何人投入したらよいだろうか．少なくとも出発の5分前にはチェックインを完了しておきたいし，他の業務との関連で，開始もできるかぎり遅い方が望ましい．また，他の航空会社の受付とも重なるので，待ち客は精々50人くらいに抑えておきたい．

まず，到着曲線であるが，客全体が2倍となるとしても，客の来方のパターンは今とそう変わりがないと思ってよかろう．つまり，各時点毎の到着率をそのまま2倍しておけばよいであろう．これをもとにした累積到着曲線 $A(t)$ と，待ち行列は50人以内という制約からくる最遅の退去曲線 $D(t)=A(t)-50$ とを描き，その間に，可能なサービス率をもつ退去曲線を描いてみる (図2)．このようなグラフを描くことにより方

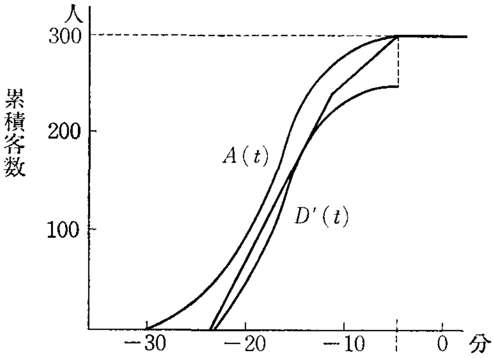

図 2　定員300人のときのチェック・イン業務（出発の23分前くらいから４人で受付け目途がついたら３人にする方策の場合）

策の評価ができるだろう．

ところで，*M*/*M*/1 のような定常的な入力をもつ通常の待ち行列に対して，上のような解析が意味をもつだろうか．到着率やサービス率だけでグラフを描くと**図 3** のようになり，話にならない．到着や退去のサンプルパスは**図 4** のように大きく変動している．ラッシュの場合，ある時間帯にわたって，もともと行列が長いので多少の変動は無視してかまわないだけのことである．*M*/*M*/1 の場合，(1)式の期待値をとると

$$EQ(t)=\lambda t-\int_0^t (1-p_0(s))\,\mu ds+Q(0) \qquad (0)$$

となる．このことから，“行列が０となる確率” $p_0(t)$ が無視できるかぎり，流体近似で考えてよいことになる．つまり，待ち行列の扱いにくさの本質はサーバーの“空き時間”にあることかわかる．

次に，以下のような在庫の問題を考えよう．ある大学のある学科ではコピー用紙がときどき足りなくなり，その購入管理が問題となっている．教官の仕事で突発的に多くの用紙を必要としたり，代理店に注文しても品不足や配達係の都合ですぐには間に合わないことも多い．そ

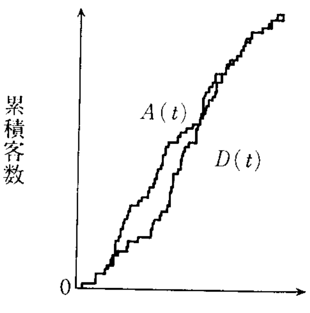

図 4　*M*/*M*/1 のサンプルパス（$\lambda=0.7$，$\mu=1.0$ のとき．60人分のシミュレーションを行なった例）

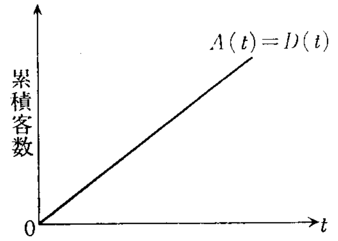

図 3　*M*/*M*/1 の流体近似（$\mu>\lambda$ のとき）

こで，１年間の購入計画を立て，次はいつ頃，およそどのくらい要るのだと，前もって代理店の担当者に話しておくと便宜をはかってくれることになった．注文をちょこちょこすると代理店が嫌がり，購入事務も面倒なので，できるだけ注文回数を少なくしたい．ただし，用紙保管のスペースは15箱分しかない（１箱2500枚）．

日々の用紙の使用量は前年の月毎の使用データから見積るものとした．その累積量が**図 5** の $D(t)$ である．（大学の決算の関係で１月分で締め切り，２月からは新年度分としている）．上に述べたような不測の事態に対処するために，半月分のバッファをもつこととした．

在庫の上限を考えた $D_1(t)=D(t)+15$ と，安全在庫レベルを考慮した $D_2(t)=D(t+0.5$カ月$)$ の間に常に在庫があるようにし，発注回数をできるだけ少なくするよう計画を立てると図５の $A(t)$ のようになる．もし，20箱置けるとしたら，発注回数がどのくらい少なくなるだろうか．

空港のチェックイン業務の場合は，到着曲線が与えら

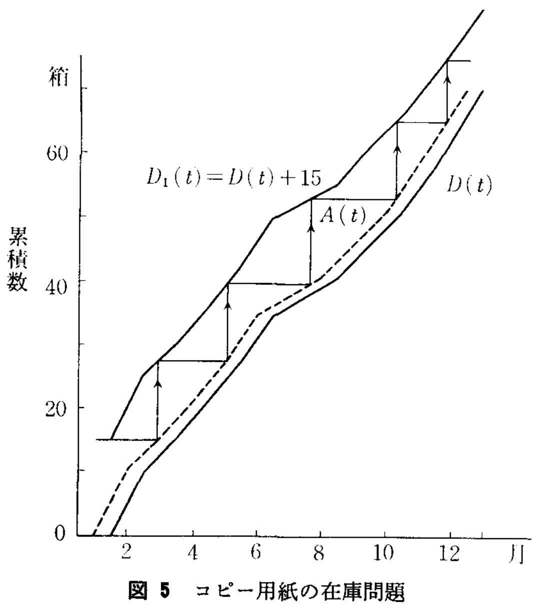

図 5　コピー用紙の在庫問題

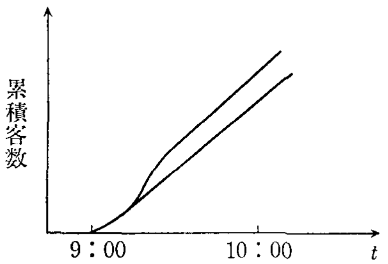

図 6　スキー場のリフト待ち時間

れて退去曲線をコントロールすることを考えた．在庫の場合は，退去に相当する需要曲線がまず推定されて，その上で発注による品物の到着曲線を決定している．これらの図をマイコンで描けるようにしておけば，可能な退去や発注の方策について検討することが容易にできるだろう．

このお正月10年ぶりにスキーに出かけた．スキー場はかなり込んでいたが，リフトに並ぶ行列の長さは1日中ほぼ一定していた(**図 6**)．待つ時間にして10～15分くらいであったろうか．これはリフトの利用客が，山の上から行列を見て，今すいているぞとか，少し込んできたからゆっくりしていようとかするために，自然と到着の仕方がコントロールされるからであろう．$\lambda(t)\doteqdot\mu$ で，必ずしもラッシュ的ではないのだが，流体近似がうまく使える例となっている．

累積分布関数の図的利用

若山　邦紘　法政大学

累積曲線の効用についてはこの特集号でいくつかのテーマがとりあげられているが，この稿では確率分布の累積曲線である**累積分布関数**の図的利用法について，①一様乱数から任意の分布にしたがう乱数への変換法，②標本分布から理論分布の当てはめ，にスポットを当てよう．

図 1を見られたい．乱数をいじったことのある人なら「乱数の変換の説明だな」とすぐに気づくことと思う．

実際，分布関数 $F(x)$ が連続関数であるとき，変数 x と u，確率変数 X と U の間に次のような関係を考える．

$$u=F(x),\quad U=F(X)$$

すると，U が u 以下である確率は，

$$Pr\{U\leqq u\}=Pr\{X\leqq x\}$$
$$=F(x)=u$$

となり，U は一様分布にしたがうことがわかる．このことから，区間 (0,1) の一様乱数 u を発生して，

$$u=F(x)$$

となる x を求めれば，x は分布関数 $F(x)$ をもつ確率変数の実現値とみることができる．

この原理は，離散分布の場合で考えた方がより直観的に理解できよう．**図 2**のように累積分布関数の縦軸の値 u をランダムに決め，どの階段に当たるかで x の値が決まる．x それぞれの値が出現する確率は対応する階段の高さに等しいのであるから理解しやすい．一般的には，

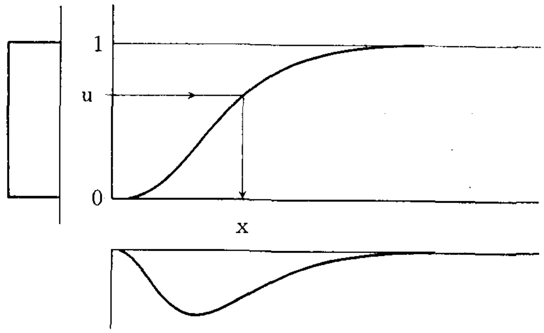

図 1　乱数の変換（連続分布の場合）

$Pr\{X=k\}=P_k(k=0,1,2,\cdots)$ としたとき，一様乱数 u に対して，

$$\sum_{k=0}^{x-1}P_k<u\leqq\sum_{k=0}^{x}P_k$$

となる x を見つければよい．

以上の方法は**逆関数法**と呼ばれ，一般的な乱数変換法の1つとして利用されている．この他には，棄却法，合成法などがある．また，いくつかの理論分布に対しては，その分布の特別な性質を利用した方法が考えられている．

［指数分布］　指数分布の分布関数は $F(x)=1-e^{-\lambda x}$ であるから，

$$u=F(x)=1-e^{-\lambda x}$$

の対数をとって整理すると，