

かめられる。

図8でラベルがついているのは、点4と点6であるから、これに点1を加えて、条件(1)の $i=1, 4, 6$ に対する式

$$\begin{aligned} x_{12} + x_{13} + x_{14} &= q, \\ (x_{46} + x_{47}) - (x_{14} + x_{84}) &= 0, \\ x_{67} - (x_{86} + x_{46} + x_{56}) &= 0 \end{aligned}$$

を辺々加えると、

$$q = (x_{12} + x_{13} + x_{47} + x_{67}) - (x_{84} + x_{86} + x_{56}) \quad (3)$$

となる。さらに、条件(2)より、

$$q \leq a_{12} + a_{13} + a_{47} + a_{67} = 100$$

を得る。図8の流れでは、 $q=100$ であるから、これは q を最大にする流れ、すなわち、最大流である。

参考文献

- [1] 真鍋龍太郎：最大流量の算法の最近の話題，オペレーションズ・リサーチ，25，12(1980)，772-779.
- [2] 古林隆：ネットワーク計画法，培風館，1984.
- [3] 伊理正夫他：グラフ・ネットワーク・マトロイド，産業図書，1986.

Voronoi 図と Steiner 木

伊理 正夫 東京大学

鈴木 敦夫 南山大学

1. Voronoi 図

平面上に与えられた n 個の点 (母点と呼ぶ) $P_1(x_1), P_2(x_2), \dots, P_n(x_n)$ に対して、平面上の任意の点がこれらの点のどれに一番近いかを一意に決めることができる。たとえば、 P_i が一番近い点であるような点の集合 V_i は

$$V_i = \bigcap_{j:j \neq i} \{x \in \mathbb{R}^2 \mid \|x - x_i\| < \|x - x_j\|\} \quad (1)$$

と表わされる ($\|\cdot\|$ は Euclid 距離)。 V_i は母点 P_i の Voronoi 領域と呼ばれ、 P_i の勢力圏と考えられる。

V_i は半平面の交わりであるから凸多角形であり、その辺を Voronoi 辺、頂点を Voronoi 点と呼ぶ。これからできるグラフを Voronoi 図という。隣接する

Voronoi 領域の母点どうしを結んでできるグラフ (Voronoi 図の双対グラフ) は一般に、 P_1, \dots, P_n の凸包の三角形分割になり、Delaunay 網と呼ばれる (図1)。

Voronoi 図と Delaunay 網は理論的にも興味深い性質を持つが、物理学、生態学、都市工学など多くの応用分野をもつ。たとえば、Delaunay 網は“最小角最大”三角形分割なので、数値計算にも有用であるが、最大空円や最小木 (図2) などの問題を解くための道具でもある。現在では非常に高速な構成算法が知られている[3]。

Voronoi 図は、次のような地理的最適化問題にも応用されている。

PI. 密度 $d\mu(x)$ で分布する利用者が一番近い施設 (母点) を利用するとき、利用者の総費用

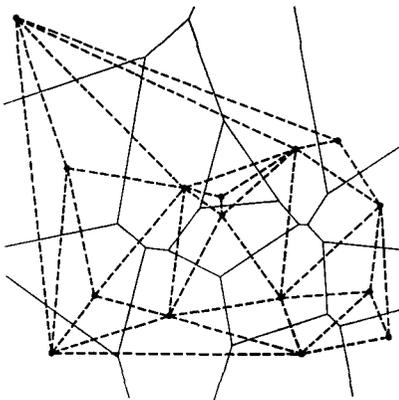


図1 15個の母点 (黒丸) に対する Voronoi 図 (実線) と Delaunay 網 (破線)

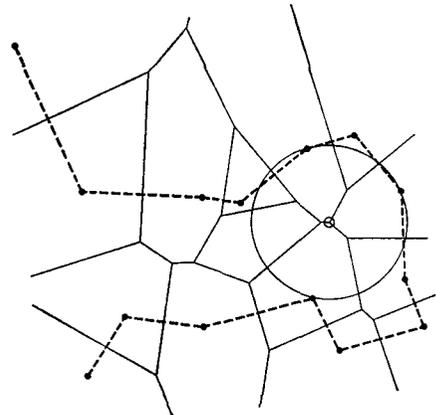


図2 図1の母点 (黒丸) を結ぶ最小木 (破線、Delaunay 網の一部になる) と最大空円 (中心は Voronoi 点の1つとなる)

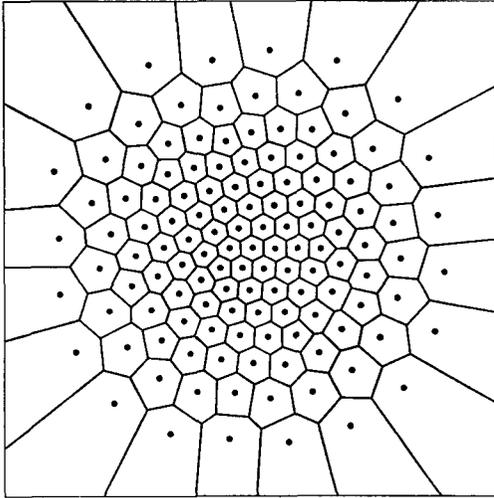


図 3 利用者が正規分布のときの施設の最適配置 ($n=128; f(t)=t$)

$$F(x_1, \dots, x_n) = \int f(\min_i \|x - x_i\|^2) d\mu(x) = \sum_{i=1}^n \int_{V_i} f(\|x - x_i\|^2) d\mu(x) \quad (2)$$

を最小にする問題 (図 3)。

PII. 与えられた平面の分割 $\{A_j\}_{j=1}^n$ を Voronoi 図 $\{V_i\}_{i=1}^n$ で近似する問題 \Rightarrow 両者の喰い違い量

$$F(x_1, \dots, x_n) = \sum_{i \neq j} \int_{A_j \cap V_i} d\mu(x) \quad (3)$$

を最小 (図 4)。

基本的な点の Voronoi 図は応用上の動機からいろいろと一般化されている。

(i) 円の Voronoi 図: 与えられた互いに重ならない n 個の円 C_i (中心 x_i , 半径 $r_i; i=1, \dots, n$) への近さによる平面の分割。

$$V_i = \bigcap_{j:j \neq i} \{x \mid \|x - x_i\| - r_i < \|x - x_j\| - r_j\} \quad (4)$$

で、双曲線で囲まれる領域となる (図 5)。

たとえば、ある商品の各店での割引額が r_i のとき、店までの交通費 (\propto 距離) と価格の和が最も小さい店を消費者が選ぶとすると、店の勢力圏は円の Voronoi 図になる。

(ii) 重み付き Voronoi 図 [1]: 一商品の価格はどの店でも同じであるが、単位距離あたりの配達料金 w_i が各店で異なっていて、距離に比例する配達料金をとられるとすると、地点 $P_i(x_i)$ にある店の勢力圏は、

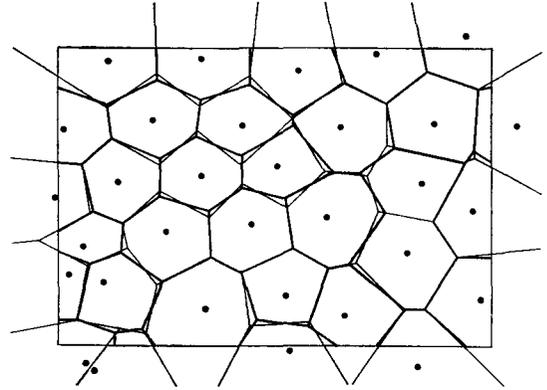


図 4 ある魚の縄張り図 (太線) を近似する Voronoi 図 (細線) [2]

$$V_i = \bigcap_{j:j \neq i} \{x \mid w_i \|x - x_i\| < w_j \|x - x_j\|\} \quad (5)$$

となる。 V_i と V_j の境界は、アポロニウスの円の一部になる (図 6)。重みの最も小さい母点の Voronoi 領域だけが無限領域になる。

w_i の逆数を各病院の“権威、評判”と考えれば、重み付き Voronoi 図は患者の心理を反映した病院の勢力圏モデルになるであろう。

(iii) 線分 Voronoi 図: 一平面上に与えられた n 本の線分 $S_i (i=1, \dots, n)$ への近さによる平面の分割 (図 7):

$$V_i = \bigcap_{j:j \neq i} \{x \mid d(x, S_i) < d(x, S_j)\}. \quad (6)$$

領域 V_i は直線分と放物線の一部とで囲まれる。

災害時の避難場所のような、多角形の施設の圏域解析

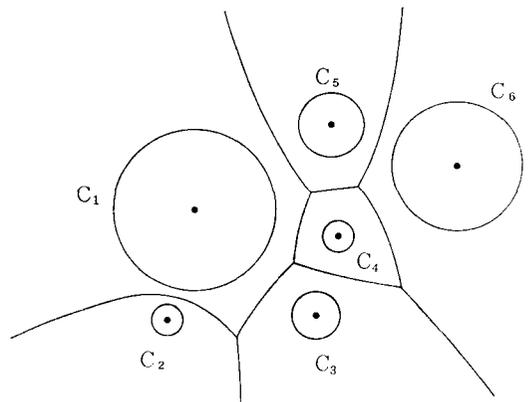


図 5 6 個の円に対する円の Voronoi 図

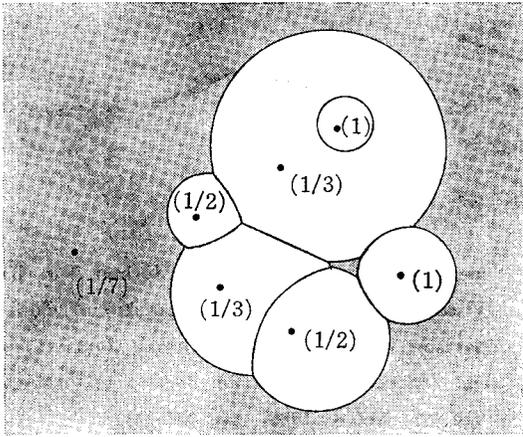


図 6 7 個の点 (黒丸; カッコ内の数字は重み w_i) に対する重み付き Voronoi 図

に応用される。線分 Voronoi 図は、線分からの等距離線、すなわち、道路や海岸線や多角形の建物からの等距離線の作図に役に立つ (図 7)。昔の地図に描かれていた“水線”は海岸線からの等距離線であった (図 8)。

2. Steiner 木

平面上に与えられた n 点 P_1, \dots, P_n を結ぶ総延長最

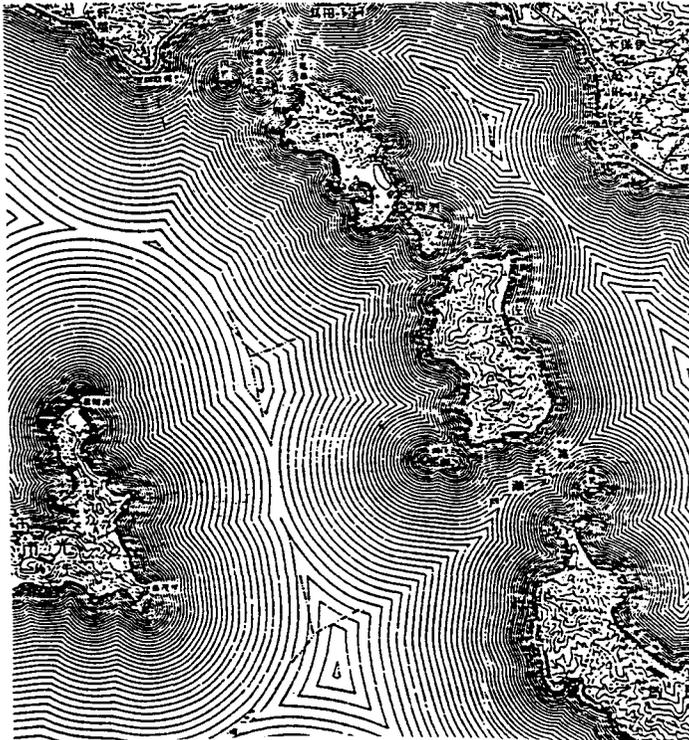


図 8 昭和初期の地図における“水線”

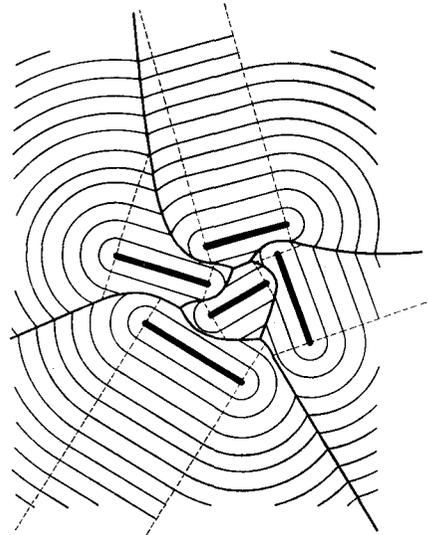


図 7 5 本の線分 (太線) の Voronoi 図 (中太線) と線分からの等距離線 (細線)

小のネットワークを作る問題を考える。図 9 は 3 点 P_1, P_2, P_3 を結ぶネットワークの例である。このとき、与えられた点以外に点 Q_1 (Steiner 点と呼ぶ) がつけ加えられている。Steiner 点では、必ず 3 本の枝が 120° で会している。

平面上に与えられた n 点 P_1, P_2, \dots, P_n に対して、適当に Steiner 点 Q_1, \dots, Q_m を加えて、 P_1, \dots, P_n を含む総延長最小の木を求める問題が (Euclid 平面上の) Steiner 問題である (図 10)。

これは“難しい問題”として有名で (NP 困難であることが証明済)、

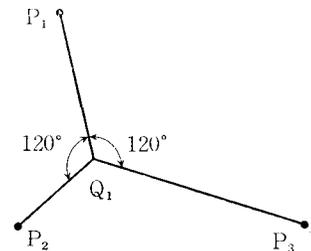


図 9 3 点に対する Steiner 木

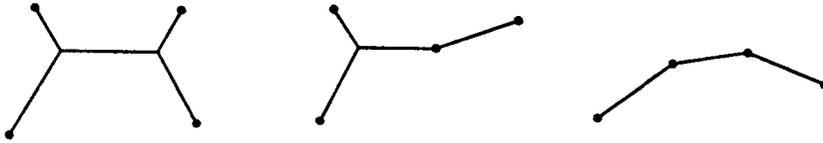


図10 いろいろな配置の4点に対する Steiner 木

いろいろな近似解法も研究されている (図11).

参 考 文 献

[1] F. Aurenhammer and H. Edelsbrunner: An Optimal Algorithm for Constructing the Weighted Voronoi Diagram in the Plane. *Pattern Recognition*, Vol. 17, No. 2 (1984) pp. 251-257.

[2] 伊理正夫, 腰塚武志, 他: 計算幾何学と地理情報処理. bit 別冊, 共立出版, 1986, 東京.

[3] T. Ohya, M. Iri, and K. Murota: Improve-

ments of the Incremental Method for the Voronoi Diagram with Computational Comparison of Various Algorithms. *Journal of the Operations Research Society of Japan*, Vol. 27, No. 4 (1984), pp. 306-337.

[4] A. Suzuki and M. Iri: A Heuristic Method for the Euclidean Steiner Problem as a Geographical Optimization Problem. *Asia-Pacific Journal of Operational Research*, Vol. 3, No. 2 (1986), pp. 109-122.

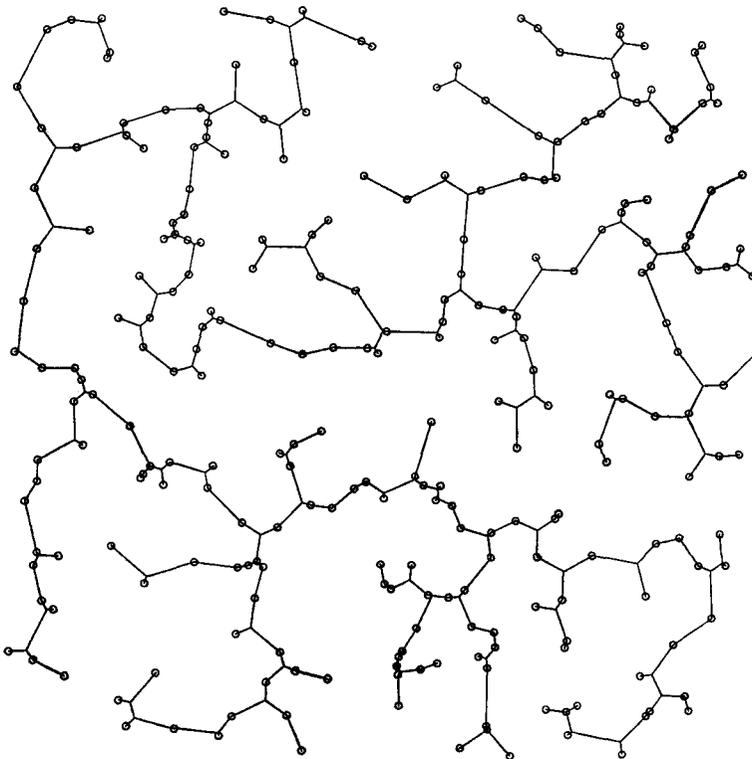


図 11 256点 (○印) に対する Steiner 問題の近似解の例 [4]