最大流問題

古林　隆　埼玉大学

枝（辺）に容量が与えられているネットワーク上で，ある1点から他のある1点へできるだけ多くのものを流せという問題を**最大流問題**(maximum flow problem)という．

1. 問題の定式化

点の集合を $N=\{1,2,\cdots,n\}$ とする．枝にはすべて向きがついていて，任意の2点の間に同じ向きの枝は高々1本しか存在しないものとする．点 i から点 j に向う枝を (i,j) で表わし，すべての枝の集合を B とする．枝 (i,j) には，**容量** (capacity) $a_{ij}(>0)$ が与えられていて，点 i からこの枝を通って点 j に流れる量は，a_{ij} 以下でなければならないとする．このとき，点1から点 n への最大流問題は，次のように表わされる．

条件

$$\sum_{j\in N_i^+} x_{ij}-\sum_{j\in N_i^-} x_{ji}=\begin{cases} q & (i=1), \\ 0 & (i=2,3,\cdots,n-1), \\ -q & (i=n), \end{cases} \quad (1)$$

$$0\leqq x_{ij}\leqq a_{ij} \qquad ((i,j)\in B) \qquad (2)$$

のもとで q を最大にせよ．

ここで，N_i^+ は，点 i から出ていく枝の先の点の集合を表わし，N_i^- は，点 i に向かう枝の根元の点の集合を表わすことにする（図1）．

x_{ij} は，点 i から枝 (i,j) を通って点 j に流れる量を表わし，q は，点1から点 n への総流量を示している．

2. 解法

この問題を解くには，$(x_{ij})=(0)$, $q=0$ から出発して，点1から点 n への路で，流量を増加できるものを1つ見つけて，そこにできるだけ多量に流すことをくりかえす．このような路を**流量増加路** (flow augmenting route) というが，これを見つけるには，点1からそこまで流量を増加できる点に順々に**ラベル**をつけていく．

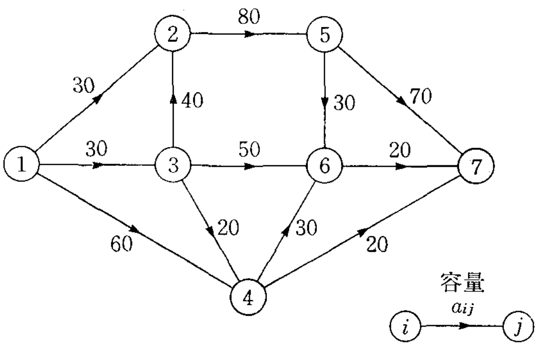


図1 N_i^+ と N_i^-

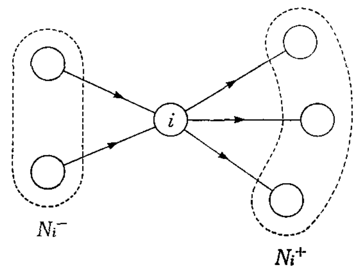


図2 ネットワークの例

図2のネットワークで考えることにしよう．

（Ⅰ）まず，点1から直接流せる点（N_1^+ に含まれる点），すなわち，点2，3，4に「1」というラベルをつける．次に，ラベルがついている点の中から1つ点 i を選んで，その点から直接流せる点で，まだラベルがついていない点に「i」というラベルをつける．点を選ぶときにいろんな方法が考えられるが，**FIFO** (First In First Out) のルールにしたがって，ラベルがついた順に選ぶことにする．

点2，3，4の順にラベルをつけたとすると，これらの3点の中ではまず点2が選ばれる，点2からは点5に流せるので，点5に「2」のラベルがつく，同様に，点3からは点6に「3」のラベルがつき，点4からは点7に「4」のラベルがつく．点7にラベルがついたので，ラベルを逆にたどることによって，流量増加路（1，4，7）が求められる（図3）．

点 i から直接流せる点で，まだラベルがついていないものが存在するかどうか調べて，存在すればそこに「i」のラベルをつけるのを点 i からの**探索** (search) また**走査** (scan) という．上に述べたように，ラベルがついた順に探索を行なうと，**広さ優先探索** (breadth first search) になるので，枝の本数が最小である流量増加路が求められる．

流量増加路が求められると，次は，そこに流せる量（の最大値）$\triangle q$を求める．$\triangle q$は，その路に含まれる枝の容量（すでに流れているときは，容量と流量の差）の最小値に等しい．図3の流量増加路では，

$$\triangle q=\min(a_{14}, a_{47})=\min(60, 20)=20$$

となる．そこで，この路に20だけ流すと，**図4**に示すように$q=20$の流れが得られる．

(Ⅱ)次に，この流れに対する流量増加路を見つけることにしよう．枝(4, 7)のように，容量一杯に流れている点もあるので，点iからの探索のときに，まだラベルがついていなくて，次の条件を満たす点jにラベル「i」をつける．

条件：$j \in N_i^+$かつ$x_{ij} < a_{ij}$.

また，すでにいくらか流すことにしている（x_{ij}が正である）枝では流量を減らすことも可能なので，次の条件を満たす点jには，ラベル「$-i$」をつける．

条件：$j \in N_i^-$ かつ $x_{ji} > 0$.

このようにしてつけたラベルを図4に示す．図3と異なるのは，点7のラベルだけである．図4では，

$$x_{47}=20=a_{47}$$

になったので，点4からの探索では，点7にラベルがつかなくなったが，それ以外は同じである．したがって，点1から点4までの探索をもう一度する必要はなく，図3で点7のラベルを消して，探索の順序が点4の次になっていた点5から探索をつづければよい．

図4に示した流量増加路(1, 2, 5, 7)に流せる量は，

$$\triangle q=\min(a_{12}, a_{25}, a_{57})=\min(30, 80, 70)=30$$

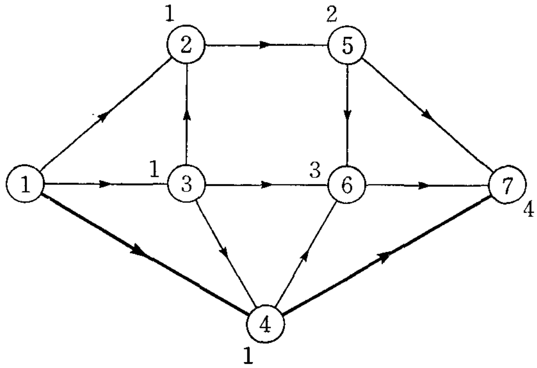
であるから，この路に30流すと，**図5**に示す$q=50$の流れが得られる．

(Ⅲ)図5では，

$$x_{12}=30=a_{12}$$

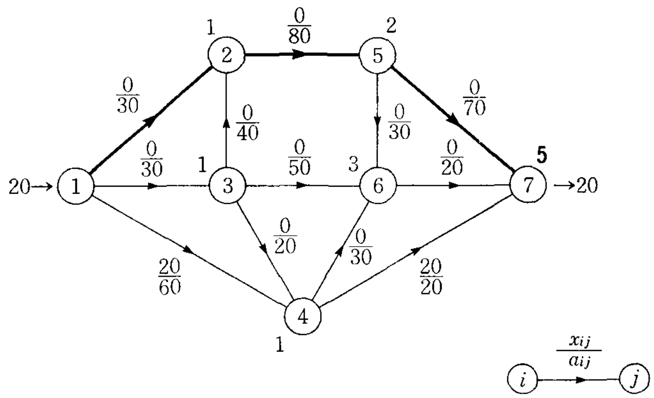
になったので，点2のラベルおよび点1より後の探索でついた点5，6，7のラベルを消して，点1の次（点3）から探索をやり直すと，流量増加路として(1, 3, 6, 7)が見つかる．ここに流せる量は，

$$\triangle q=\min(a_{13}, a_{36}, a_{67})=\min(30, 50,$$



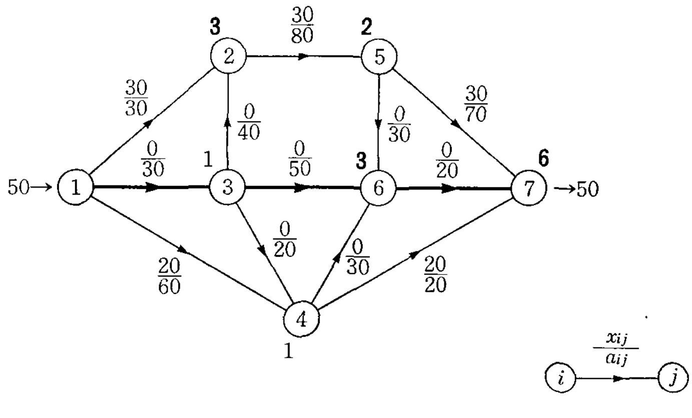
ラベルがついた順序：2，3，4，5，6，7
（下線は探索を行なった点を示す）

図 3　ラベルと流量増加路



太字のラベルはつけ直したことを示す
ラベルがついた順序：2，3，4，5，6，7

図 4　$q=20$に対する流れとラベルと流量増加路



ラベルがついた順序：3，4，2，6，5，7

図 5　$q=50$ に対する流れとラベルと流量増加路

20)=20

である．よって，$q=70$に対する流れが得られる（**図6**）．

(IV)図6では，

$$x_{67}=20=a_{67}$$

になったので，点7のラベルを消して，点6の次（点5）から探索をつづけると，**流量増加路**（1，3，2，5，7）が見つかる．(枝の本数は4になった.) 枝（1，3)，(2，5)，(5，7）にはすでに流れているので，この路に流せる量は，

$$\begin{aligned}\triangle q&=\min(a_{13}-x_{13}, a_{32}, a_{25}-x_{25}, a_{57}-x_{57})\\&=\min(30-20, 40, 80-30, 70-30)\\&=10\end{aligned}$$

である．よって，$q=80$に対する流れが得られる（**図7**）．

(V)図7では，

$$x_{13}=30=a_{13}$$

になったので，点3のラベルおよび点1より後の探索でついたラベルを消して，点1の次（点4）から探索をやり直す．点6からの探索で，

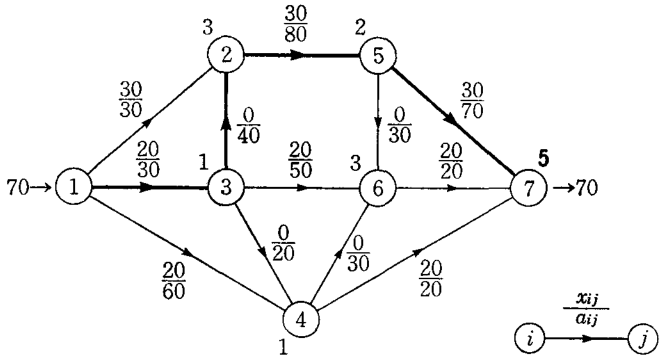
$$x_{36}>0$$

であるから，点3に「－6」のラベルがつく．

図7に示すように，流量増加路（1，4，6，3，2，5，7）が見つかるが，枝（3，6）の向きは，路の向きと逆であるので，流量を減らすことになる．この路に流せる量は，枝（1，4)，(4，6)，(3，2)，(2，5)，(5，7）におけるそれぞれの容量と流量の差と枝(3，6)の流量の最小値である．

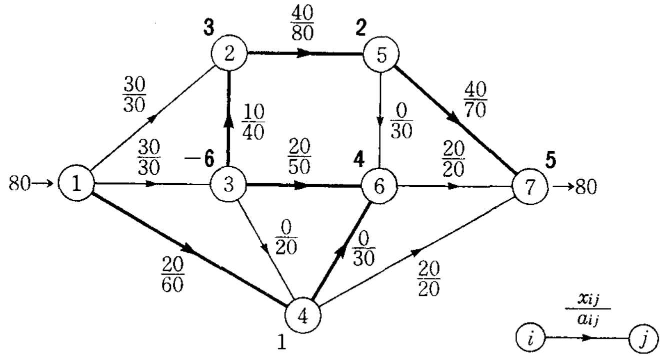
$$\begin{aligned}\triangle q&=\min(a_{14}-x_{14}, a_{46}-x_{46}, a_{32}-x_{32},\\&\qquad a_{25}-x_{25}, a_{57}-x_{57}, x_{36})\\&=\min(60-20, 30-0, 40-10, 80-40,\\&\qquad 70-40, 20)\\&=20\end{aligned}$$

この路の流量を20増加させる（枝(3，6)の流量は20減少させる）と，**図8**に示すように$q=100$に対する流れが得られる．



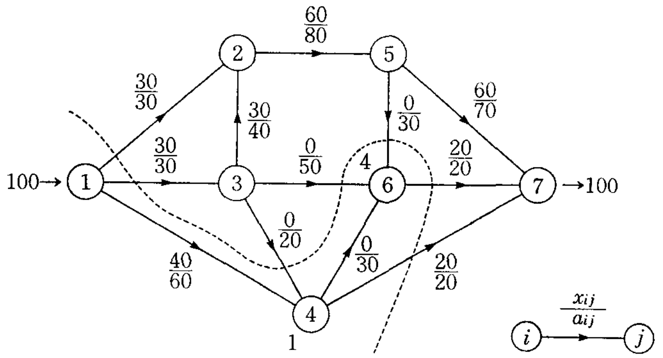
ラベルがついた順序：3，4，2，6，5，7

図6　$q=70$に対する流れとラベルと流量増加路



ラベルがついた順序：4，6，3，2，5，7

図7　$q=80$に対する流れとラベルと流量増加路



ラベルがついた順序：4，6

図8　$q=100$に対する流れとラベル

(VI) 図8で，$x_{36}=0$ になったので，点3のラベルおよび点4より後の探索でついたラベルを消すと，点4と点6のラベルだけが残るが，これらの点からの探索は終っているので，新たに探索ができる点は存在しない．これは，点1から流してきても，点4，点6より先に流せないことを示しているので，最大流を求める操作を終了する．

3.　最大流であることの証明

図8の流れが最大流であることは，次のようにして確

かめられる．

図8でラベルがついているのは，点4と点6であるから，これに点1を加えて，条件（1）の $i=1,4,6$ に対する式

$$x_{12}+x_{13}+x_{14}=q,$$
$$(x_{46}+x_{47})-(x_{14}+x_{34})=0,$$
$$x_{67}-(x_{36}+x_{46}+x_{56})=0$$

を辺々加えると，

$$q=(x_{12}+x_{13}+x_{47}+x_{67})-(x_{34}+x_{36}+x_{56}) \quad (3)$$

となる．さらに，条件（2）より，

$$q \leqq a_{12}+a_{13}+a_{47}+a_{67}=100$$

を得る．図8の流れでは，$q=100$ であるから，これは q を最大にする流れ，すなわち，最大流である．

参考文献

［1］ 真鍋龍太郎：最大流量の算法の最近の話題，オペレーションズ・リサーチ，**25**, 12(1980), 772-779.

［2］ 古林隆：ネットワーク計画法，培風館，1984.

［3］ 伊理正夫他：グラフ・ネットワーク・マトロイド，産業図書，1986.

Voronoi 図と Steiner 木

伊理　正夫　東京大学　　鈴木　敦夫　南山大学

1. Voronoi 図

平面上に与えられた n 個の点（母点と呼ぶ）$P_1(\boldsymbol{x}_1)$, $P_2(\boldsymbol{x}_2)$, …, $P_n(\boldsymbol{x}_n)$ に対して，平面上の任意の点がそれらの点のどれに一番近いかを一意に決めることができる．たとえば，P_i が一番近い点であるような点の集合 V_i は

$$V_i=\bigcap_{j:j\neq i}\{\boldsymbol{x}\in \boldsymbol{R}^2 \mid \|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}_i\|<\|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}_j\|\} \quad (1)$$

と表わされる（$\|\cdot\|$ は Euclid 距離）．V_i は母点 P_i の **Voronoi 領域**と呼ばれ，P_i の勢力圏と考えられる．

V_i は半平面の交わりであるから凸多角形であり，その辺を **Voronoi 辺**，頂点を **Voronoi 点**と呼ぶ．これからできるグラフを **Voronoi 図**という．隣接する Voronoi 領域の母点どうしを結んでできるグラフ（Voronoi 図の双対グラフ）は一般に，$P_1, \cdots, P_n$ の凸包の三角形分割になり，**Delaunay 網**と呼ばれる（図1）．

Voronoi 図と Delaunay 網は理論的にも興味深い性質を持つが，物理学，生態学，都市工学など多くの応用分野をもつ．たとえば．Delaunay 網は“最小角最大”三角形分割なので，数値計算にも有用であるが，最大空円や最小木（図2）などの問題を解くための道具でもある．現在では非常に高速な構成算法が知られている[3]．

Voronoi 図は，次のような**地理的最適化問題**にも応用されている．

PI. 密度 $d\mu(\boldsymbol{x})$ で分布する利用者が一番近い施設（母点）を利用するとき，利用者の総費用

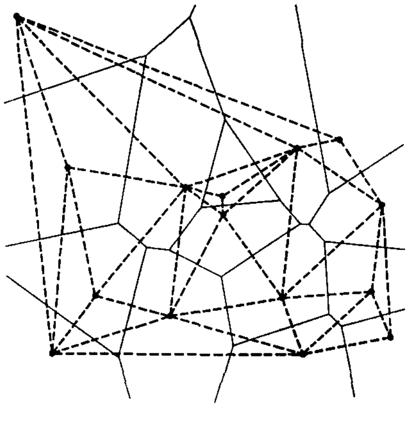


図1　15個の母点（黒丸）に対する Voronoi 図（実線）とDelaunay網（破線）

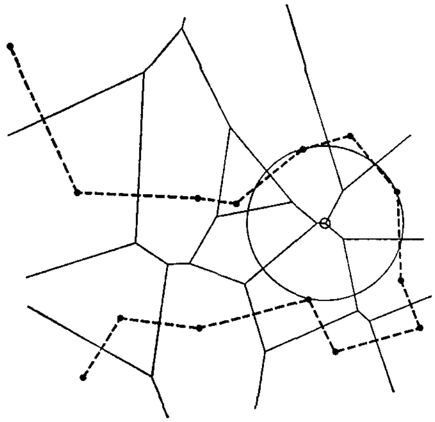


図2　図1の母点（黒丸）を結ぶ最小木（破線，Delaunay 網の一部になる）と最大空円（中心は Voronoi 点の1つとなる）