最　短　路　問　題

古林　隆　埼玉大学

枝（辺）の長さが与えられているネットワーク上で，ある一点から他のある一点に至る路のうち，長さが最短であるものを求めよという問題を**最短路問題**（shortest route problem）という．長さとしては，実在する道の物理的な長さだけでなく，そこを通るときの所要時間や品物を1単位運ぶときの輸送費をとることもある．

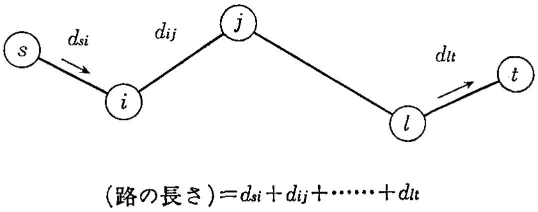


図 1　路

1.　最短路・最短距離の定義

与えられたネットワークの点の集合を$N=\{1,2,\cdots,n\}$とし，点$i(i\in N)$と1本の枝で直接結ばれている点の集合をN_iとする．すべての$i\in N$，$j\in N_i$に対して，点iから点jへそれらの間を結ぶ枝を通って進むときの長さd_{ij}が与えられているものとする．

$j\in N_i$であれば，$i\in N_j$であるから，d_{ji}も与えられているが，$d_{ij}\neq d_{ji}$でもよいことにする．また，一方向にしか進めない枝も考えられるので，d_{ij}，d_{ji}のうち一方は∞でもよいことにする．

点sと点i，点iと点j，…，点lと点tが，それぞれ枝で結ばれているとき，点sからそれらの枝を通って点tに至る路を

$$(s,\ i,\ j,\ \cdots,\ l,\ t)$$

で表わすこととし，その長さを

$$d_{si}+d_{ij}+\cdots+d_{lt}$$

とする(図1)．

点sから点tへの路の中で，長さ最小の路を点sから点tへの**最短路**といい，その長さを点sから点tへの**最短距離**(shortest distance)という．

2.　最短路・最短距離の性質

点sから点j $(j\in N)$ への最短距離が存在するとして，それをv_jとする．ただし，$v_s=0$とする．このとき，すべての$j\in N$に対して，次の(1)，(2)が成り立つ．

任意の$i\in N_j$に対して，

$$v_j\leqq v_i+d_{ij}. \qquad (1)$$

ある$i\in N_j$に対して，

$$v_j=v_i+d_{ij}. \qquad (2)$$

(1)，(2)は，あわせて，次のように表わすことができる．

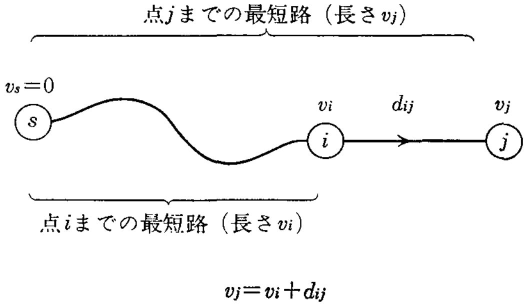
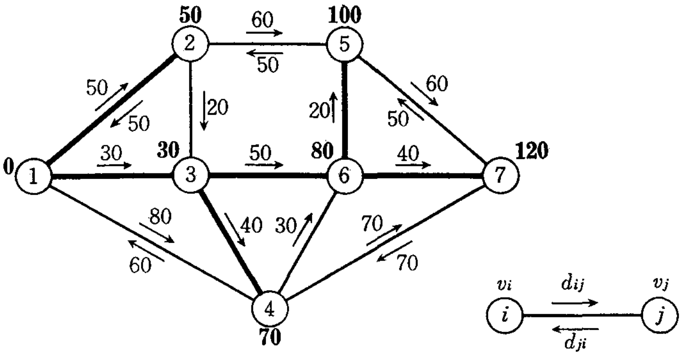


図 2　点jへの最短路

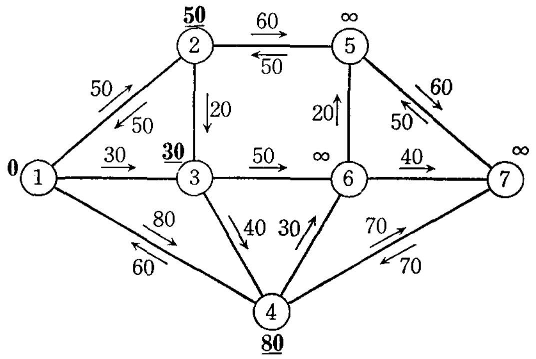
$$v_j=\min_{i\in N_j}(v_i+d_{ij}) \qquad (3)$$

$v_j=v_i+d_{ij}$であれば，点iは，点sから点jへの最短路上にあって最後に通る点である．また，$i\neq s$であれば，点sから点iまでの路は，点iまでの最短路である（図2）．



（長さが示されていない方向は，∞とする）

図 3　点1から最短路と最短距離



探索によって変更した v_j には下線をつけた．

図 4　点1からの探索

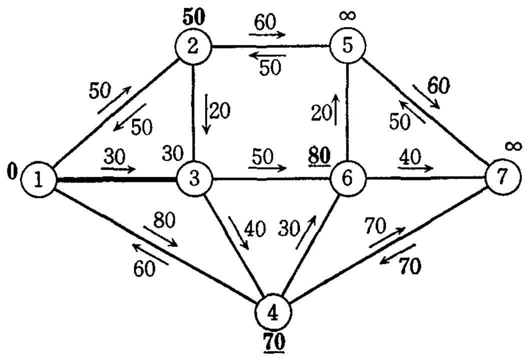


図 5　点3からの探索

図3に，枝の長さが与えられているネットワークの例を示す．図には，点1から点 j $(j=2, 3, \cdots, 7)$ への最短距離 v_j が示されている．

$$v_j = v_i + d_{ij}$$

である点 i と点 j を結ぶ枝は，太線になっているが，これをつなぐと，点1からの最短路になる．たとえば，点5への最短路は，(1, 3, 6, 5) である．

ここで，点1から他の点への最短路を構成する枝（太線で示されている枝）の集合に注目してみよう．「この集合に含まれる枝だけでは**閉路**を作れないが，これに含まれていない任意の枝をつけ加えると，閉路ができる」ことがわかる．たとえば，点2と点5を結ぶ枝を付け加えると，(1, 3, 6, 5, 2, 1) という閉路ができる．「　」内に示した性質を持った枝の集合を**木**という．したがって，最短路を構成する枝の集合は木になっている．

3. 解　法

以上の考察から，最短路問題を解くことは，(1)，(2) を満たす(v_j)および最短路を構成する木を求めることと考えてよい．そこで，はじめに，

$$v_s = 0, \quad v_j = \infty \quad (j \neq s)$$

とおいて，次に，一点 i を選び，

$$v_j > v_i + d_{ij} \tag{4}$$

であるすべての j に対して，右辺の値を v_j に代入することをくりかえす．この操作を点 i からの**探索**(search) または**走査** (scan) という．点 i の選び方によって，探索の回数が変るので，そこに工夫が必要になる．d_{ij} がすべて非負である場合を考えてみよう．

$$d_{ij} \geqq 0$$

であるから，点 i が点 j に至る最短路の途中の点であれば，

$$v_i \leqq v_j$$

である．たとえば，図3では，

$$v_3 \leqq v_6, \quad v_3 \leqq v_4, \quad v_6 \leqq v_5, \quad v_6 \leqq v_7$$

である．この性質を利用して，値の小さい方から v_j を確定して，その点から探索を行なうと，探索の回数を少なくすることができる．図3のネットワークに適用してみよう．

（Ｉ）　v_1 を0に確定する．

$v_j = \infty$ $(j=2, 3, \cdots, 7)$ として，点1からの探索を行なう．

$$v_2 = v_1 + d_{12} = 50,$$
$$v_3 = v_1 + d_{13} = 30,$$
$$v_4 = v_1 + d_{14} = 80$$

となる(**図4**)．

（II）　値が確定していない $v_j (j=2, 3, \cdots, 7)$ の中での最小値を求めると，$v_3 = 30$ であるから，v_3 の値を確定する（とともに，最短路(1, 3)も確定する）．次に，点3からの探索を行なうと，

$$v_6 = v_3 + d_{36} = 30 + 50 = 80,$$
$$v_4 = v_3 + d_{34} = 30 + 40 = 70$$

となる(**図5**)．

（III）　値が確定していない v_j $(j=2, 4, 5, 6, 7)$ の中での最小値を求めると $v_2 = 50$ であるから，v_2 の値を確定し，点2からの探索を行なうと，

$$v_5 = v_2 + d_{25} = 50 + 60 = 110$$

となる(**図6**)．

以下，**図7，8，9**にに示すように，点4，点6，点5の順に v_j の値を確定し，そこから探索を行なうと，すべての点への最短路・最短距離が定まる．（最短路を構成する木の最後の1本は，$v_7 = 120$ になったのが，点6からの探索であったことから求められる．）

上述したように，値が小さい方から v_j を確定して，

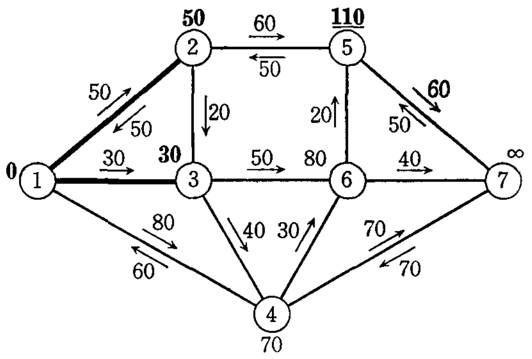


図 6　点 2 からの探索

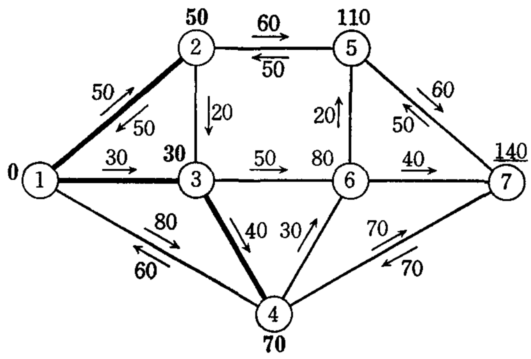


図 7　点 4 からの探索

その点から探索を行なうと，$(n-1)$ 個の点から 1 回ずつ探索を行なうだけでよい．この方法を**ダイクストラ法** (**Dijkstra's algorithm**) という．

輸送計画問題では，d_{ij} として点 i から点 j へ 1 単位の品物を運ぶときの輸送費をとることになるが，すでに定まっている計画に新たに追加する場合には，経路の変更により輸送量をいままでより減少させることも考慮にいれる必要がある．点 i から点 j への輸送量を減らすことは，点 j から点 i へ負の費用で輸送すると考えられるから，$d_{ji}<0$ となる．このように，枝の長さの中に負のものが存在すると，点 i が点 j に至る最短路の途中の点であっても，

$$v_i \leqq v_j$$

が成り立っているかどうかわからないから，値の小さい方から v_j を確定していくことはできない．そこで，一度探索を終った点 j でも，点 i からの探索で，(4) が成り立っていて，

$$v_j = v_i + d_{ij}$$

としたときには，点 j からの探索を改めて行なうことにする．

参 考 文 献

[1]　古林　隆：ネットワーク計画法，培風館，1984.

[2]　伊理正夫他：グラフ・ネットワーク・マトロイド，産業図書，1986.

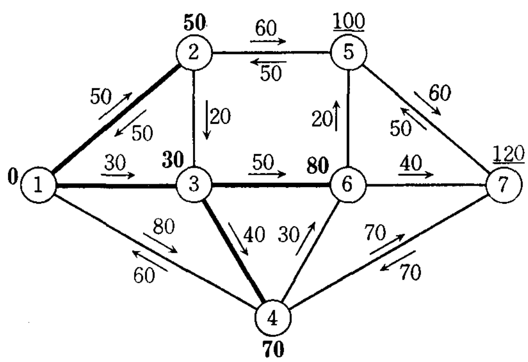


図 8　点 6 からの探索

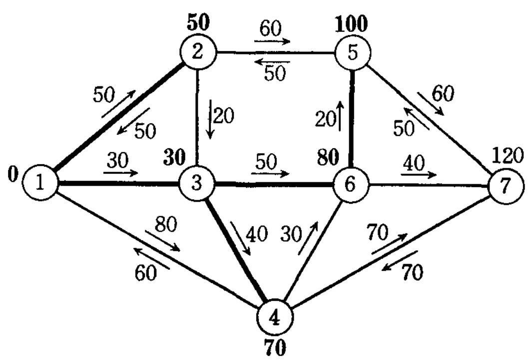


図 9　点 5 からの探索