Königsberg 7つの橋の問題

田口　東　山梨大学

多くの読者はグラフ理論の教科書（たとえば [3]）の最初に図1をご覧になったことがあると思う．これはKönigsbergの橋の問題と呼ばれる有名な問題を表わしたものである．その内容は，岸か島かのいずれか一つから出発して，川にかかっているすべての橋をただ一度だけ通って元へ戻る経路を見つけるというものである．この問題はEuler (1707～1782) によって次のように解かれ，それがグラフ理論の始まりであるとされている．図1の岸と島を頂点（点），橋を頂点間の枝（線分）として，図2のようなグラフで表わすことができる．元の問題は，このグラフを一筆書きできるかという問題になり，Eulerは一般に，グラフが連結で，しかも各頂点につながる枝の数がすべて偶数であるとき，一筆書き可能であることを示した．このようなグラフのことをオイラーグラフという．

一筆書きの経路は比較的容易に，枝の本数に比例する計算量で見つけることができる．また，枝を頂点に置き換えても，よく知られた問題が得られる．与えられたグラフのすべての頂点を一度だけ通って元へ戻る経路をHamilton閉路といい，これを見いだす問題である．そして，すべての頂点を通る最も短い経路を見いだす問題は，巡回セールスマン問題として有名である．これらの問題は一筆書きの問題と比較するとかなりむつかしく，多くの研究が行なわれてきた．それらについては適当な成書を参考にしていただくことにして，一筆書きが見いだした実用的な応用分野を述べよう．

計算機の出力装置として用いられるＸＹプロッターは大変よく普及している．この装置は，指定された2点間をパルスモータによってペンが直線的に移動し，そのさいにペンを上げて紙から離すか，下げて紙に押しつけるかによって，空送りをしたり直線を引いたりすることができる．標準的なプロッターのパッケージでは線分列を順に指定するが，もしも描こうとする図形がグラフとして与えられているとき，すなわち点とそれにつながる線分とがあらかじめ登録されているとき，描く線分の順序を上手に選ぶことによって，作図時間を短くすることができる．

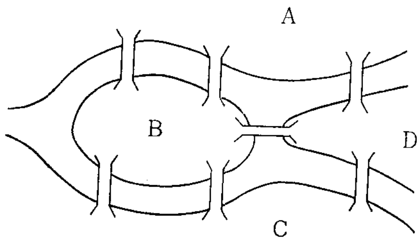

図 1　Königsbergの橋の問題

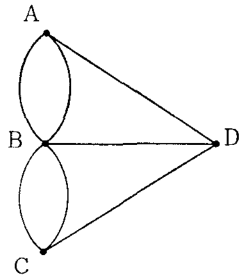

図 2　Königsbergの橋の問題のグラフによる表現

たとえば，ペンが1本の線分を描き終えた時，その点がまだ描いていない線分の始点であれば，その線分を続けて描くことによって，離れた点へ空送りしなくても作図を続けることができる．このようなことがうまくいくのは，その点につながる線分の数が偶数の場合である．したがって対象とする図形が，オイラーグラフであれば，オイラー路に沿ってペンを動かすことにより，無駄な動作をまったくせずに作図することができる．

一般の図形は連結ではなく，奇数本の線分がつながっている点がいくつもある．このような図形に対しては，必要なだけ空送りを行なうことになるが，2点間の空送りを，空送りの線分としてグラフに追加するものと考えると，得られるグラフはやはりオイラーグラフである．図3に示したように，異なる連結成分の頂点間に（連結成分数－1）本の空送りの枝を加えて連結化し，連結となったグラフの適当な頂点間に空送り線分を加えてオイラーグラフとするのが自然な手順であろう．作図時間を短くするには，空送りの線分の本数をできるだけ少なく，短くするとよい．容易にわかるように，連結なグラフに

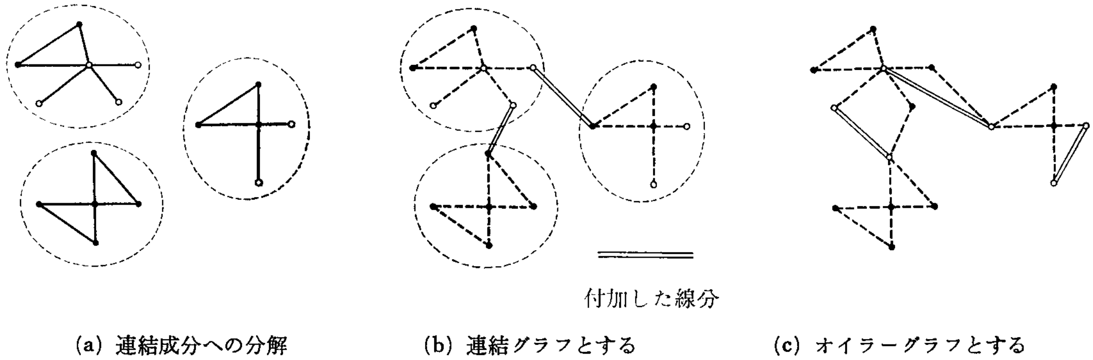

図 3 空送り線分の付加によるオイラーグラフへの変更

対しては，奇数次数の頂点（必ず偶数個ある）を対として，その間に空送りの線分を加えることによって，最小回数の空送りですみ，さらに，空送り線分の長さの和を最小にすることによって，無駄なペンの移動量を最小にすることができる．これは最小重み完全マッチング問題を解くことに他ならない．この問題の厳密解は，頂点数の3乗に比例する計算量で求めることができる．

しかし，たかがプロッターの前処理にしては，おおげさで実用的でないので，重みが2点間の距離であるという特別な性質（平面マッチング問題）を利用した近似算法がいくつも提案されている[2]．その中で，本学会でも盛んに研究発表され，平易でしかも性能のよい算法がある[4]．代表的な例を，簡単に述べると，まず平面を**図4**のような正方形（バケット）に区切り，点をそれぞれのバケットに割り振る．次に，バケット内で点の対を作り，余った点については，あらかじめバケットにつけられた順序にしたがって，出会った順に点の対を作る．連結化の算法もバケットを用いた類似の算法が提案されている．近似解法のよさとあいまって，この手法はわずかの計算量の前処理で，簡単な図形に対してさえも大きな効果を上げる．しかし，入力がグラフでなければならないので，残念ながら標準のプロッターパッケージまでには普及していない．一方，平面マッチング問題以降，同じグループによって精力的に計算幾何学の分野の問題に関する算法が提案され，そのさいにバケット法が強力な道具として用いられていることは，この分野に興味をおもちの読者はよくご存じであると思う[1]．

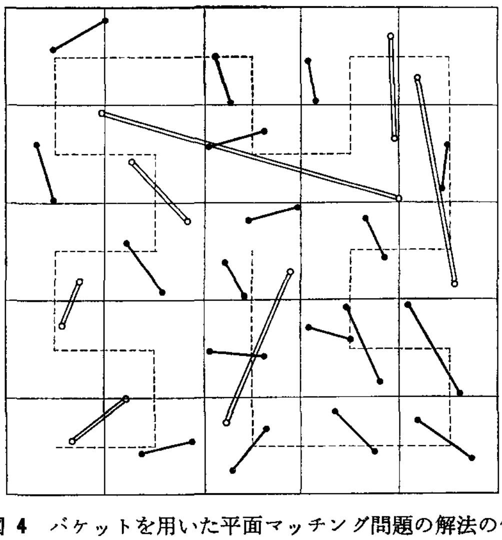

図 4 バケットを用いた平面マッチング問題の解法の例

参考文献

[1] Asano, T., Edahiro, M., Imai, H., Iri, M., and Murota, K.: Practical Use of Bucketing Techniques in Computational Geometry. *Computational Geometry*, G. T. Toussaint (ed.), North-Holland (1985).

[2] Avis, D.: A Survey of Heuristics for the Weighted Matching Problems. *Networks*, Vol. 13, (1983) pp. 473-493.

[3] Harary, F.: *Graph Theory*. Addison-Wesley (1971).

[4] 室田一雄：平面マッチング問題の近似解法．オペレーションズ・リサーチ，第31巻，第1号(1986), pp. 14-20.