

# ロジスティック曲線

小林 龍一 立教大学

成長曲線には有名なものは2つある。ロジスティック曲線とゴンベルツ曲線である。ここではロジスティック曲線を取り扱う。

ロジスティック曲線は、一口に言えば流行現象を支配する微分方程式の解と言うことになる。これを以下に説明しよう。

まず、流行現象とはなにか。これは次のように考えられよう。

- (1) まず、誰か好奇心の強い人がその商品またはサービスを買う。または発売元が宣伝広告して売る。
- (2) 買った人がその商品またはサービスを利用しているのを、観察している若干の人がいて、その中のある比率の人がその商品またはサービスを買う。
- (3) その商品またはサービスは一度買うと滅失しないものとする。

以上の仮定のもとで問題を数式化する。時間を  $t$  で表わし、 $x$  を時刻  $t$  の時点でその商品またはサービスの売れた数（累積）とする。時刻  $t$  で単位時間に売れるその商品の個数は  $dx/dt$  で表わせる。すると、まず流行の初期の段階では以下の微分方程式が成り立つ。

$$\frac{dx}{dt} \propto x \quad (1)$$

次に流行現象が進んでほとんどの買う可能性のある人がほとんど買ってしまった状態を想定する。このとき最終的にこの商品またはサービスを買う人の数を  $a$  とする（この値は未知であるが）。すると以下の微分方程式が成り立つ。

$$\frac{dx}{dt} \propto (a-x) \quad (2)$$

この2つの微分方程式を統合して流行現象の全期間で成り立つ単一の式は、この2式をもとに以下のように想定できよう。

$$\frac{dx}{dt} \propto x(a-x) \quad (3)$$

(3)式をよく検討すると時刻  $t$  が小さい時には(1)式と同等であり、時刻  $t$  が大きい時は(3)式と同等になることは明らかである。では、時刻  $t$  が中間的な値の時はどうか。これはまったくわからないが、(3)式の右辺の式は

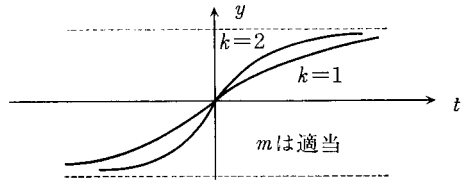


図1 ロジスティック曲線

この微分方程式の解の範囲でその符号を変えたり無限大になったりしない穏やかな関数であるので、初期の解つまり(1)式の解と終期の解つまり(3)式の解を滑らかにつないでくれるであろう。

比例定数を  $k$  とすると、(3)式は以下のように表わせる。

$$\frac{dx}{dt} = kx(a-x) \quad (4)$$

これを解く(変数分離法による、たとえば参考文献[1] 4, 5頁)。

$$\frac{x}{a} = \frac{1}{1+me^{-akt}} \quad (5)$$

ここで  $m$  は積分定数である。これをグラフ化すると図1のようなになる。

実際にデータをもとに定数  $a$ ,  $k$ ,  $m$  を推定するには微分方程式(4)をまず、

$$\frac{1}{x} \frac{dx}{dt} = k(a-x) \quad (6)$$

と直し、これを近似的に差分方程式に直す。

$$\frac{\Delta x}{x} = ka - kx \quad (6)$$

ここで  $\Delta$  は差分を表わす。この差分方程式と、過去のデータ ( $n$  個) から表1のようなデータ表を用意し、単回帰分析の手法によって決定する。ただしここで  $y$  は、

表1 データ

番号 $i$	$x$	$y$
1	$x_1$	
2	$x_2$	$y_2$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
$n-1$	$x_{n-1}$	$y_{n-1}$
$n$	$x_n$	

$$y_i = \frac{x_{i+1} - x_{i-1}}{2x_i} \quad (i=2, 3, \dots, n-1)$$

である。

このデータ表の第2列の第2行から第  $n-1$  行までのデータを利用して単回帰分析

$$y = \alpha + \beta x$$

を行なう。すると  $\alpha = ka$ ,  $\beta = -k$  として  $k$  と  $a$  が求まる。この後で(5)式を2, 3の  $x$  値に対して使って  $m$  を計算し、その平均値で  $m$  の値を推定する。(たとえば参考文献[2] 85-92頁)

### 計算法の改善

ここで第2列は差分なので普通の差分公式だと最初と最後の数が空欄となる。これはコラッツの方法(参考文献[3] 92頁)を使用すれば埋めることができる。また、パラメータの推定に普通の単回帰分析を用いなくて、加重回帰分析(参考文献[4] 53頁)を使用し、最近のデータに重みを大きく掛けて使用するとよいのではないだろうか。

### モデルの検討と改良

モデルの仮定は上述の(1~3)である。仮定(1)は変える必要はないであろうが、(2), (3)は変えるのも意味のあることである。たとえば(3)は適当な時間の関数を与えるとか、場合によっては  $x$  の関数にすることもよいかも知れない。また、他に競合商品がある場合とか、共存商品(パンとバターのように相手が売れると自分も売れやすくなるもの)がある時は、その商品との連立微分

方程式を同じように立てて解くことも考えられよう。

### 応用分野

このモデルは本来は流行現象に適用するためのものである。しかしある製造業では、製品のライフサイクルの予測にこの成長曲線の当てはめを使用し、次期の新製品の発売時期の決定の参考にしてしている。また、ある建設会社ではいろいろの工法を開発または外から導入し工事に活用しているが、だんだん他の方法に押されて使われなくなるので、これをこの手法で予測して、ある程度使われなくなった工法は再度研究して改良し(こうするとまた使用される)工法の再活性化をはかっている。

### まとめ

ロジスティックはモデルが単純であるから、これを元にして大きな研究分野が開けるということはないが、きわめて基本的なモデルであるから、これを改善していろいろの局面によくフィットするモデルを作成することは可能であろう。皆さんが試みてくださるとよいと考えている。ORでも時々基本に立ち帰り、このような問題の研究と活用をして実学の実を上げたいものである。

### 参考文献

- [1] 小林龍一 OR概論 共立出版
- [2] 小林龍一 需要予測の数学 至文堂
- [3] 小林龍一 社会科学の為の数学概説 共立出版
- [4] 佐和隆光訳 回帰分析の実際 新耀社

## 報文集価格表 (会員価格)

T-76-1	オペレーションズ・リサーチのためのデータとプログラムに関する研究	4000円
T-77-1	システムダイナミックス——方法論と適用例	2500円
R-79-1	「ORの実践とその有効活用」視察団報告	1200円
R-82-1	「欧州におけるOR実施状況」視察団報告書	1200円
T-73-1	ネットワーク構造を有するオペレーションズ・リサーチ問題の電算機処理に関する基礎研究	1200円
T-83-1	地理的情報処理に関する基本アルゴリズム	6000円
R-84-1	「米国におけるORの実践」視察団報告書	1200円
T-86-1	「南北協力の新しい戦略——マイクロ電子技術を起爆として——」	3500円