もちろん個々の問題によって異なり，絶対的な基準というものはありえないが， Knuth はごく大まかな基準として $\log_2 \nu_k \geq 30/k$ $(2 \leq k \leq 6)$ を挙げている．この規準に合格するためには，M は 2^{80} 程度以上に選ぶ必要がある．パーソナル・コンピュータのBASICの関数として提供されているRND の内部の整数演算は 16～24 ビット程度の桁数で行なっているものが多いようであり，桁数不足であるといえよう．図1の (5), (6) は，市販されている（または，いた）ものの中で，特に悪いものの例である，

4. その他の乱数発生法

合同法乱数の多次元疎結晶構造は，1周期中に同一の数が現われないという性質に由来するものであり，この性質は漸化式 (1) の次数が1であることから生ずるものである．そこで，高次の漸化式を用いる方法もいろいろ提案されているが，それらの理論的性質については，未だよくわかっていないことが多い．（M系列にもとづく方法については，ある程度の解明はされている．これについては，たとえば [1] を参照されたい．）

参考文献

[1] 伏見正則：擬似乱数は信用出来るか．日本OR学会第16回シンポジウム「シミュレーション」予稿集，1986, pp. 38–49.

[2] Knuth, D. E.: *The Art of Computer Programming*, Vol.2 : *Seminumerical Algorithms*, 2nd ed., Addison-Wesley, Reading, Mass., 1981.（渋谷政昭(訳)：準数値算法/乱数，サイエンス社，1981.）

Lanchester の法則

岸　尚　防衛大学校

性能・装備が伯仲する赤軍の戦艦5隻と青軍の戦艦3隻とが洋上で相見えたとする．3隻は5隻に比べ数の上でいささか劣ってはいるが，結果はどうだろうか？

1921年のワシントン軍縮条約でわが国の主力艦はアメリカの6割と決まり，海軍の内外に危機感が拡がったが彼らの絶望は3隻の戦艦は5隻の前に鎧袖一触という認識のゆえであった．それは赤軍の5隻は1隻を失うのみで青軍のすべてを屠り去ることを予言するN自乗法則にもとづいていた．

N自乗法則なるものを提案したのは F.W. Lanchester である．Lanchester は英国人．自動車産業の揺籃期に育ち，数々のすぐれた自動車を設計・製作した．自動車技術者でありながら飛行機の研究に対する夢やみ難く，独力の研究は翼揚力理論にその名を残すことになる．彼はまた飛行機の軍事利用にも関心を示した．1916年1冊の本を著し，その1章を交戦の数学モデルにあてた．Lanchester の交戦モデルや，これと類似の Fiske モデルはいち早くわが国に伝えられ，京都大学教授野満隆治がこれに興味を抱いて海軍軍人を啓蒙したようである．軍縮論議の基礎をなす重要なセオリーとなったN自乗法則は今日では Lanchester の2次法則と呼ばれている．

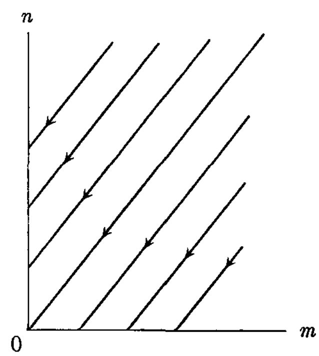

図1　1次法則

交戦の間にどのように損耗が発生するかを描写するモデルには精疎さまざまのものが案出されてきたが，古典的でありながら捨てがたい存在がLanchester の2つのモデルである．

1. 1次法則

赤軍の兵力数を適当な単位で測ってm，青軍のそれをnで表わす．両軍に発生する損耗が微分方程式

$$\begin{cases} dm/dt=-A \\ dn/dt=-B \end{cases}$$

を満たすと考える．ここに右辺のAおよびBは両軍の兵力単位数の他，両軍の装備，士気，指揮官の意図，用兵の巧拙，戦場の地形，天候気象などさまざまの要因によって決まり，一般に時間とともに変化するが，a，bを正の定数として

$$A/B=a/b \qquad (2)$$

という関係を満たすものとする．(1)，(2)より独立変数tを消去すると

$$dm/dn=a/b \qquad (3)$$

となり，積分すると

$$b(m_0-m)=a(n_0-n) \qquad (4)$$

を得る．ここに m_0 および n_0 は交戦開始時，$t=0$，における赤軍および青軍の兵力単位数である 式(4)は兵力単位数 m,n の1次式だからLanchesterの1次法則と呼ばれる．

式(3)の dm はある微小期間に発生する赤軍の損耗，dn は同じ期間の青軍の損耗だから，式(3)または1次法則(4)が述べていることは，両軍に発生する損耗が，交戦進展の間，一定の比例関係にあるということである．**図1**に両軍の兵力単位数の組 (m,n) が時間の経過にしたがってどのような関係を保ちながら変るかを図示した．軌道は図のように直線となる．これが1次法則の特徴である．

彼我の損耗を見積もるためのこのようなモデルは規模の大きい交戦に対して利用することもできるし，局所的な小戦闘に対して利用することもできる．ただし，極端に小さい戦闘に関しては確率論的な取扱いが必要となる．大規模の交戦に関しては，交換比a/bを見積もることがむずかしいし，a,b が長い期間にわたって一定という条件も満たされないので，損耗の見積もりは粗いと覚悟しなくてはいけない．両軍が互いに相手の火砲の射程内にあって，盲撃ちで戦っている小規模の交戦が代表的な適用例であろう．

2. 2次法則

赤軍の兵力単位数m，青軍の兵力単位数nが次の微分方程式にしたがって減耗してゆくものと仮定する．

$$\begin{cases} dm/dt=-An \\ dn/dt=-Bm \end{cases} \qquad (5)$$

ここに右辺の A,B は時間的に変化してもいいが，それらの比は一定とする：

$$A/B=a/b \qquad (6)$$

式(5)，(6)から独立変数tを消去すると

$$dm/dn=an/bm \qquad (7)$$

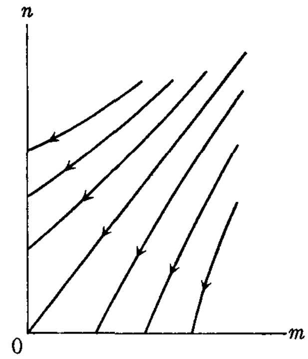

図 2 2次法則

となり，積分すると

$$b(m_0^2-m^2)=a(n_0^2-n^2) \qquad (8)$$

が得られる．式(8)は兵力単位数m,nの2次式だから，Lanchesterの2次法則と呼ばれる．

交換比 a/b が1に等しい交戦が，一方，たとえば青軍の側が0になるまで続いたとする．そのとき赤軍の残数mは

$$m^2=m_0^2-n_0^2$$

によって与えられる．$m_0=5, n_0=3$ とすると $m=4$．この例は，しかし，兵力単位数が非常に小さいのでいい適用例とはいえない．確率論的に取扱うべきであろう．

式(8)を変形すると

$$\frac{m_0-m}{n_0-n}=\frac{a}{b}\,\frac{n_0+n}{m_0+m} \qquad (9)$$

という形となり，赤軍，青軍に発生する損耗の比は，1次法則の場合とは違って，一定ではなく交戦の進行にしたがって変化する．一方，たとえば，青軍の指揮官は大兵力 n_0 を思いきって投入することにより，赤軍に対して相対的に大きい損耗を強いることができる．すなわち，2次法則は兵力集中の原則を表わしている．式(8)を用い，**図2**に両軍の兵力単位数の組 (m,n) が時間の経過にしたがってどのように変化するかを示した．初期兵力単位数が均衡の条件

$$bm_0^2=an_0^2$$

を満たしている場合，軌道は原点に終る半直線であるが，その他の場合，軌道は曲線である．点 (m,n) は軌道上を進むにしたがい，上記の均衡直線から次第に離れる．これは，はじめ勝敗の別が定かでない交戦が，進展に従ってその帰趨が漸次明確になってゆく様子を表わしている．

赤軍，青軍が互いに相手の火砲の射程内にあって互いに狙い撃ちをし合っているような交戦の損耗はLanchesterの2次法則にしたがうだろう．