Kuhn-Tucker の最適性条件

小島　政和　東京工業大学

Kuhn–Tucker 条件（原論文[1]）は，非線形計画問題の最適性のための必要条件であり，非線形計画法の理論の中心に位置し，感度分析，解の安定性等の研究の基礎になっている．ここでは以下で与える不等式条件付の問題に対する Kuhn–Tucker の最適性条件について簡単に説明する．

非線形計画問題

目的　$f(x)$　→　最小化

条件　$g_i(x) \leqq 0 \quad (i=1,2,\cdots,m)$

ただし，

$x=(x_1,x_2,\cdots,x_n)$：n 次元ベクトル変数．

f，g_i：微分可能な実数値関数．

f を目的関数，条件を満たす x の集合を許容領域と呼ぶ．f と g_i のグラジェント・ベクトルを

$$\nabla f(x)=(\partial f(x)/\partial x_1,\cdots,\partial f(x)/\partial x_n),$$

$$\nabla g_i(x)=(\partial g_i(x)/\partial x_1,\cdots,\partial g_i(x)/\partial x_n)$$

で表わすと，x^* がこの問題の最小点であれば，以下の条件を満たす．

Kuhn–Tucker の最適性条件

ある $y_i\ (i=1,2,\cdots,m)$ が存在して

$$\nabla f(x^*)+\sum_{i=1}^{m} y_i \nabla g_i(x^*)=0$$

$$g_i(x^*) \leqq 0 \quad (i=1,2,\cdots,m)$$

$$y_i \geqq 0 \quad (i=1,2,\cdots,m)$$

$$y_i \cdot g_i(x^*)=0 \quad (i=1,2,\cdots,m)$$

y_i はラグランジュ乗数と呼ばれる．また，最後の条件 $y_i \cdot g_i(x)=0\ (i=1,2,\cdots,m)$ は各 i に対して，

$y_i=0$　または　$g_i(x)=0$

の少なくとも，いずれか一方が成り立つことを意味しており，“相補性条件”と呼ばれることも多い．

簡単な例をあげて，最適性条件を図示しよう．

例題　$n=2$，$m=3$

目的　$f(x)=0.2(x_1^2+x_2^2)$ → 最小化

条件　$g_1(x)=0.2(x_1-6)+0.2(x_2-4)^2 \leqq 0$

$g_2(x)=0.2(x_1-6)^2+0.2(x_2-2)^2-3.2 \leqq 0$

$g_3(x)=x_2-5 \leqq 0$

ただし，

$x=(x_1,x_2)$：2 次元変数ベクトル

図 1 に示したように，3 つの不等式条件を満たす点 $x=(x_1,x_2)$ は 3 本の曲線

$$\{x=(x_1,x_2) : g_i(x)=0\} \quad (i=1,2,3)$$

で囲まれた領域になる．これらの曲線を対応する関数 g_i が値 0 をとる等高線と考えると，等高線上の点 x での最大傾斜方向，すなわち，接線の法線を引いて関数が増加

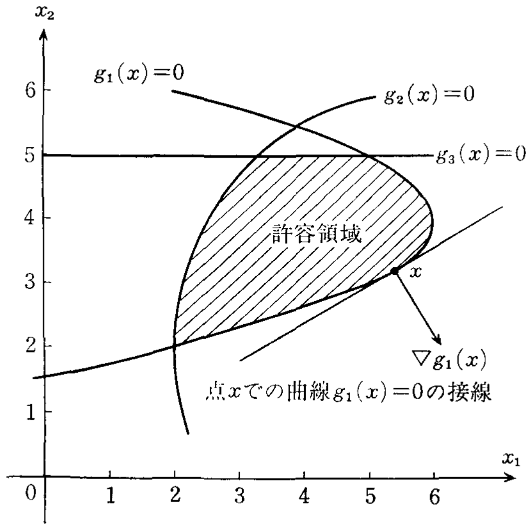

図 1　許 容 領 域

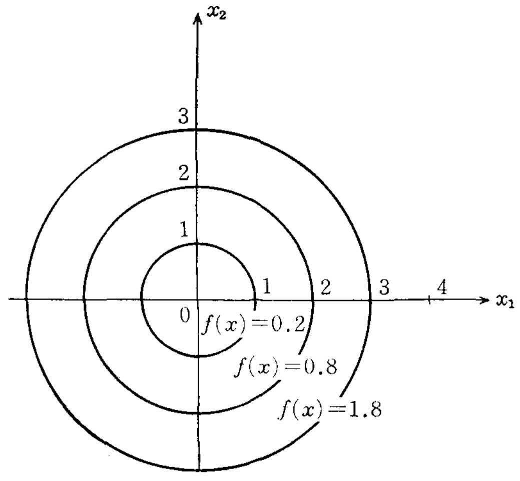

図 2　目的関数 f の等高線

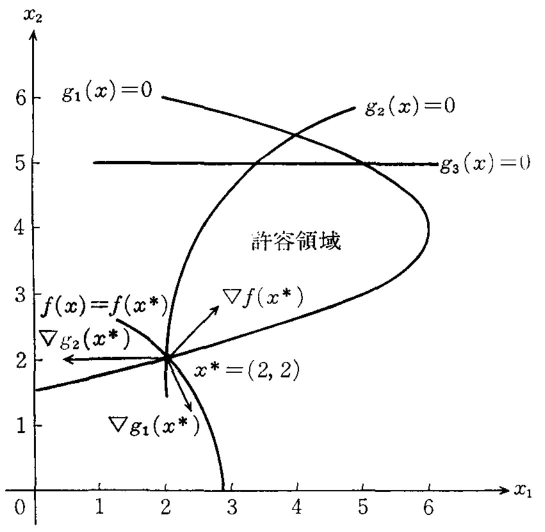

図 3　最小点 x^* でのグラジェント・ベクトルの関係

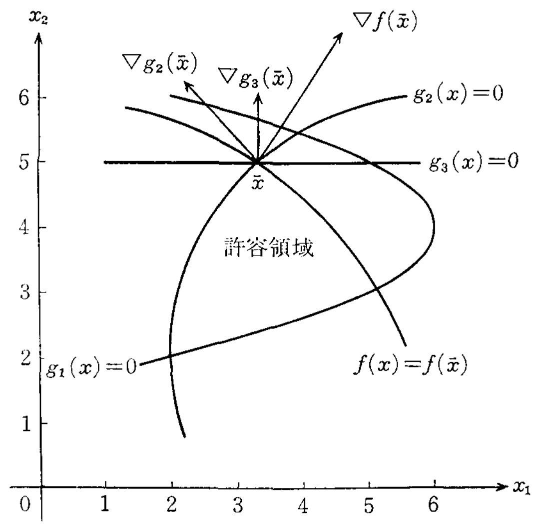

図 4　点 $\bar{x}$ でのグラジェント・ベクトルの関係

する方向がグラジェント・ベクトルの方向 $\nabla g_i(x)$ に一致する.

図 2 は目的関数 f の等高線を示している．制約条件がなければ，原点 (0,0) が最も低い谷底＝f の最小点になる．制約条件を満たし，かつ，目的関数 f を最小にする点は図 1 と 2 を重ねあわせることにより，$x^*=(2,2)$ であることがわかる (**図 3** 参照)．最小点 $x^*=(2,2)$ では，各不等式条件は

$$g_1(x^*)=0,\ g_2(x^*)=0,\ g_3(x^*)<0$$

を満たす．図 3 では，最小点 $x^*=(2,2)$ での目的関数 f およびその値が 0 になっている制約関数 g_i のグラジェンド・ベクトルの様子を示している．これらのベクトルを力学における“力”とみなすと，ラグランジュ乗数をかけることによりその長さを適当に調節して，力を均衡させられる，すなわち，ゼロベクトルを表わせることが分る．正確には，

$$\nabla f(x^*)+\nabla g_1(x^*)+0.625\nabla g_2(x^*)=0$$

が成立している．したがって，ラグランジュ乗数を

$$y_1=1,\ y_2=0.625,\ y_3=0$$

と置くと，Kuhn-Tucker の最適性条件が成立していることが分る．相補性条件

$$y_i\cdot g_i(x^*)=0\quad (i=1,2,\cdots,m)$$

は $g_i(x^*)<0$ なる不等式条件に対するグラジェント・ベクトルは力の均衡には参加できないことを意味している．

図 4 に示された点 $\bar{x}$ は最小点ではない．その理由は，点 $\bar{x}$ を通る f の等高線が許容領域の内部に食い込んでおり，$\bar{x}$ のいくらでも近くに f を小さくする点が存在するからである．この場合には，どのようにラグランジュ乗数 $y_2\geqq 0$，$y_3\geqq 0$ を選んでも 3 つの力 $\nabla f(\bar{x})$，$\nabla g_2(\bar{x})$，$\nabla g_3(\bar{x})$ を均衡させることができない．

ここで，上の例題において x^* 点を通る目的関数の等高線を変化させたときに，x^* が最小点であり続ける範囲を調べてみよう．x^* が最小点であるためには，その等高線が許容領域の内部に食い込んではならない．その限界が**図 5** および**図 6** に示されている．図 5 (図 6) においては，$\nabla f(x^*)$ がさらに下方 (左側) に傾くと，f の等

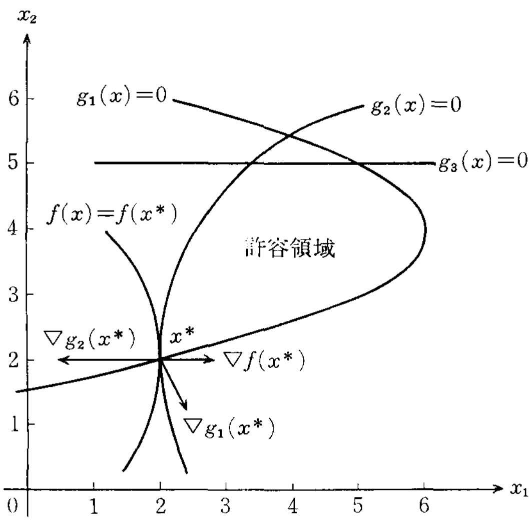

図 5　目的関数 f が変化したとき x^* が最小点となる f の等高線の限界……I

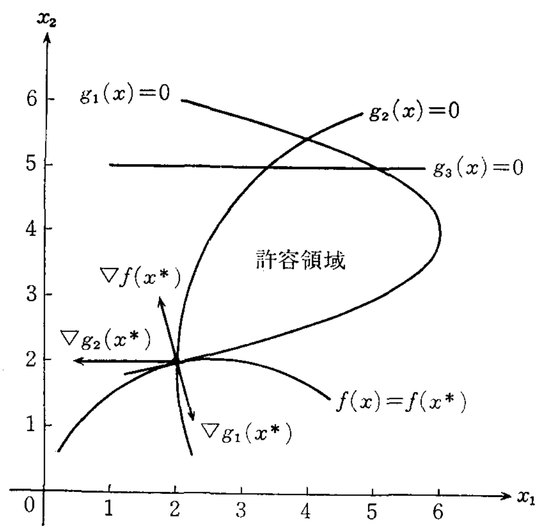

図 6　目的関数 f が変化したとき x^* が最小点となる f の等高線の限界……2

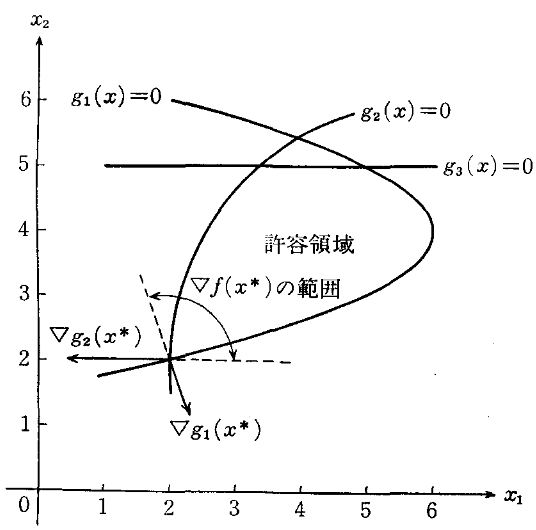

図 7　目的関数 f が変化したとき x^* が最小点でありえる $\nabla f(x^*)$ の範囲

高線が許容領域に食い込んで x^* はもはや最小点ではなくなる．結局，**図 7** のように，目的関数のグラジェント・ベクトルは，ラグランジュ乗数 $y_1 \geqq 0$, $y_2 \geqq 0$ を適当に選べば3つの力 $\nabla f(x^*)$, $\nabla g_2(x^*)$, $\nabla g_3(x^*)$ を均衡させられる範囲(すなわち，Kuhn-Tucker の最適性条件が成立する範囲) の外には出られないことが確かめられる．

最後に，いくつかの注意を与えておこう．

1. 正確には，Kuhn-Tucker の最適性条件は x^* が極小点 (x^* の近傍で局所的に最小) であるための必要条件である．

2. 一般には，最適性条件を満たしても極小点であるとは限らない．

3. 関数 f, g_i $(i=1, 2, \cdots, m)$ が凸関数の場合には極小点が最小点に一致し，Kuhn-Tucker の最適性条件が最小点であるための必要十分条件となる．

4. 厳密には，この最適性条件が成立するためには，"Kuhn-Tucker の制約想定" と呼ばれる仮定を必要とする．**図 8** に示された例では，x^* で目的関数 f が最小になっているにもかかわらず，最適性条件が成り立っていない．たとえば，制約想定としては，x^* で等号が成立している不等式条件に対応するグラジェント・ベクトルの線形独立を仮定すればよい．図 8 の例はこの制約想定によって排除できる．

5. 等式条件と不等式条件の両方を含んだより一般の場合に拡張できる．

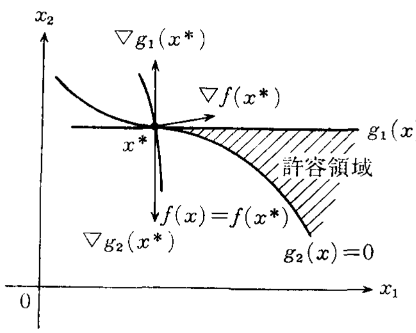

図 8　制約想定が満たされない例

詳しくは非線形計画法の標準的な参考書を参照されたい．参考文献として [2, 3] をあげておく．

参　考　文　献

[1] Kuhn, H. W. and Tucker, A. W., "Nonlinear Programming", in Proceedings of the Second Berkeley Symposium on Mathematical Statistics, J. Neyman (editor), University of California Press, Berkeley and Los Angles, California, 1961, pp. 481–492.

[2] マンガサリアン(関根智明訳)，「非線形計画法」，培風館(1972).

[3] 今野　浩，山下　浩，「非線形計画法」，日科技連出版社(1978).