# 在庫管理における最適発注量

森村 英典 東京工業大学

在庫管理を必要とする場は大きく分けて2つある．1つは販売する製品もしくは販売した製品の部品の在庫であり，他の1つは製造のための原料や部品の在庫である．前者は異なった多数の需要源から需要発生に対応するためのものであり，その需要の予測にもとづいた管理が必要である．後者は製造計画にもとづいて部品が使用されるから，本質的には需要の予測は不必要で，そのかわり，タイミングよく部品等の供給がされるような対策が求められる．MRP (Material Requirements Planning) やカンバン方式などは，この見地に立って考え出された方式といえよう．

初等的なORのテキストに述べられている在庫モデルは，主として前者の場を想定している．そして，需要量は時間的に一定の割合で生じ，時間とともに増加したり減少したりすることはないという仮定に立っている．この点，見かけ上は現実から遊離していると見られがちである．しかし，後述するように，このモデルから得られる最適発注量はこの仮定をゆるめた場合にもそのままか，もしくは少し修正するだけで使用可能である．

その意味で，この公式は実用上からも大変重要であると言えるが，それだけでなく，この公式を求めるまでの考え方には，ORで使う基本的な考え方のいくつかが含まれている，という理由でも大切であると思う．

## ウィルソンのロット公式

ほとんどの初等的なORのテキストに述べられていることではあるが，鋸型の折れ線で表わされる在庫変動の図示からはじめよう．上述の仮定を満たすモデルでは，時々刻々の在庫量は図1のようになるであろう．時点$t_0$においてQという量の納入があり，毎日（あるいは毎週でもよい，とにかく時間に関するある単位）一定の割合で需要が発生し，それに応じて蔵出しが行なわれるため在庫量が一定の割合で減少する．時点$t_1$で再び在庫量が0となると同時に次のQという量の製品が納入される．こうして，$t_1$における在庫量は$t_0$におけるそれと等しくなり，以後の在庫変動はまったく同じになる．

このように変動するときの延べ在庫量は，鋸型の折れ線の下の面積で表わされるから，図のように時点0と時点$T$の在庫量が一致しているならば，この間の延べ在庫量は，三角形の面積の公式から$QT/2$に等しい．この製品の保管のために，単位時間当り，単位量毎に$C_1$の費用がかかり，納入1回毎に$C_2$の費用（発注費と呼ぶ）がかかるものとすれば，(0, $T$) 間の納入回数が$Q/r$で表わされることから，この間の総費用は

$$C_1QT/2+C_2Tr/Q \tag{1}$$

となることは，容易にわかる．ここで，$r$は単位時間あたりの需要発生量，すなわち蔵出し量である．

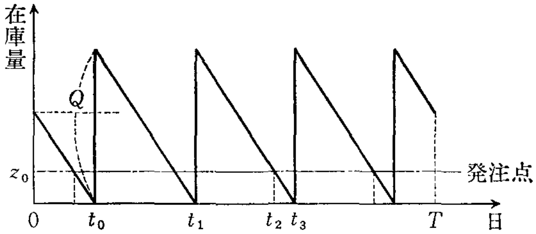

図1 確定的在庫変動

いま，われわれの欲しいのは (1) を$T$で割った単位時間当りの総費用を最小にするような$Q$である．それで，(1)/$T$を$Q$で微分して0に等しいと置くと，

$$Q=\sqrt{(2C_2r/C_1)} \tag{2}$$

となる．(2) の公式をウィルソンのロット公式または簡単にルート公式と言い，$Q$を経済的発注量(Economical Ordering Quantity, 略してEOQ) という．

## EOQの頑健性

このように，EOQはかなりきつい条件の下で導かれたものであるが，これらの条件がない場合でもそのまま使えることが知られている．その理由を直感的に探ってみよう．

まず図1で，時点0と時点$T$の在庫量が一致していないとしよう．このとき，(0, $T$) 間の延べ在庫量は，$QT/2$に等しくはないが，その差は(1)/$T$においては定数/$T$の形になるため，$T$の増加とともに無視できるようになる．

また，発注しても部品がすぐに納入されるとは限らないのがむしろ普通であるから，在庫モデルでは，通常，調達期間を考慮に入れて，そのぶん早目に発注する．図1

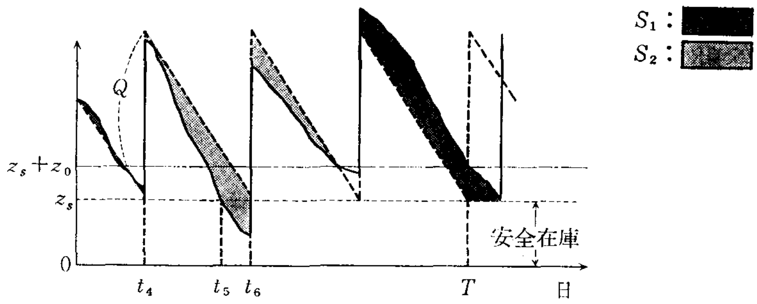


**図 2　確率的在庫変動**

では，時点 $t_3$ で納入されることを期待して，時点 $t_2$ で発注している．しかし，図を見れば明らかなように，時点 $t_2$ で発注することと，在庫量が $z_0$ となった時点で発注することとは同じである．それならば，いつも在庫量に注目していて，それが $z_0$ となった時に発注する方がわかりやすい．これが発注点法と呼ばれる方法である．

今度は，需要の発生が確定的でなく，確率的に変動するとしよう．このとき，在庫量は一定の割合で減少するわけではなく，たとえば図 **2** のように変動するであろう．したがって，このときも (0, $T$) 間の延べ在庫量は $QT/2$ に等しくはない．図 2 でいえば，$S_1$の部分はプラス，$S_2$の部分はマイナスとして働く．この両者は互いに相殺しあうから，それらの和は結局$QT/2$に近くなるであろう．(本稿末尾の補遺参照) もし，かなり大きな $T$ に対しても，この両者が相殺しあわなかったとしたら，それは需要予測が違っていたとみなすべきであろう．

需要が確率的に変動するのであるから，たとえば図 2 の $t_5$ から $t_6$ までの間では，$t_4$ における在庫量が$Q$のときには品切れを起こしてしまうが，このような事態はかなり頻繁に起こりうる．これを避けるために，図 2 に示すような安全在庫 $z_s$ を設けておく．安全在庫は，たとえばほぼ95パーセントの割合で在庫切れを防ぐように設定される．

このような対策を立ててあったとしても，需要予測が違っていたために，あるいは計算に誤りがあったために，$Q$という発注量が真の価よりも大きかったとすれば，在庫水準は徐々に増え続け，いわゆるデッド・ストックを生んでしまう．また逆に，$Q$が小さすぎれば，慢性的品切れの多発に悩まされることであろう．

いいかえると，需要予測が正しいという前提のもとでは，定常的な在庫管理を続ける以上，発注量は$Q$以外では困るのである．需要が確率的に変動するにもかかわらず，最適発注量は需要量が時間的に一定の割合で生ずるという仮定に立って導かれたＥＯＱでなければならない，という点は強調してもよいことであろう．

さらに，定常という仮定を除いたらどうなるか，ということについての研究は，その時々の需要予測にもとづいて，ＥＯＱを計算しながら発注量を決めるのが実用的に最良であると結論づけている．需要が減少傾向にある場合は，それでもデッド・ストックを生みやすいので，これからの全需要量が1.25ＥＯＱよりも少なくなれば，それを最終の発注とみなし，さもなければＥＯＱを発注するという程度の修正が推奨されている．[European Journal of Operations Research, Vol. 27, No. 3, 1986, pp. 267–273に掲載された E. Ritchie の Invited Review 参照]

## 延べ在庫量の評価（補遺）

図 2 で，延べ在庫量が$QT/2$と食違う量をプラスの部分とマイナスの部分とに分けて図示した．そして，この両者は互いに相殺しあう，と述べた．しかし，この主張を納得するには，図 **3** のような表現に拠った方がより明確になると思われるので，その解説をしておこう．

図 2 のプラスとマイナスの図示は，図 1 の在庫変動を基準としたので，それぞれの面積を評価するのはいささか困難であった．その上，この図では目立っていないが，実は図 1 と図 2 とでは，納入時点が異なるのが，むしろ普通である．図 2 の最後の納入に関してはこのようになっているが，この場合には，プラスやマイナスの面積もかなり大きくなってしまい，直感的にもそれらが果たして相殺しあうのか否かいささか疑わしくなるであろ

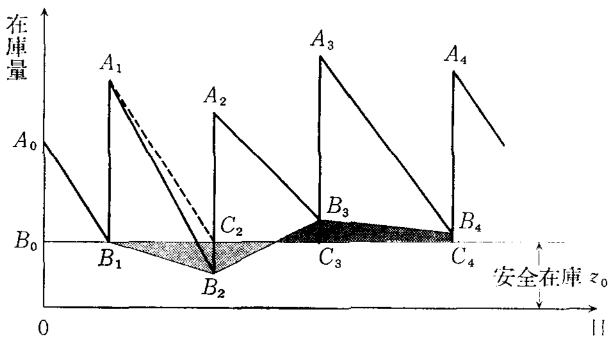


**図 3　延べ在庫量の評価**

う．

そこで，各納入時点における，直前・直後の在庫量を直線で結んで，図3を作る．実際の在庫変動がこの折れ線グラフ（太線）の周囲で細かな変動をしていることは容易に理解されよう．つまり，この折れ線グラフの下の面積を求めれば，延べ在庫量をほぼ正確に評価することになる，と考えてよかろう．

長い目で見れば，安全在庫は常にあるので，在庫量が$z_0$以上のときに注目すればよい．図3のように，各納入時点の直前・直後にあたる点をそれぞれ$B_0$, $B_1$, $B_2$, …; $A_1$, $A_2$, $A_3$, …とする．これらの点列で囲まれた三角形の面積の和はほぼ$QT/2$である．なぜならば，線分$A_jB_j$が水平線$z_0$と交わる点を$C_j$とすると，たとえば三角形$A_1B_1B_2$の面積と三角形$A_1B_1C_2$の面積とは等しく，各三角形の高さはすべて$Q$で共通であるからである．

そこで，この面積のうち，在庫水準が$z_0$以上か以下かを見て，プラス・マイナスを調べる．すると図3のようなプラス・マイナスがある．水平線$z_0$を基準とした延べ需要量のプラスは$B_jC_j$であり，マイナスは$C_jB_j$であるが，平均すればこれらは0でなければならないので，どちらか一方にのみ偏ることはほとんど起こらない．つまり，比較的頻繁にプラス・マイナスは入れ替わり，同時にその量もあまり差がないと期待できよう．したがって，延べ需要量のプラスとマイナスも互いに相殺しあうとみなせるであろう．

× × × × ×