マルコフ連鎖

高橋　幸雄　東北大学

スイレン池のカエル

マルコフ連鎖といえばカエル，カエルといえばマルコフ連鎖というほど馴染みの深い"睡蓮池の蛙"からはじめよう．(一部，森村・高橋『マルコフ解析』日科技連，より転載，定義など詳しくは同書を参照されたい)

『ある池に睡蓮の葉が5枚，図1のように浮かんでいる．そこに1匹の蛙が水の中から出てきて1つの葉の上にちょこんと座った．この蛙はその葉の上でしばらく休んで目玉をギョロギョロッと動かし，そしてピョンとジャンプして隣の葉へ移る．そこでも喉をピョコピョコさせてしばらく休み，ぴょんと次の葉へ跳んでいく』

この蛙の動きを図2のようにモデル化してみよう．まず睡蓮の葉に1から5までの番号をふる．蛙が i 番の葉の上にいることを"状態 i"と呼ぶことにし，図では丸で囲んだ数字①，②などで表わす．蛙が i 番の葉から j 番の葉へジャンプすると，状態は i から j へ"推移"する．i 番の葉から次にどの葉へジャンプしていくかは葉の配置具合いで決まり，図2の矢印の脇のような確率で推移するものとしてよいであろう．

推移図とマルコフ連鎖

図2のように，状態を表わすいくつかの丸とその間の推移を表わす確率つきの矢印で構成される図を**推移図**と呼び，推移図でその動きが表現されるモデルを**マルコフ連鎖**と呼ぶ．矢印の脇の確率は**推移確率**と呼ばれ，p_{ij} という記号で書かれることが多い．

マルコフ連鎖には扱う時間のタイプによって時間離散的なものと時間連続的なものの2種類がある．

時間離散的な場合には，推移は時刻 $t=0,1,2,\cdots$ で起こり，各状態にはちょうど1単位時間ずつ滞在するものと仮定される．ただし，図2にはないが，同じ状態へもどる（つまり動かない）ことも許される．

時間連続的な場合は，各状態に指数分布にしたがう時間だけ滞在し，推移確率にしたがって次の状態へ推移する．滞在時間の分布のパラメータは，状態ごとに異なってよい．したがって，この場合は，平均滞在時間の逆数 μ_i を推移図の各状態に書き加えるのが普通である．

この μ_i の意味は，"短い時間 Δt の間に滞在時間が終了

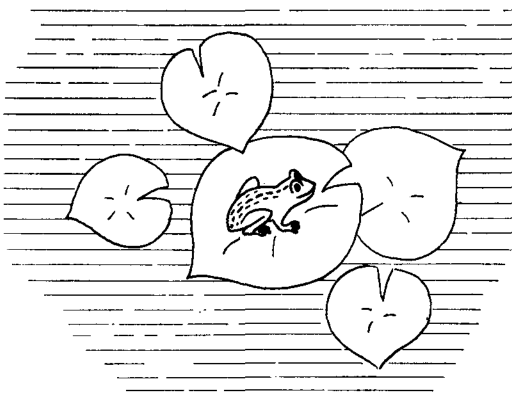

図1　睡蓮池の蛙

する確率が $\mu_i\Delta t+o(\Delta t)$"ということである．滞在時間が終了すると状態の推移が起こるわけだから，Δt の間に状態 j への推移が起こる確率は $\mu_i p_{ij}\Delta t+o(\Delta t)$ である．そこで，この $\mu_i p_{ij}$ を**推移速度**と呼び，この値を p_{ij} の替わりに矢印のわきへ書くこともよく行なわれる．こうすると各状態で μ_i の値を書いておく必要もない．上の蛙の例の推移図をこの推移速度の形で表わしたのが**図3**である．

マルコフ性

マルコフ連鎖が推移図を用いてモデル化できるというのは，推移図がマルコフ性をたくみに表現しているからである．

蛙の例でいうと，もし蛙が勢いをつけて葉から葉へ跳び移ったり，あるいは人間のように知性を備えているとしたら，1の葉から2の葉へ移ったあと再び1の葉にも

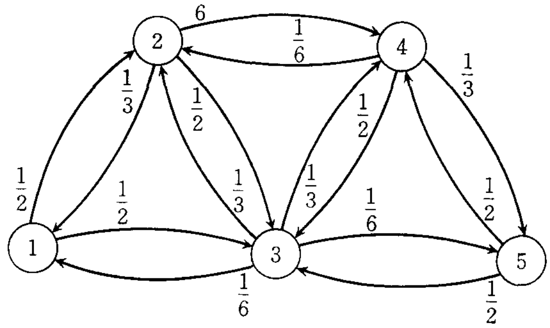

図2　推移図

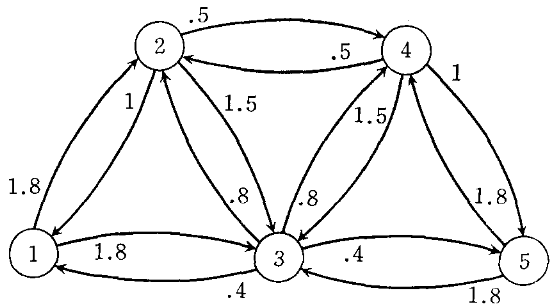

図 3 推移速度による推移図

どることはしたがらないかも知れない．あるいは，5→4→3→2と跳び移ってきたときには“次は1の葉”と決めてかかることもありそうである．ところが，推移図を使って表現するときには，どのような経路を通って2の葉に到達しても次に1の葉へ跳び移る確率はすべて1/3であって，過去の経路には無関係にならざるをえない．

つまり，勢いのついた蛙のジャンプは正確には表現できない．推移図でモデル化すると，マルコフ性，つまり“ある状態にいるという情報があれば，それ以後の動きはそれ以前の動きの経過とは独立である”を自動的に仮定したことになる．

定常状態確率

マルコフ連鎖は，その性質によってさらにいくつかに分類できるが，その中で最も重要なものは，エルゴード的マルコフ連鎖と呼ばれるものである．エルゴード的マルコフ連鎖では，マルコフ連鎖が各々の状態をとる確率が，十分長い時間の後，“定常（平衡）状態確率”と呼ばれる極限 α_i に収束する．

定常状態確率は，推移図をネットワークとみなし，その中におけるフローがバランスしたものと考えるとわかりやすい．つまり，各状態をとる確率をあたかも流体であるかのように考え，それが推移確率(推移速度)にしたがってフローとして状態の間を流れているものとする．各状態をとる確率のバランスがとれていないと，このフローによって確率が少しずつ変わっていくが，最終的には，どの状態においても入ってくるフローと出ていくフローの量が等しくなるように自然と調整される．この状況を**平衡状態**と呼び，このときの各状態をとると確率が定常状態確率である．

この考えを利用すると，推移図が特殊な構造をしているとき，定常状態確率を簡単に計算することができる．

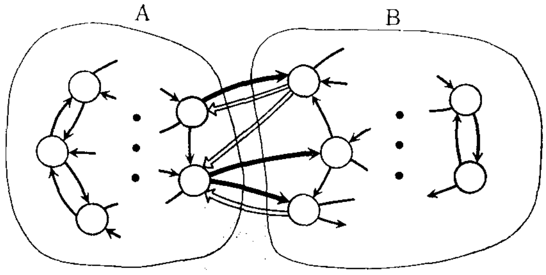

図 4 状態空間の分割

図4のように状態空間を2つの部分AとBに**分割**し，Aの状態から出ている矢印に沿ったフローの合計を計算すると，平衡状態ではBの状態から出ている矢印に沿ったフローの合計と等しくなるはずである．この関係から，定常状態確率について1つの関係式を導くことができる．たとえば，図3で，状態1と2をA，状態3，4，5をBと考えると，

Aから出るフロー　$1.8\alpha_1+1.5\alpha_2+.5\alpha_2$

Bから出るフロー　$.4\alpha_3+.8\alpha_3+.5\alpha_4$

であるから，これらを等しいとおいて

$$1.8\alpha_1+2\alpha_2=1.2\alpha_3+.5\alpha_4$$

という式が得られる．

定常状態確率は，通常，**平衡方程式**と呼ばれる連立一次方程式を解いて求められるが，これは1つの状態をA，残りをBとした場合の関係式の集りとなっている．

(イ)　**出生死滅型**　**図5**のように推移図が1本の鎖のようになっている場合，隣りあった状態の間で状態空間を分割してみよう．状態 $i-1$ から左の状態の集合をA，状態 i から右の状態の集合をBとすると，

$$\alpha_{i-1}\lambda_{i-1}=\alpha_i\mu_i$$

という関係式が得られる．これから

$$\alpha_i=\alpha_{i-1}\lambda_{i-1}/\mu_i$$
$$=\alpha_0\lambda_0\lambda_1\cdots\lambda_{i-1}/\mu_1\mu_2\cdots\mu_i$$

となり，すべての α_i 和が1であることを用いれば，α_i の値は簡単に求められる．

これは出生死滅型のマルコフ連鎖と呼ばれているもので，$M/M/s$ 待ち行列モデルなどもこのタイプである．

(ロ)　**ツリー型**　もう少し一般化して，推移図が**図6**のようにツリー状になっているときも定常状態確率が簡単

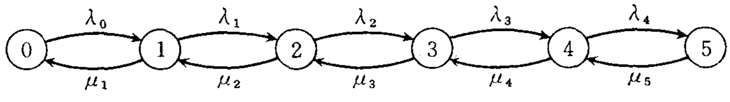

図 5 出生死滅型

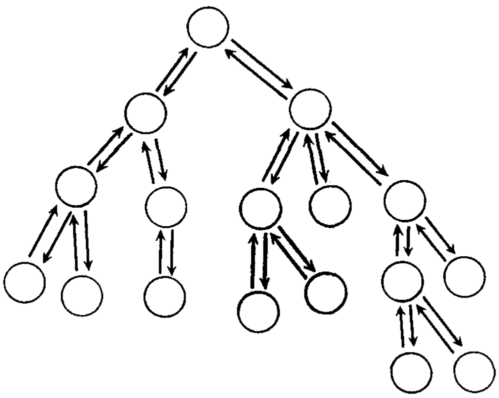

図 6　ツリー型

に求められる．これは試してみればすぐにわかるであろう．もっとも，推移図がこういう形になることはあまりないのだけれど…….

(ハ)　**積形式**　図7のように，推移図が2次元で，推移は上下左右の状態としかなされず，推移確率(推移速度)は，横方向の推移であれば横座標，縦方向の推移であれば縦座標にしかよらない，という特殊な場合を考えよう．この場合，図のように境界がどんな不規則な形をしていても，状態(i,j)の定常状態確率は

$$\alpha_{ij}=K\beta_i\gamma_j$$

という積形式をしている．このことは後で確かめることにして，まず，定数β_i,γ_j,Kの値の求め方についてみておこう．

状態空間を横座標$i-1$とiの間で分割し，横座標が$i-1$以下の状態の集合をA，i以上の状態の集合をBとする．すると，AとBの間のフローバランスから

$$\sum_{j\in J}\alpha_{i-1j}\lambda_{i-1}=\sum_{j\in J}\alpha_{ij}\mu_i$$

となる．ここでJは，AB間の矢印の縦座標の集合である．この式のα_{ij}に，上の積形式を代入して整理すると

$$\beta_{i-1}\lambda_{i-1}=\beta_i\mu_i$$

となり，(イ)のときと同様の方法でβ_iの値を決めることができる．ただし，β_iの和は必ずしも1である必要はなく，定数倍だけの自由度がある．

同様に，縦座標が$j-1$以下の状態の集合とj以上の状態の集合との間のフローバランスを考えれば

$$\gamma_{j-1}\lambda'_{j-1}=\gamma_j\mu'_j$$

となり，γ_jの値も簡単に決められる．乗数係数Kは，α_{ij}の和が1という条件から決められる．

こうして求められた積形式の値を定常状態確率として上下左右の状態との間のフローを比較すると，上のβ_iとγ_jが満たす関係から，隣りあった状態の対ごとにバランスがとれていることが確かめられる．これをローカルバランスといって，これが成り立てば，平衡方程式（グローバルバランス）が満たされることはすぐにわかる．したがってα_{ij}の値は上の積形式で与えられるのである．

この積形式を利用した議論は，状態空間がより高次元になっても，また状態空間の形状がまったく違ったものであっても，同じように行なうことができる．最近，計算機システムの性能評価の道具としてBCMP型待ち行列ネットワークがよく利用されているが，それは定常状態確率がこの積形式によって簡単に求められるからである．

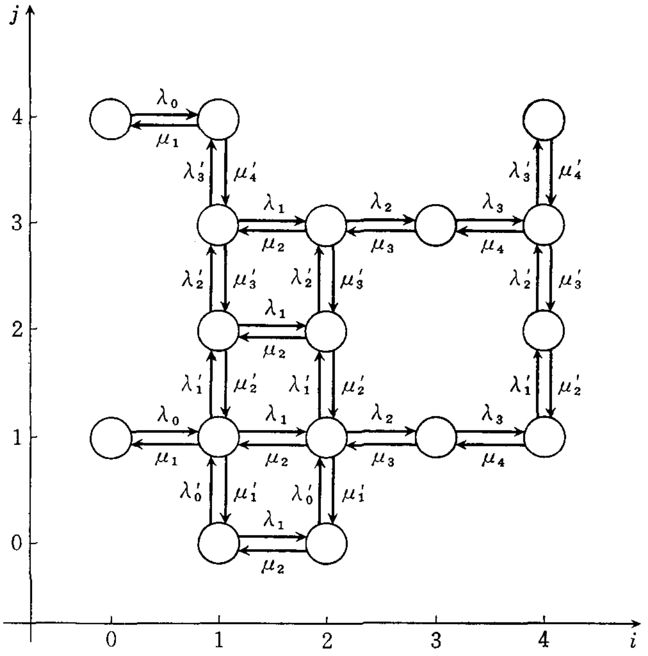

図 7　積型式となる場合