M/M型待ち行列の平均待ち時間

森村　英典　東京工業大学

M/M型は待ち行列の基本モデル

待ち行列の基本はM/M型である．これは，最もランダムに客が到着して，最もランダムなサービス時間を必要とするモデルである．ここに「ランダムな」到着とは，どの時点でも客の到着の可能性は変わらないことを意味し，「ランダムな」サービス時間とは，どの時点でも客のサービス終了の可能性が一定であることを意味する．そして，このような場合に，待ちは最も生じやすい．

もっとも，「最もランダムな」はずのM型よりも，「もっとランダムな」分布を想定する方が適切であると考えられる例も実際に存在するし，最近はその場合の研究も進んでいる．しかし，このような場合を扱う必要のある人は，たとえば通信の分野のいわば専門家に限られるであろうから，待ち行列を利用したいと考える多くの人々にとっては，M/M型が待ち行列の基本であるといって差し支えないであろう．

また，サービス時間はランダムというより，もっと分散の少ない分布であると思われる実例も多いが，はじめはあまり細かなことにかかわらない方がよいという意味からも，筆者は「待ち行列を考えるときは，まずM/M型で」という態度をお薦めしたい．換言すれば，到着やサービス時間の分布について特に注意せずにM/M型を使ってしまおう，という甚だ乱暴ともみえる「お薦め」である．これは，実験計画法などの統計学の多くの理論展開が正規分布の仮定のもとでなされていて，その仮定の正当性をデータによって改めてチェックはしないまま利用したとしても，十分にその効果を上げていることが多いという事情によく似ている．

平衡状態の仮定

さて，待ち行列のモデルでは，通常，平衡状態を仮定する．これは，時間が多少変化しても，系内数つまり窓口でサービスを受けている客の数と待ち行列のなかでサービスを待っている客の数との和の分布や待ち時間の分布などが変化しない状況を考えていることに当たる．言い換えると，観測を始めるときの状況がどうであったかなどという面倒なことは忘れてしまおうということである．数学的に厳密なことを言えば，系内数の分布は時々刻々変化し，正確には観測を始めるときの状況に依存する．しかし，それらの値と平衡状態を仮定したときの値とは余り違わない．通常の応用においては，その差に注意する必要がないほど僅かであるのが普通だと言ってよい．

ところで，平衡状態は平衡条件，つまり

　1つの窓口における平均サービス時間内の
　平均到着数（以後，これをρと書く）
　が1より小さい（すなわち$\rho<1$）

という条件のもとで，無限の時間が経過したときの極限として実現することが数学的に示されている．しかし，その極限への近づき方はとても早いので，実用上は上記のようにいつも極限状態とみなすことが許されるのである．

このように，平衡状態を仮定するのは$\rho<1$であることを仮定することに他ならないが，応用の場で$\rho<1$と考えられる場合であっても，ρが1に近いときには，実際には一時的にもせよこの条件が崩れているかもしれないという心配がある．それで，ρが1に近いときには，別な観点による考察をするなどの注意が肝要である．

いま，$\rho<1$が一定値であるとして，平衡状態における客の平均待ち時間（以後W_qと書く）もしくは平均系内時間を求め，その値をρの関数として図示すると，**図1**のようになる．この図では，縦軸にμW_qの値を取っている．これは，

$$\frac{W_q}{\frac{1}{\mu}}$$

と変形してみると，平均待ち時間を平均サービス時間を単位として測った値と見ることができる．言い換えると，平均サービス時間の何倍を平均として待つか，という値を示している．

図1から少なくとも2つのことが読み取れる．1つは，$\rho<0.5$のあたりでは，待ちがほとんど生じないから，待ちのことに気を使う必要はあまりない，ということであり，もう1つは，$\rho>0.9$のあたりでは，待ちが多すぎて，実際には多分さまざまなトラブルが生じているで

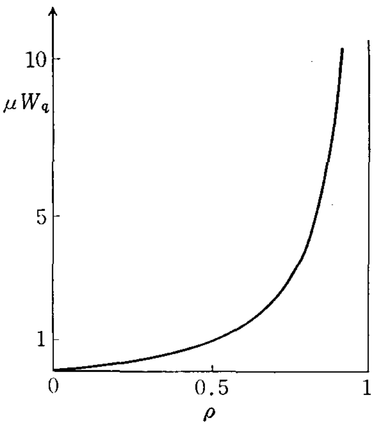

図 1　$M/M/1$ の μW_q

あろう，ということである．さらに，この辺の ρ になると，その僅かの変化が平均待ち時間の値を急激に変えるから，ρ の値を少しでも下げる努力をすることが，有効な方策であると言えるし，ρ の値をデータから推定して平均待ち時間などの具体的な値を求めても，実際上，その値自体あまり信用のおけるものでもあるまい，ということにもなろう．

このような $\rho \to 1$ のところでの W_q の急激な増加という傾向は，M/M 型待ち行列における平均待ち時間を表わす式の分母に，$1-\rho$ という項が含まれていることに反映しているが，窓口がほとんどいつも塞がっていて，到着やサービス時間の偶然変動を吸収する余力が急速に減少するために生じたものであり，この特徴は M/M 型に限らず，待ち行列に共通して見られるものでもある．

2 つの図表とその利用

M/M 型待ち行列においては，系内数の分布や待ち時間の分布などが，きちんとした式の形で求まっているから，ある時間以上待たなければならない確率や平均待ち時間などを計算して，きちんとした式の形で表わすことができる．したがって，応用したい対策について，必要なパラメータの値をデータから推定すれば，それらの値を式に代入することによって，平均待ち時間などの具体的な値が求まるわけである．その計算は電卓でももちろん可能であるし，パソコンなどの計算機を利用するならば，かなり簡単なプログラムで短時間に求めることができる．

それにもかかわらず，M/M 型待ち行列を利用した解析の第 1 段階では，筆者は 2 つの図表の利用をお薦めしたい．この 2 つの図表から，

①到着した客が待たなければならない確率
②すべての窓口が塞がっている確率
③待ち行列長がある長さ以上である確率
④客の待ち時間がある時間以上である確率
⑤客の平均待ち時間と平均系内時間
⑥平均待ち行列長と平均系内数

などの諸量が電卓を 1 ～ 2 回使う程度の簡単な計算で求められる．

この 2 つの図表は，紙面の都合からここには掲載できないが，その 1 つは①の確率を描いたもの，他の 1 つは図 1 をさまざまな s について示したものである．たとえば拙著 [1, 2, 3] やＯＲ事典 [4] などを参照していただきたい．拙著には例題を用いて使用法を解説してある．

筆者が図表の使用をお薦めする理由の第 1 は，それが最も簡便であるためであるが，図ではいたずらに細かい数字を読めないということも第 2 の大きな理由である．

これはいささか逆説的に聞えることであろう．計算機の発達で計算が楽になったおかげで，桁数の大きなものも容易に求められるようになったが，その反面，かえって「有効桁」の概念が薄くなりがちで，ただ桁数の大きな細かい数字を扱っているという傾向があるように思われる．確率の示す数字を直感的に理解できるのは，多くの場合最初の 1 桁ぐらいで，せいぜい 2 桁目に注意すれば十分であることが多い．図はこの意味からは，必要にして十分な情報を提供してくれると考えられる．

参 考 文 献

[1]　森村，大前：応用待ち行列理論，日科技連
[2]　真壁　肇(編)：オペレーションズ・リサーチ，日本規格協会
[3]　森村・牧野(編)：統計・ＯＲ活用事典，東京書籍
[4]　日本ＯＲ学会：ＯＲ事典，日科技連

×　×　×　×　×