ゲーム理論

武藤　滋夫　東北大学

1. はじめに

ゲーム理論では，各主体をプレイヤー，各主体のもつ行動の代替案を戦略，各プレイヤーがある戦略をとったときに定まる結果に対してそれぞれのプレイヤーが与える評価値を利得と呼ぶ．各プレイヤーのとるべき戦略の決定に当ってプレイヤー間に拘束力ある合意が存在するか否かにより，ゲームは大きく2つに分けられる．前者を協力ゲーム，後者を非協力ゲームという．

非協力ゲームの最も極端なものは，2人のプレイヤーから成り，両者の利得の和が常に一定となる2人定和ゲームである．この場合には，一方の利得が増せばその分だけ他方の利得は減少するから，両者の間の協力はおこりえない．まず，この2人定和ゲームの解説から始めることにする．

2. 2人定和ゲーム

例2.1 同種の製品を販売している2つの企業A, Bがあり，両社は互いに自らのシェアを現在より拡大したいと考えている．A, Bはそれぞれ2つの広告政策$\alpha_1, \alpha_2, \beta_1, \beta_2$をもち，各政策がとられたときの$A$のシェアの増分（$B$のシェアの減少分）は，$A$が$\alpha_1$，$B$が$\beta_1$をとれば$-10\%$，$\alpha_1, \beta_2$であれば$0\%$，$\alpha_2, \beta_1$であれば$20\%$，$\alpha_2, \beta_2$であれば$5\%$と見積られているとする．いま$A$，$B$がシェアの拡大のみを目的とし，しかも互いに相手の選択の結果を知らずに自らの広告政策を決定するとき，両社はいかなる選択を行なえばよいであろうか．

この問題において，プレイヤーはA，Bであり，Aの戦略はα_1, α_2，Bの戦略はβ_1, β_2，Aの利得は(**2.1**)のように行列の形（利得行列）で与えられる．Bの利得は符号を変えたものである．このような表現を戦略形表現という．A, Bはそれぞれ(**2.1**)で与えられた利得の最大化および最小化をめざす．

$A\backslash B$	β_1	β_2
α_1	-10	0
α_2	20	5

(**2.1**)

このような状況における各プレイヤーの行動基準として，各戦略をとったときの最悪の状態（保証水準）を比べ，それを最良にする戦略をとるという基準を考える．これをミニマックス行動基準という．

一般に，プレイヤーA，Bの戦略を$\alpha_1, \cdots, \alpha_m, \beta_1, \cdots, \beta_n$, Aの利得に関する利得行列を(**2.2**)とするとき，Aにとっての戦略α_iの保証水準は$\min_{j=1,\cdots,n} a_{ij}$であり，ミニマックス行動基準にしたがえば$\min_{j=1,\cdots,n} a_{ij} = \max_{i=1,\cdots,m} (\min_{j=1,\cdots,n} a_{ij})$となる戦略$\alpha_i$がとられることとなる．この$\alpha_i$を$A$のマックスミニ戦略，$v_A = \min_{j=1,\cdots,n} a_{ij}$を$A$のマックスミニ値という．同様にして，$B$は$\max_{i=1,\cdots,m} a_{ij} = \min_{j=1,\cdots,n} (\max_{i=1,\cdots,m} a_{ij})$となる戦略$\beta_j$をとることとなる．$\beta_j$を$B$のミニマックス戦略，$v_B = \max_{i=1,\cdots,m} a_{ij}$を$B$のミニマックス値という．

$A\backslash B$	β_1	$\cdots$	β_j	$\cdots$	β_n
α_1	a_{11}	$\cdots$	a_{1j}	$\cdots$	a_{1n}
$\vdots$	$\vdots$		$\vdots$		$\vdots$
α_i	a_{i1}	$\cdots$	a_{ij}	$\cdots$	a_{in}
$\vdots$	$\vdots$		$\vdots$		$\vdots$
α_m	a_{m1}	$\cdots$	a_{mj}	$\cdots$	a_{mn}

(**2.2**)

例**2.1**においては，利得行列(**2.1**)からわかるように$\alpha_i = \alpha_2$，$\beta_j = \beta_2$であり，$v_A = v_B = 5$である．さらに利得5はβ_2列の最大値でありα_2行の最小値でもあるから，A，Bのいずれも戦略を変える動機をもたず，α_2, β_2に落着くことになる．この例のように$v_A = v_B$となるゲームでは，α_i, β_jが両者にとって最適な戦略となる．

一般には，$v_A \leqq v_B$とはなるが（[1]を参照），両者は必ずしも一致しない．たとえば，利得行列が(**2.3**)のように与えられるゲームでは$\alpha_i = \alpha_2, \beta_j = \beta_2, v_A = 0, v_B = 5$である．いま$A$のみが$\alpha_2$から$\alpha_1$に変えれば，彼の利得は0から5に増加してしまい$(\alpha_2, \beta_2)$は安定な状態とならない．

$A\backslash B$	β_1	β_2
α_1	-10	5
α_2	20	0

(**2.3**)

そこで，各戦略をある確率分布にしたがって混合して用いる混合戦略を考えてみる．もとの戦略を以下では純

戦略と呼ぶ．(2.2) の利得行列で与えられる一般のゲームにおいて，純戦略 $\alpha_1,\cdots,\alpha_m$ をもつAの混合戦略は$p_1+\cdots+p_m=1$, $p_i\geqq 0$ $i=1,\cdots,m$ を満たす $p=(p_1\cdots,p_m)$ であり，純戦略 $\beta_1,\cdots,\beta_n$ をもつBの混合戦略は $q_1+\cdots+q_n=1$, $q_j\geqq 0$ $j=1,\cdots,n$を満たす$q=(q_1,\cdots,q_n)$ である．A, Bの混合戦略の全体をΠ_A, Π_Bと表わすこととする．混合戦略p,qが用いられたときのAの期待利得は $E(p,q)=\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n}p_iq_ja_{ij}$ であり，Bの期待利得は$-E(p,q)$ である．

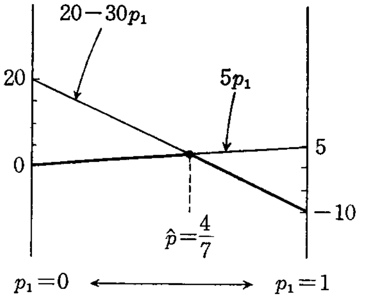

図 2.1 (a)

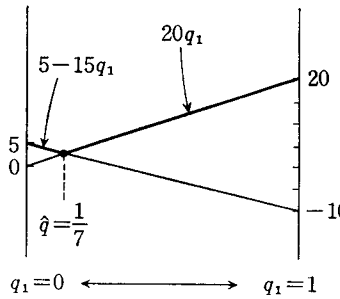

図 2.1 (b)

Aのマックスミニ戦略は $\min_{q\in\Pi_B} E(\hat{p},q)=\max_{p\in\Pi_A}(\min_{q\in\Pi_B} E(p,q))$となる戦略 $\hat{p}$, Bのミニマックス戦略は $\max_{p\in\Pi_A} E(p,\hat{q})=\min_{q\in\Pi_B}(\max_{p\in\Pi_A} E(p,q))$となる戦略 $\hat{q}$ である．両者のマックスミニ値，ミニマックス値は，それぞれ $u_A=\min_{q\in\Pi_B} E(\hat{p},q)$, $u_B=\max_{p\in\Pi_A} E(p,\hat{q})$ である．混合戦略まで考えたときには，常に $u_A=u_B$ となることが示されている．この定理をミニマックス定理という．したがって，$\hat{p},\hat{q}$が両者にとって最適な戦略となる．

(2.3) の利得行列で与えられるゲームにおいて $\hat{p},\hat{q}$ を実際に求めてみよう．A, B の混合戦略を $p=(p_1,1-p_1)$, $q=(q_1,1-q_1)$ $(0\leqq p_1,q_1\leqq 1)$ とすると，Aの期待利得は $E(p,q)=q_1\times(20-30p_1)+(1-q_1)\times 5p_1$ となる．よって，$\min_{q\in\Pi_B} E(p,q)$ は$20-30p_1>5p_1$ であれば $q_1=0$, $20-30p_1<5p_1$ であれば $q_1=1$ によって達成され，最小値はそれぞれ $5p_1, 20-30p_1$ となる．

図 2.1 (a)における太線が $\min_{q\in\Pi_B} E(p,q)$ の動きである．したがって，$\hat{p}=(4/7,3/7)$, $u_A=20/7$ となる．Bについても同様にして $\hat{q}=(1/7,6/7)$, $u_B=20/7$ が求まる．**図2.1**(b)を参照．

一般のゲームにおいては，問題を線形計画問題に変換し，それを解くことにより $\hat{p},\hat{q},u_A,u_B$ を求めることができる．詳しくは[1]を参照．

3. 展開形表現と情報構造の変化

ゲームのいま1つの表現形式は，木を用いてゲームの構造を表わす展開形表現である．例 **2.1** は図 **3.1** (a)のように表わされる．この図はゲームが左から右へ進む（つまり点aから出発する）ことを表わしており，各分岐点は各プレイヤーの意思決定を行なう点(手番)，分岐点から出る枝はその点における選択肢である．右端の数字は各選択肢がとられたときのAの利得である．ただし，この利得は (**2.3**) で与えられたものである．実線は各分岐点がどのプレイヤーの手番であるかを表わしており，プレイヤー集合，点線は各手番におけるプレイヤーの情報の状態を表わしており，情報集合と呼ばれる．

ここで点b, cがともに情報集合U_Bに含まれているのは，プレイヤーBが意思決定を行なうさい，この2点を識別できないこと，つまりAが α_1,α_2 のいずれを選択したかを知らずに自らの選択を行なうことを意味している．図 **3.1** (a)では便宜的にAの手番を先に書いてあるが，重要なのは情報集合であり，まったく同じゲームを図 **3.1** (b)のようにBの手番を先に書いて表現することができる．

さて，A, Bが互いに相手の選択を知らずに行動するのではなく，一方（たとえばB）が他方の選択の結果を知った後に自らの選択を行なう場合の両プレイヤーの行動はどうなるであろうか．図 **3.2** (a)がこの状況の展開表現である．ただし，Aは自らの選択の結果がBに知られていることを認識しているものとする．図 **3.1** (a)との違いはBの情報集合がU_{B1}, U_{B2}の2つに分れたことである．これはBが2点b, cを識別できることを表わしている．つまりBはAがα_1をとった場合，α_2を

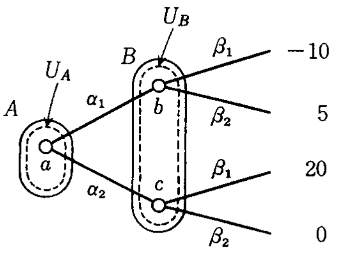

図 3.1 (a)

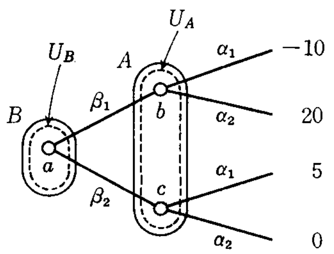

図 3.1 (b)

とった場合それぞれに β_1, β_2 のいずれかを選択することができ，彼の選択の場が広がることとなる．

この状況の戦略形表現は (3.1) で与えられる．B の戦略 (β_i, β_j) $i, j=1, 2$ は，A が α_1 をとった場合には（つまり点 b においては）β_i を，A が α_2 をとった場合（点 c において）は β_j をとることを表わしている．このゲームにおける A, B の最適戦略は $\alpha_2, (\beta_1, \beta_2)$ であり，マックスミニ値，ミニマックス値は 0 である．つまり，B は A の選択の結果を知って自らの選択を行なうというようにゲームの情報構造が変化したことにより，自らの利得を $-20/7$ から 0 に増すことができる．したがって，A の選択の結果を知るという情報は B にとって $0-(-20/7)=20/7$ だけの価値をもつことになる．図 3.2(b)は逆に B の選択の結果を知って A が行動する場合の展開形表現である．

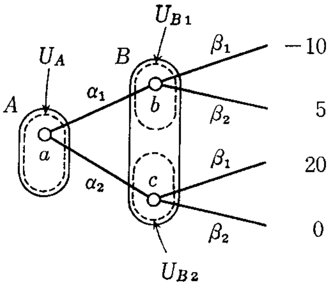

図 3.2 (a)

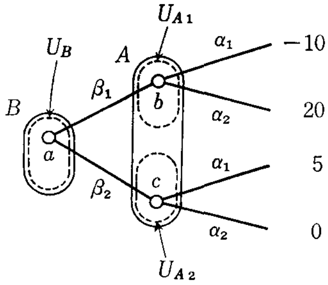

図 3.2 (b)

$A \backslash B$	(β_1, β_1)	(β_1, β_2)	(β_2, β_1)	(β_2, β_2)
α_1	-10	-10	5	5
α_2	20	0	20	0

(3.1)

この図をもとに，B の選択の結果を知るという情報は A にとってどれだけの価値をもつか考えてみていただきたい．なお 2 人定和ゲームにおいては，このようにしてとらえられた情報の価値は常にゼロ以上となることが知られている．

このように，展開形表現は戦略形表現より複雑な表現にはなるものの，ゲームの動き，情報構造の変化などを明確にする重要な表現形式である．

4. 2人非定和非協力ゲーム

非定和ゲームになるとプレイヤー間に協力によって両者の利得を増加できる可能性が生まれるから，非協力ゲームと協力ゲームとに分れる．本稿では，以下非協力ゲームについてのみ解説する．協力ゲームについては [1] を参照していただきたい．

例 4.1 同種の製品を販売している 2 つの企業 A, B がそれぞれ 2 つの販売政策 α_1, α_2, β_1, β_2 をもち，各政策がとられたときの A, B の利潤は，α_1, β_1 であれば 4000 万円，3000万円，α_1, β_2 であれば 2000万円，5000万円，α_2, β_1 であれば5000万円，4000万円，α_2, β_2 であれば1000 万円，2000万円と見積られているとする．A, B は利潤最大を目的とし，しかも互いに相手の選択の結果を知らずに自らの販売政策を決定するとき，両者はいかなる選択を行なえばよいであろうか．

この問題の利得行列は (4.1) で与えられる．まず，ミニマックス行動基準にもとづいて両者が行動する場合を考えてみよう．A, B のマックスミニ戦略はそれぞれ $\hat{p}=(1, 0)$（純戦略 α_1），$\hat{q}=(3/4, 1/4)$ であり，マックスミニ値は 2, 7/2 である．しかしながら，この戦略の組 $(\hat{p}, \hat{q})$ は安定な状態とはならない．実際，B のみが純戦略 β_2 に変えれば彼の利得は 5 に増加する．このようにミニマックス行動基準は，定和の場合と異なり，もはや最適な行動を与えない．

そこで，相手のとる戦略の下で自らの利得を最大にするという行動基準を考える．この基準を最適反応基準，これにもとづいてとられる戦略を最適反応戦略という．いま，互いに相手の戦略の最適反応戦略となるような戦略をとるという合意が 2 人のプレイヤーの間で得られれば，たとえそれが拘束力をもたない合意であったとしても，両者ともに自らの戦略を変える動機をもたず自律性をもった均衡状態となる．このような戦略の組をナッシュ均衡点という．一般に混合戦略の組 (p, q) における A, B の期待利得を $E_A(p, q)$, $E_B(p, q)$ と表わせば，ナッシュ均衡点は $E_A(p^*, q^*)=\max_{p \in \Pi_A} E(p, q^*)$, $E_B(p^*, q^*)=\max_{q \in \Pi_B} E(p^*, q)$ を満たす (p^*, q^*) である．

$A \backslash B$	β_1	β_2
α_1	(4, 3)	(2, 5)
α_2	(5, 4)	(1, 2)

(4.1)

（単位1000万円）

例 4.1 におけるナッシュ均衡点を求めてみよう．

A, B の混合戦略を $p=(p_1, 1-p_1)$, $q=(q_1, 1-q_1)$ $(0 \leqq p_1, q_1 \leqq 1)$ とすれば，$E_A(p, q)=p_1(2+2q_1)+(1-p_1)(1+4q_1)$ であり，A の最適反応戦略は $2+2q_1>1+4q_1$ $(q_1<1/2)$ であれば $p_1=1$ であり，$2+2q_1<1+4q_1 (q_1>1/2)$ であれば $p_1=0$ である．$2+2q_1=1+4q_1 (q_1=1/2)$ であれば任意の p_1 が最適反応戦略である．同様にして，

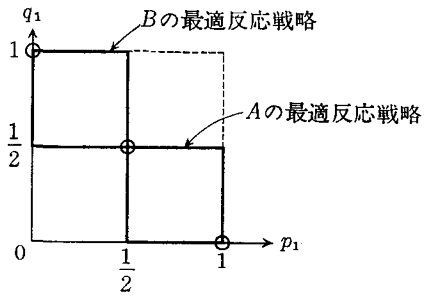

図 4.1

$E_B(p,q)=q_1(4-p_1)+(1-q_1)(2+3p_1)$ ゆえ，Bの最適反応戦略は $4-p_1>2+3p_1\,(p_1<1/2)$ であれば $q_1=1$, $4-p_1<2+3p_1(p_1>1/2)$であれば$q_1=0$である．$p_1=1/2$であれば任意のq_1が最適反応戦略である．両者の最適反応戦略の動きを図示したものが**図 4.1** である．

ナッシュ均衡点は互いに相手の戦略の最適反応戦略となるような戦略の組であるから図 4.1 の２つの折れ線の交点，つまり $((0,1),(1,0))$, $((1/2,1/2),(1/2,1/2))$, $((1,0),(0,1))$ の３点がナッシュ均衡点となる．そのときの利得は，それぞれ $(5,4),(3,7/2),(2,5)$ である．

このように，定和の場合と異なり，非定和ゲームにおいては均衡点および均衡点における利得は一般に唯１つには定まらない．

第３節におけると同様にして，非定和ゲームにおいても展開形表現をもとに情報の価値を考察することができる．ただし定和の場合と異なり，情報の価値は必ずしも常にゼロ以上となるとは限らないことが知られている．詳しくは[1]を参照．

３人以上のプレイヤーから成る非協力ゲームにおいても，ナッシュ均衡点は同様に定義できる．簡単にいえばどのプレイヤーも，他のすべてのプレイヤーが同じ戦略をとり続ける限り，自らの戦略を変えようとはしない戦略の組がナッシュ均衡点である．各プレイヤーが有限個の純戦略をもつn人非協力ゲームでは，混合戦略まで考えれば必ずナッシュ均衡点の存在することが示されている．

5. n人協力ゲーム

5.1 特性関数と提携形表現

３人以上のプレイヤーから成る協力ゲームにおいては，何人かのプレイヤーが拘束力ある合意にもとづき協力して戦略を決めることが生じる．このようなプレイヤーのグループを提携という．形式的には，プレイヤーの全体 $N=\{1,2,\cdots,n\}$ の部分集合Sを提携という．提携に属するプレイヤーが拘束力ある合意にもとづいてとるべき戦略を決定したとき，提携として獲得可能な利得あるいは利得のベクトルの集合が定まる．

このとき，譲渡可能効用が存在してプレイヤー間に利得の授受（別払い）が行なわれる場合とそうでない場合とがある．前者を別払いのあるゲーム，後者を別払いのないゲームという．

本稿では別払いのあるゲームについてのみ解説していくこととする．別払いのないゲームおよび譲渡可能効用については，[3] を参照していただきたい．別払いのあるゲームでは，提携が獲得可能な利得は１つの実数値で与えられる．各提携Sに対してこの獲得可能な値 $v(S)$ を与える関数vを特性関数という．空集合ϕに対しては $v(\phi)=0$ とする．プレイヤーの集合Nと特性関数vの組による協力ゲームの表現を，提携形表現もしくは特性関数形表現という．

例 5.1 企業内に 1,2,3 の３部門があり，ある用役を調達しようとしている．いま，各部門が単独で調達する場合には，それぞれ 700万円，550万円，650万円を要する．部門 1,2 が共同して調達する場合には1210万円，2,3 が共同した場合には1120万円とそれぞれ単独で調達する場合よりも費用を軽減できるが，1,3 は共同しても費用を軽減できず1350万円を要するとし，1,2,3 全部門が共同した場合には1700万円の費用を要するとする．このとき，各部門はいかに協力しあい，それぞれどれだけの費用を分担すればよいであろうか．

各提携が形成されたときの費用の軽減分に着目すれば，この例は次のような提携形協力ゲーム (N,v) として表現される．$N=\{1,2,3\}$, $v(\{1\})=v(\{2\})=v(\{3\})=0$, $v(\{1,2\})=40$, $v(\{1,3\})=0$, $v(\{2,3\})=80$, $v(\{1,2,3\})=200$．ここで，$v(\{1,2\})=40$ となっているのは，提携 $\{1,2\}$ が形成されることにより $(700+550)-1210=40$(万円)だけ費用を軽減できることによる．他も同様である．

この例では，$S\cap T=\phi$ となるすべての提携S, Tに関して，$v(S)+v(T)\leqq v(S\cup T)$なる関係が成立っている．このようなゲームを優加法的ゲームという．優加法的ゲームでは，２つの相交らない提携は協力してより大きな提携を形成した方がより大きな値を獲得することができ，したがって最も大きな全員提携Nが形成されることになる．現実の問題から特性関数をつくるとき，そのほとんどの場合，優加法性は満たされる．以下本稿でも優加法的ゲームのみを扱うこととする．

5.2 配分

優加法的ゲームにおける最大の問題は，全員提携Nが形成されたとき，各プレイヤーがいかなる利得を得るか，つまりどのような利得ベクトル$x=(x_1,\cdots,x_n)$が達成されるかである．このような利得ベクトルの満たすべき基本的な条件として，次の2条件を与える．

(1)　$x_1+\cdots+x_n=v(N)$,

(2)　$x_i \geqq v(\{i\})$ $i=1,\cdots,n$.

(1)は全員提携が形成されたときに達成される $v(N)$ は余すところなく分配されることを表わしており，全体合理性と，(2)は各プレイヤーの得る利得 x_i は彼が単独で獲得できる値$v(\{i\})$以上でなければならないことを表わしており，個人合理性と呼ばれる．この2条件を満たす利得ベクトルを配分と呼び，以下では配分の全体をAと表わすこととする．

$v(\{i\})=0$ $i=1,2,3$となる3人ゲームにおいては，配分の全体Aは図**5.1**の高さ $v(\{1,2,3\})$ の正三角形ABCで与えられる．点DにおいてDから底辺BC, AC, ABへの垂線の長さをそれぞれ x_1, x_2, x_3 とすれば，Dは配分$x=(x_1,x_2,x_3)$を表わす．実際，$x_i \geqq v(\{i\})=0$ $i=1,2,3$ となることは明らかであり，$x_1+x_2+x_3=v(\{1,2,3\})$ となることは，三角形ABD, BCD, CADの面積の和が正三角形ABCの面積と等しくなることから導かれる．この正三角形ABCを基本三角形という．

協力ゲームではさまざまな行動基準が与えられており，それぞれの行動基準にもとづいてさまざまな解が与えられている．

以下では，そのうち応用例の多いコア，最小コア，仁，シャープレイ値について解説する．その他の解については[1],[2],[3]を参照していただきたい．

5.3　コア

配分 $x=(x_1,\cdots,x_n)$と提携Sについて$e(S,x)=v(S)-\sum_{i\in S} x_i$とおくとき，もし$e(S,x)>0$となっていれば，$S$独自で $v(S)$ 獲得できるにもかかわらず配分xにおいてはそれよりも少ない利得しか得ておらず，提携Sは配分xに不満をもつであろう．したがって，Sを満足させるには $e(S,x)\leqq 0$ となっていなければならない．これを提携Sについての提携合理性といい，全員提携Nと空集合ϕを除くすべての提携について提携合理性を満たす配分の集合をコアという．コアをCと表わせば，$C=\{x\in A \mid e(S,x)\leqq 0, S\subsetneqq N, S\neq\phi\}$ である．

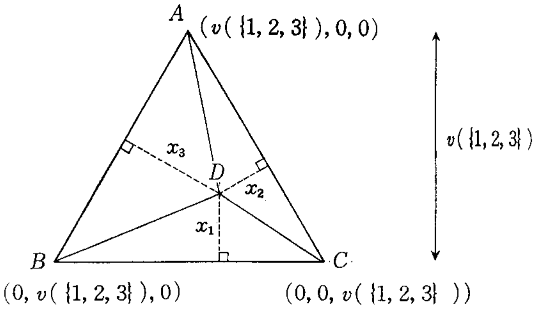

図 **5.1**

例**5.1**のコアは，$x_1+x_2+x_3=200$, $x_1,x_2,x_3\geqq 0$, $x_1+x_2\geqq 40$, $x_1+x_3\geqq 0$, $x_2+x_3\geqq 80$を満たす$x=(x_1,x_2,x_3)$の集合であり，図**5.2**の五角形$DBEFG$となる．コアに属する配分においては，$x_1\leqq 120, x_3\leqq 160$であり，このことは総費用軽減分200万円のうち，120万円以下の額が部門1に，そして160万円以下の額が部門3に割当てられる，つまり部門1，3はそれぞれ580万円，490万円以上を負担しなければならないことを表わしている．部門2は総費用軽減分200万円のすべてを獲得し350万円の負担で済むこともある．

例**5.1**においてはコアが存在したが，必ずしもそうなるとは限らない．たとえば3人ゲーム $v(\{1,2,3\})=v(\{1,2\})=v(\{1,3\})=v(\{2,3\})=1$, $v(\{1\})=v(\{2\})=v(\{3\})=0$ においては，コアは空である．実際，コアに属する配分を $x=(x_1,x_2,x_3)$ とすれば，提携 $\{1,2\},\{1,3\},\{2,3\}$ に関する提携合理性より $x_1+x_2+x_3\geqq 3/2$ とならねばならず，xが配分であることに反する．コアの存在条件については，[3] に詳しく述べられている．

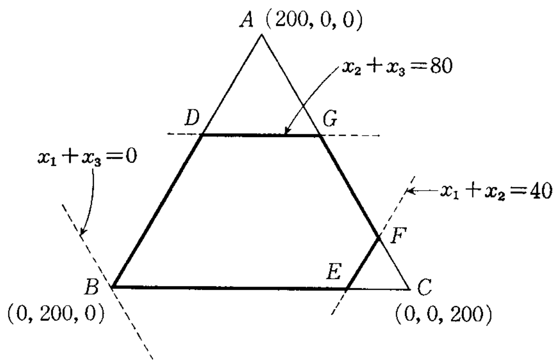

図 **5.2**

5.4　最小コア

コアはさまざまな分野で広く用いられているが，常に存在するとは限らず，また例**5.1**におけるようにかなり広い領域となることもあり，費用分担問題のように唯1つの解決案を与えたい場合には必ずしも十分なものとはいえない．

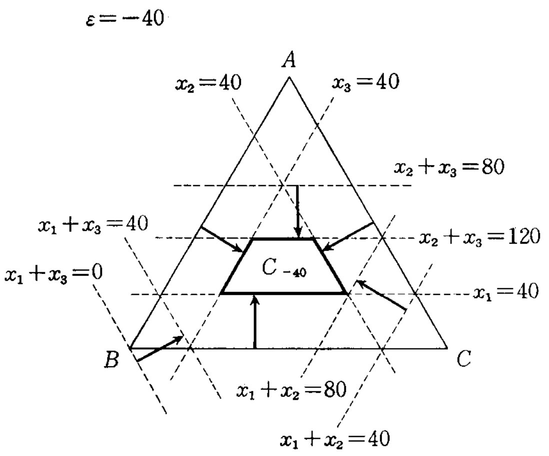

図 **5.3** (a)

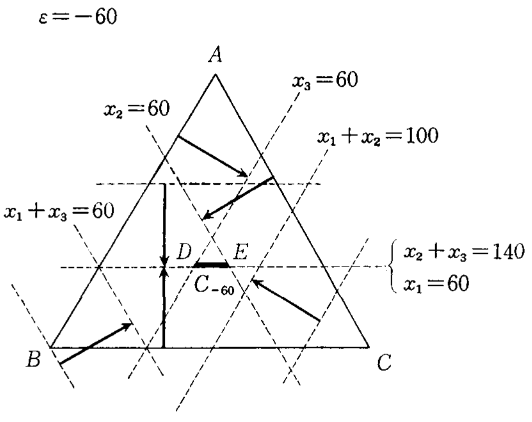

図 **5.3** (b)

いま個人合理性は1人提携についての提携合理性に他ならないから，全体合理性のみを満たす利得ベクトル（これを準配分と呼ぶ）の全体を $A^*=\{x=(x_1,\cdots,x_n)|x_1+\cdots+x_n=v(N)\}$ とすることにより，コアは $C=\{x\in A^*|e(S,x)\leqq 0,\ S\subsetneqq N, S\neq\phi\}$ と表わされる．ここで実数 ε をとり，$C_\varepsilon=\{x\in A^*|e(S,x)\leqq\varepsilon,\ S\subsetneqq N, S\neq\phi\}$ を考える．この C_ε を ε －コアという．$\varepsilon=0$ のときがコアである．

ε －コアは各提携の不満の量を ε 以下におさえる（$\varepsilon<0$ の場合には満足の量を $-\varepsilon$ 以上にする）準配分の全体である．たとえ $C=\phi$ であっても十分大きな ε をとれば $C_\varepsilon\neq\phi$ となり，逆に $C\neq\phi$ であっても十分小さな ε をとれば $C_\varepsilon=\phi$ となることは明らかであろう．つまり，コアが空であっても空でない ε －コアを作り出すことができ，コアの領域が広い場合には ε －コアを用いてその領域を狭めることができる．

このような ε －コアのうち，空でない最も小さなものを最小コアという．ε －コアは必ずしも配分空間 A の中に位置するとは限らないが，優加法的ゲームにおいては最小コアは必ず配分空間の中に含まれる．[3] を参照．さらに，定義から明らかなように，コアが非空であればコアに含まれる．

例 **5.1** の最小コアを求めてみよう．図 **5.3** (a), (b)は，それぞれ $\varepsilon=-40$, -60のときの ε －コアを図示したものである．図 **5.2**, **5.3** (a), (b)より，ε が小さくなるにつれ ε －コアが小さくなることがわかるであろう．$\varepsilon=-60$ のときの ε －コアは図 **5.3** (b) の線分 DE で与えられる．このときには直線 $x_1=60$と $x_2+x_3=140$がちょうど重なっているが，これ以上 ε が小さくなれば $x_1=-\varepsilon$ が $x_2+x_3=80-\varepsilon$ の上方にきてしまい，C_ε は空となる．したがって，最小コアは $C_{-60}=\{x=(x_1,x_2,x_3)|x_1=60, x_2+x_3=140, x_2,x_3\geqq 60\}$ である．最小コアによれば，総費用1700万円のうち，部門1は640万円，2，3 はそれぞれ490万円，590万円以下を負担することとなる．一般には，最小コアは線形計画問題を解いて求めることができる．

5.5 仁

最小コアは，各配分について各提携のもつ不満の量 $e(S,x)$ のうちの最大のものを考え，それを最小にする配分の集合である．この考えをさらに進め，2番目以降の不満の量についても考慮したものが仁である．

いま，配分 x について，全員提携 N と空集合 ϕ を除く 2^n-2 個の提携 S の不満の量 $e(S,x)$ を大きなものから順に並べたベクトルを $\theta(x)=(\theta_1(x),\cdots,\theta_{2^n-2}(x))$ $(\theta_1(x)\geqq\cdots\geqq\theta_{2^n-2}(x))$ とする．2つの配分 x,y について，$\theta(x)$ と $\theta(y)$ の対応する成分を大きなものから順に比較していって最初に異なる成分が $\theta_j(x)$, $\theta_j(y)$ であったとき，もし $\theta_j(x)<\theta_j(y)$ であれば，不満の量の小さい x の方が y よりも好ましいと考える．それよりも好ましい配分が存在しないような配分の集合を仁という．仁は常に存在し，しかも唯1つの配分から成ることが知られている．[1]，[2]を参照．さらに，その定義からわかるように仁は最小コアに含まれる．

例 **5.1** の仁を求めてみよう．仁は最小コアに含まれるから，まず最小コアに属する配分の集合，$x_1=60$, $x_2+x_3=140$, $x_2,x_3\geqq 60$ を考える．$x_3=140-x_2$ ゆえ，各提携の不満の量は，$e(\{1,2\},x)=-20-x_2$, $e(\{1,3\},x)=-200+x_2$, $e(\{2,3\},x)=-60$, $e(\{1\},x)=-60$, $e(\{2\},$

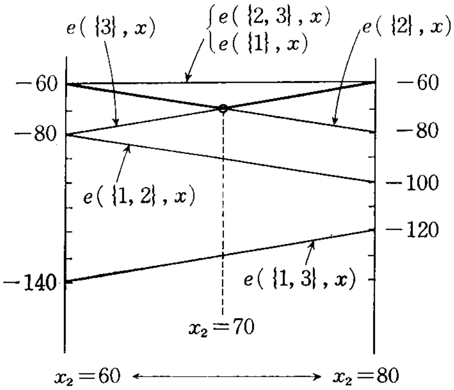

図 5.4

$x)=-x_2$, $e(\{3\},x)=-140+x_2$, ただし $60\leqq x_2\leqq 80$, となる．この $e(S,x)$ の値をまとめたものが**図 5.4** である．

この図からわかるように，提携 {2,3} および {1} の不満の量−60が常に最大である．3番目に大きな不満をもつ提携は $60\leqq x_2\leqq 70$では {2}，$70\leqq x_2\leqq 80$では {3} であり，不満の量は図の太線で表わされる．この3番目に大きな不満の量が最小となるのは $x_2=70$ のときであり，したがって，仁は $x_1=60$, $x_2=70$, $x_3=70$となる．仁にもとづく各部門の費用負担額はそれぞれ640万円，480万円，580万円となる．一般には，仁は線形計画問題をくりかえし解くことによって求めることができる．

5.6 シャープレイ値

これまで述べてきた解は，いずれも提携のもつ不満の量 $e(S,x)$ にもとづいて考えられたものであったが，シャープレイ値はこれらとは異なり，まずゲームの解が満たすべき4条件を考え，それらの条件を満たすものとして導出された解である．ただし，以下では4条件にはふれず，提携形成におけるプレイヤーの貢献度の観点からシャープレイ値を解説していく．4条件からのシャープレイ値の導出については，[1]を参照していただきたい．

いま，1人ずつプレイヤーが加わっていって全員提携が形成される過程を考えると，全部で $n!$ 通りの場合がある．1人のプレイヤー i と i を含まない提携 S を考えたとき，S に i が加わった場合の i の貢献度は，$v(S\cup\{i\})-v(S)$ である．上の $n!$ 通りの場合のうち，このような状況がおこるのは全部で $s!\times(n-s-1)!$通りある．s は S に含まれるプレイヤーの数である．**図 5.5** を参照．

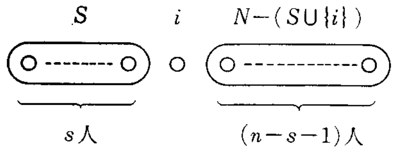

図 5.5

したがって，$n!$ 通りの全員提携形成の方法がすべて等確率でおこるとすれば，プレイヤー i の貢献度の平均値は

$$\phi_i=\frac{1}{n!}\sum_{S\subseteq N,\,S\not\ni i}[s!\times(n-s-1)!\times(v(S\cup\{i\})-v(S))]$$

となる．このようにして与えられる $\phi=(\phi_1,\cdots,\phi_n)$ をシャープレイ値という．優加法的ゲームにおいては，シャープレイ値は配分となることが知られている．

例 5.1 においては，$\phi=(280/6, 520/6, 400/6)$であり，シャープレイ値にもとづく部門 1, 2, 3 の費用分担額は，それぞれ$653\frac{1}{3}$万円，$463\frac{1}{3}$万円，$583\frac{1}{3}$万円となる．

6. むすび

本稿ではゲーム理論およびその解について，できる限り多くの図を用いながら解説してきたわけであるが，紙数の都合もあり省略した部分，説明が十分でなかった部分も少なくない．また，ゲーム理論の応用例についてもふれることができなかった．これらについては本稿末の参考文献を参照していただきたい．

参 考 文 献

[1] 鈴木光男,「ゲーム理論入門」, 共立出版, 1981年

[2] 鈴木光男・中村健二郎,「社会システム」, 共立出版, 1976年

[3] 鈴木光男・武藤滋夫,「協力ゲームの理論」, 東大出版会, 1985年

[4] 今井晴雄・小林孝雄, ゲーム理論と経済学, 経済セミナー, 1982年10月～1984年1月, 日本評論社

[5] 鈴木光男, ゲーム理論への招待, 経済セミナー, 1986年4月～1987年3月, 日本評論社

× × × × ×