整　数　計　画　法　——代数的解法の図解——

今野　浩　東京工業大学

次の整数計画問題：

$$\begin{cases} \text{最大化} & z=2x_1+x_2 \\ \text{条　件} & x_1+x_2\leqq 5 \\ & -x_1+x_2\leqq 0 \\ & 6x_1+2x_2\leqq 21 \\ & x_1, x_2 \text{ は非負整数} \end{cases} \qquad (1)$$

を考えよう．この問題の制約領域を示したのが図1である．また，斜線の領域の内部にある黒丸の点がこの問題の実行可能解である．

整数計画問題を解く第1歩は，整数条件を緩和した（とり外した）線形計画問題を解いてみることである．運良くその最適解が整数になっていれば，問題は（労せずして）解けたことになる．ところが問題(1)の場合，図1から明らかなとおり線形計画問題の最適解は

$$(\hat{x}_1, \hat{x}_2)=(11/4, 9/4)$$

だから，これをそのまま答として利用することはできない．

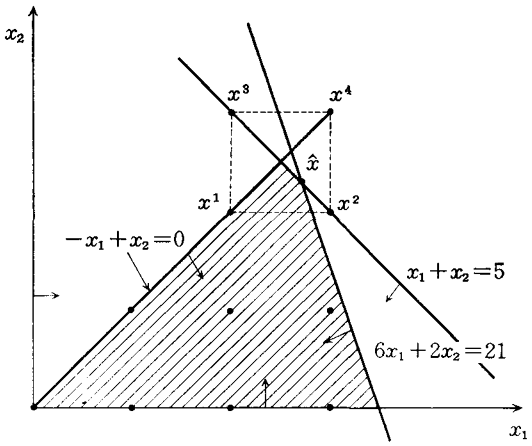

図 1

〔ヒューリスティックな解法〕

このような場合の最もナイーブな対処法は，$(\hat{x}_1, \hat{x}_2)$ の近傍に位置する整数点を調べてみることである．たとえば $\hat{x}_1, \hat{x}_2$ の小数部分を切り上げまたは切り捨てて4つの点

$$x^1=(2,2), x^2=(3,2), x^3=(2,3), x^4=(3,3)$$

を生成し，制約条件を満足するものの中で z の値が最も大きなもの，すなわち x^1 を最適解の候補とするといった種類の解法である．（図1参照）

このような方法は

（i）　得られた解が本当の最適解であるとは限らない

（ii）　変数の数 n が大きくなると，近傍のすべての点を調べるのは生易しいことではない

（iii）　制約領域が $\hat{x}$ の近傍で尖っていると，上の方法では1つも解が求まらない可能性がある

などの欠点をもっているが，もともと厳密な最適解が得られなくても良い場合や，変数が少ない場合には，このような方法を拡張したヒューリスティック解法もそれなりに役に立つものである．

〔切除平面法〕

上記のヒューリスティック解法はいわば運次第の方法であるが，より体系的に最適解を得るための方法が切除平面法である．

いま整数計画問題を一般的に

$$\begin{cases} \text{最大化} & z=\sum_{j=1}^{n} c_j x_j \\ \text{条　件} & \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \leqq a_{i0},\ i=1,\cdots,m \\ & x_j (j=1,\cdots n) \text{ は非負整数} \end{cases} \qquad (2)$$

と書き，この問題の整数条件を緩和した線形計画問題の最適解を $\hat{x}$ としよう．$\hat{x}$ が整数ベクトルでないときは

$$\sum_{j=1}^{n} \alpha_j \hat{x}_j < \alpha_0 \qquad (3)$$

を満たし，しかも(2)のすべての実行可能解 $\tilde{x}$ に対して

$$\sum_{j=1}^{n} \alpha_j \tilde{x}_j \geqq \alpha_0 \qquad (4)$$

となる1次式

$$\sum_{j=1}^{n} \alpha_j x_j = \alpha_0 \qquad (5)$$

を生成する．これらの条件を満たす1次式(5)を切除平面（カット）というが，このカットを追加した線形計画問題：

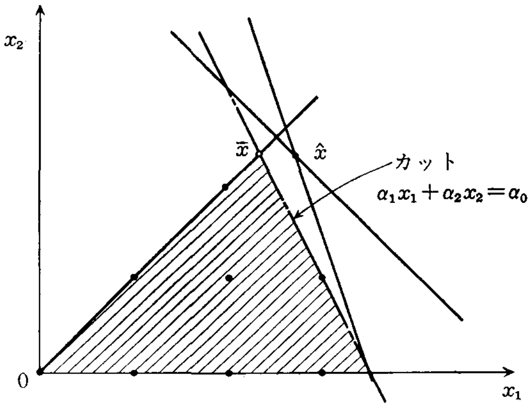

図 2

$$\begin{array}{ll} \text{最大化} & z=\sum_{j=1}^{n} c_j x_j \\ \text{条　件} & \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \leqq a_{i0},\ i=1,\cdots m \\ & \sum_{j=1}^{n} \alpha_j x_j \geqq \alpha_0 \\ & x_j \geqq 0,\ j=1,\cdots,n \end{array} \qquad (6)$$

を解き直す．そしてこの手続きを何回かくりかえせば，いずれ制約領域の内部に埋まっていた(2)の最適解x^*がむき出しになって問題が解けるだろう，というわけである（**図 2**）．

そこで以下では実例を用いて，より具体的にこれらのカットについて説明することにしよう．

〔Gomory カット〕

まず数あるカットの元祖である Gomory カットを説明しよう．問題 (1) の整数条件を緩和した線形計画問題にスラック変数 s_1, s_2, s_3 を導入して

$$\begin{array}{ll} \text{最大化} & z=2x_1+x_2 \\ \text{条　件} & x_1+x_2+s_1=5 \\ & -x_1+x_2+s_2=0 \\ & 6x_1+2x_2+s_3=21 \\ & x_1\geqq 0, x_2\geqq 0, s_1\geqq 0, s_2\geqq 0, s_3\geqq 0 \end{array} \qquad (7)$$

と書き，単体法によってこの問題の最適解$\hat{x}$に対応する基底形式表現を求めると

$$\begin{array}{ll} \text{最大化} & z=31/4-1/2s_1-1/4s_3 \\ \text{条　件} & x_1=11/4+1/2s_1-1/4s_3 \\ & x_2=9/4-3/2s_1+1/4s_3 \\ & s_2=1/2+2s_1-1/2s_3 \\ & x_1\geqq 0, x_2\geqq 0, s_1\geqq 0, s_2\geqq 0, s_3\geqq 0 \end{array} \qquad (8)$$

となる．

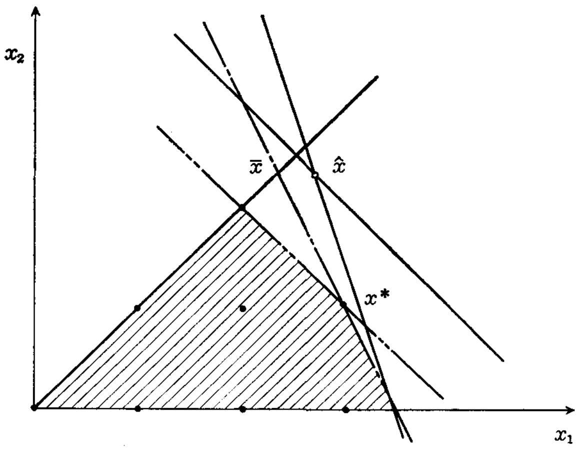

図 3

現在の解 $\hat{x}=(11/4, 9/4)$ は整数条件を満たしていないので，zの式

$$z=31/4-1/2s_1-1/4s_3$$

を取り出して，この式を次のように書き直そう：

$$z-7=3/4-1/2s_1-1/4s_3 \qquad (9)$$

この式の左辺は整数だから，右辺も整数でなくてはならない．ところが $s_1\geqq 0, s_3\geqq 0$ より，この右辺は 3/4 以下だから，結局

$$3/4-1/2s_1-1/4s_3\leqq 0 \qquad (10)$$

となる必要がある．これが Gomory カットである．ここで s_1 と s_3 をもとの変数 x_1, x_2 を使ってこの式を書き直すと

$$7-2x_1-x_2\geqq 0 \qquad (11)$$

となるが，これが図 2 の破線で示したカットである．

そこで図 2 の斜線部分を実行可能領域とする新たな線形計画問題を解くと，新しい解 $\bar{x}=(7/3, 7/3)$ を得る．ここで再び Gomory カットを生成すると不等式

$$4-x_1-x_2\geqq 0 \qquad (12)$$

が得られて，これを追加した線形計画問題を解くと整数解 $x^*=(3,1)$ が得られる（**図 3**）．この $\bar{x}^*$ が元の問題の最適解である．

Gomory カットは，これを有限回付け加えると必ず最適解がむき出しになって最適解が得られるのであるが，問題によってはきわめて多くの反復が必要となるため，これを単独で用いる算法は実用的でない，ということになっている．

〔交差カット〕

カットのもう 1 つの重要な用途として，これを分枝限定法でzの上界を求めるさいの役割がある [2]．この場

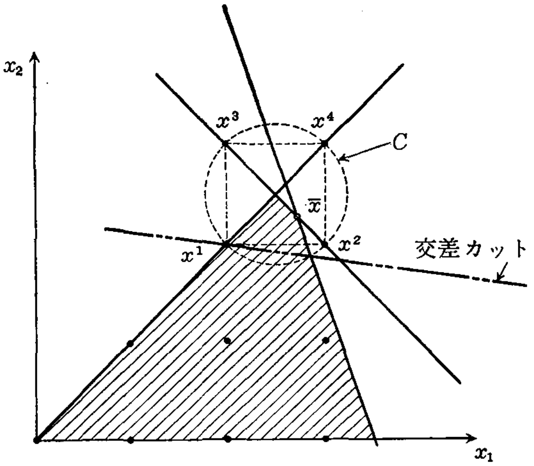

図 4

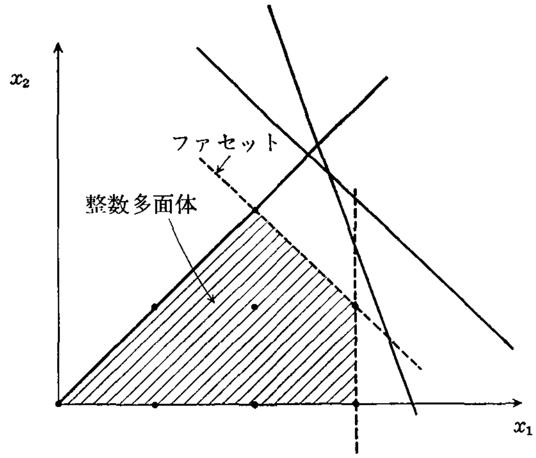

図 5

合カットは$\bar{x}$を含むなるべく（体積の）大きな領域を切り取る方が望ましい．そこで考えられたのが交差カットである．これは$\bar{x}$を含み内部に実行可能な整数点を1つも含まない凸集合Cを用意し，Cと実行可能領域の境界との交点を通る超平面をカットとして利用しようというものである．2次元の場合には，たとえば**図4**の破線で示したカットがその一例である．ここではCとして$\bar{x}$を内部に含む正方形の外接円を選んだが，内部に実行可能な整数点を含まないなるべく大きな凸集合を選ぶ方法がいろいろ工夫されている［1］．

〔ファセット・カット〕

カットの中で最も強力なものとして，実行可能な整数点のいくつかがその上にのっているようなものを考えることができる．このうち，実行可能領域の次元をlとしたとき，ちょうどl個のアフィン独立な整数点がのっているものを整数多面体のファセット(側面）という．(**図5**)

ファセットを求めるのは一般にはきわめてむずかしいが，問題によってはこれをうまく生成できる場合がある．その中で最もきわ立っているのが，0−1ナップサック多面体，すなわち

$$\{(x_1,\cdots,x_n)\mid\sum_{j=1}^{n}a_jx_j\leqq a_0,\ x_j\in\{0,1\},\ j=1,\cdots,n\} \tag{13}$$

の凸包のファセットである．この場合，ある種の組合せ的議論によって生成されるファセットをもとに，“持ち上げ”という技法を用いて多くのファセットを計算する方法が知られている．

ナップサック多面体のファセットを求める研究は，ひところ実務サイドに近い人々から「悪しきOR」の代表例として名ざして非難されたものであるが，80年代に入って大型の 0−1 整数計画問題の解法の中に取り入れられ，変数が3,000個を越える実用上の問題を軒並みに解くことに決定的な役割を果たして世間をあっと言わせたことは記憶に新しい[3]．

なお本稿の内容について，より詳しいことを知りたい読者は拙著［1］，［2］等を参照していただければ幸いである．

参 考 文 献

［1］ 今野 浩：整数計画法，産業図書，1981
［2］ 今野 浩，鈴木久敏編著：整数計画法と組合せ最適化，日科技連出版社，1982
［3］ 今野 浩：大規模数理計画法の現状，計測と制御 25(1986)223-228.

× × × × ×