

線形計画法における Vajda の図解と双対定理

柳井 浩 慶応義塾大学

1. はじめに

制約条件

$$(1) Ax \leq b$$

および非負条件

$$(2) x \geq 0$$

のもとで目的関数

$$(3) c^T x$$

を最大にするという線形計画問題の図解の方法としては変数 x の空間内に、許容領域となる多面体と目的関数の等高面を示すものがよく知られている[1]. この方法は特に $x \in \mathbb{R}^2$ の場合には、制約条件の数にかかわらず、すべてが座標平面上に画かれるので都合である。

これに対して、Vajda [2] は制約条件を与える行列 A のベクトルを用いる方法を示している。これだと座標平面上にすべてが画けるのは、制約条件が2個までの場合に限られるが、そのかわり変数の次元には制限がなくなる。さらに、この方法によれば、双対定理の図解も可能になる[3]. 本稿では、Vajdaの方法とこれにもとづく双対定理の図解を説明しよう。

2. Vajda の図解

制約条件

$$(4) \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} z_1 \\ z_2 \\ z_3 \end{bmatrix} \leq \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

および非負条件

$$(5) z_1, z_2, z_3 \geq 0$$

のもとで目的関数

$$(6) f = z_1 + z_2 + z_3$$

を最大にする線形計画問題を考えよう。ここで、制約条件(4)の右辺の要素と目的関数の係数がすべて1になっている。一般の形で与えられた線形計画問題をこの形に帰着させるには、制約条件(1)の右辺 b と、目的関数(3)の係数ベクトル c の要素がすべて正であれば、変数の単位を変更するだけでよい。また、そうでなくても、以下で述べる方法をちょっと手直しすれば、大概は同様の図

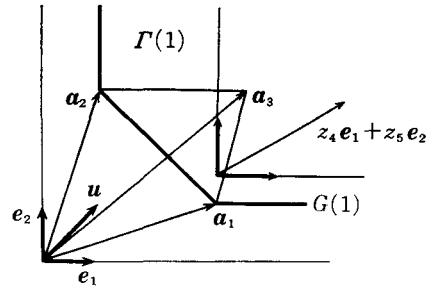


図1 制約条件

解が可能である。だから、このような問題に限って考えても、一般性が大幅に失われるわけではない。

さて、スラック変数 $z_4, z_5 \geq 0$ を導入して(4)式を次のように書きなおそう。

$$(7) z_1 a_1 + z_2 a_2 + z_3 a_3 + z_4 e_1 + z_5 e_2 = u$$

ここに、

$$(8) a_1 = \begin{bmatrix} a_{11} \\ a_{21} \end{bmatrix}, a_2 = \begin{bmatrix} a_{12} \\ a_{22} \end{bmatrix}, a_3 = \begin{bmatrix} a_{13} \\ a_{23} \end{bmatrix}$$

$$(9) e_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}, e_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}, u = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

である。図1には、これらのベクトルの一例が示してある。

いま、(7)式の左辺に注目して、点

$$(10) v = z_1 a_1 + z_2 a_2 + z_3 a_3 + z_4 e_1 + z_5 e_2$$

が位置しうる範囲を考えよう。特に、目的関数がある値 f (負にはなり得ない)をとる場合に、 v が位置し得る範囲を $\Gamma(f)$ と書くことにする。

$$(11) \Gamma(f) =$$

$$= \left\{ v \mid \begin{array}{l} v = z_1 a_1 + z_2 a_2 + z_3 a_3 + z_4 e_1 + z_5 e_2 \\ z_1 + z_2 + z_3 = f, z_1, z_2, \dots, z_5 \geq 0 \end{array} \right\}$$

われわれの線形計画問題は、(7)式を満たす非負の z_1, z_2, \dots, z_5 から適当なものを選んで目的関数(6)を最大にすることだから、この問題は

$$(12) u \in \Gamma(f)$$

となる最大の f を求めることと言いかえることができる。

まず $f=1$ の場合について $\Gamma(f)$ の形を調べてみよう。

スラック変数 z_4 および z_5 をゼロとおけば

$$(13) \quad v = z_1 a_1 + z_2 a_2 + z_3 a_3 \\ z_1 + z_2 + z_3 = 1 \\ z_1, z_2, z_3 \geq 0$$

となるから、点 v の位置する範囲は 3 点 a_1, a_2, a_3 の凸結合、すなわちこれらが作る 3 角形の辺および内部の点である。さらに、 z_4, z_5 が非負の値をとれば、点

$$(10再) \quad v = z_1 a_1 + z_2 a_2 + z_3 a_3 + z_4 e_1 + z_5 e_2$$

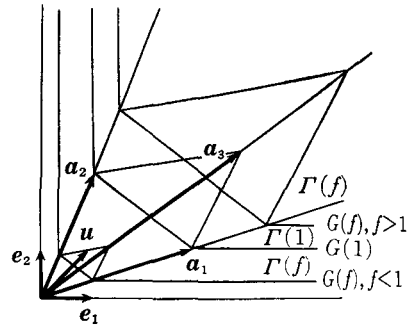
は 3 角形の各点の右および上側の部分ならどこにでも位置しうる。したがって、 $\Gamma(1)$ は図 1 の太い折れ線 $G(1)$ の右上の部分になる。

次に、目的関数が一般の値 f をとる場合の $\Gamma(f)$ は、座標原点を相似の中心として $\Gamma(1)$ を倍率 f で拡大または縮小したものになる。(10) 式で与えられる $\Gamma(1)$ の点の、変数 z_1, z_2, \dots, z_5 の各々を f 倍して作った点が $\Gamma(f)$ の点となるからである。

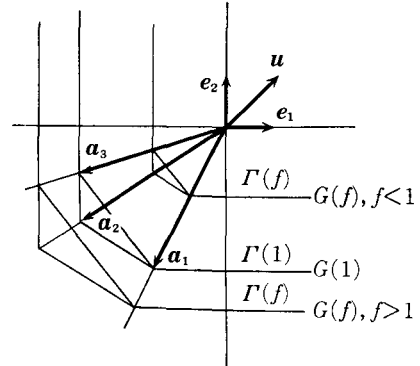
$\Gamma(f)$ の形は、図 2 に示すように a_1, a_2, a_3 の位置関係によってさまざまであるが、いずれの場合にしても、 f を非負の範囲で充分小さくとれば第 1 象限とほとんど一致するようになるから、(12) 式が成立するような f が存在する。いいかえれば、われわれの線形計画問題(4)、(5)、(6)には常に許容解が存在する。

さて、われわれの問題は $u \in \Gamma(f)$ となるような最大の f を求めることであった。たとえば図 2 の (b) のようにベクトル a_1, a_2, a_3 のいずれかが第 3 象限に含まれる場合には、 $f(\geq 0)$ の値の如何にかかわらず u は $\Gamma(f)$ の中に含まれている。したがって f の値をどんなに大きくすることも可能である。いいかえれば、この場合には最大値が有限の値をとらないことがわかる。

これに対して、図 2 の (a) のような場合には、 f の値が大きすぎれば、 u は $\Gamma(f)$ に含まれない。 f の値がさらに大きくなれば、 $\Gamma(f)$ もさらに u から遠ざかる。 u が $\Gamma(f)$ に含まれるような最大の f は、したがって、点 u が $\Gamma(f)$



(a) 最大値が有限の場合



(b) 最大値が無限大の場合

図 2 $\Gamma(f)$ の形

のへり $G(f)$ 上にあるときに実現される。いいかえれば、そのような f は、 $G(1)$ を座標原点を相似の中心として、縮小または拡大して、 u の終点がちょうどその上に乗る時の倍率として求められる。さらに逆にいえば、 u を含む直線が $G(1)$ と交わる点が

$$(14) \quad \lambda u \in G(1)$$

として得られるとき、 f の最大値は

$$(15) \quad f = \frac{1}{\lambda}$$

となる。また、この点が a_1, a_2, a_3, e_1, e_2 の線形結合

$$(16) \quad \lambda u = \xi_1 a_1 + \xi_2 a_2 + \xi_3 a_3 + \xi_4 e_1 + \xi_5 e_2$$

として得られれば、

$$(17) \quad z_i = \frac{1}{\lambda} \xi_i$$

が最適解となる。(図 3)

3. 双対問題、双対定理

いま、次の線形計画問題を主問題と呼ぼう。

《主問題》

制約条件

$$(18) \quad \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} \leq \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

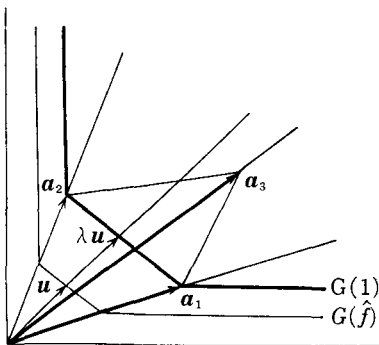


図 3 最適解の求め方

および非負条件

$$(19) x_1 \geq 0, x_2 \geq 0$$

のもとで目的関数

$$(20) f = x_1 + x_2$$

を最大にすること。

これに対して、次の問題を双対問題と呼ぶ。

《双対問題》

制約条件

$$(21) \begin{bmatrix} a_{11} & a_{21} \\ a_{12} & a_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix} \geq \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

および非負条件

$$(22) y_1 \geq 0, y_2 \geq 0$$

のもとで目的関数

$$(23) g = y_1 + y_2$$

を最小にすること。

両問題の間には次のような関係がある：(i) 制約条件の行列が転置されている。(ii) 制約条件の不等号の向きが反対になっている。(iii) 主問題では目的関数の最大が求められたが、双対問題では最小が求められる。(iv) 目的関数の係数は、互いに他の問題の制約条件の右辺の要素になっている。もっともここでは、制約条件の右辺の要素がすべて1で目的関数の係数も1になるように問題が整理されているので区別がつかない。このように問題を整理したのは、いうまでもなく、前節の図解法を適用するためである。

前節にならって、スラック変数を導入してこれらの問題を書きなおしておこう。

《主問題》

制約条件

$$(24) x_1 p_1 + x_2 p_2 + x_3 e_1 + x_4 e_2 = u$$

および非負条件

$$(25) x_1, x_2, x_3, x_4 \geq 0$$

のもとで目的関数

$$(26) f = x_1 + x_2$$

を最大にすること。ここに、

$$(27) p_1 = \begin{bmatrix} a_{11} \\ a_{21} \end{bmatrix}, p_2 = \begin{bmatrix} a_{12} \\ a_{22} \end{bmatrix}$$

《双対問題》

制約条件

$$(28) y_1 d_1 + y_2 d_2 - y_3 e_1 - y_4 e_2 = u$$

および非負条件

$$(29) y_1, y_2, y_3, y_4 \geq 0$$

のもとで目的関数

$$(30) g = y_1 + y_2$$

を最小にすること。ここに、

$$(31) d_1 = \begin{bmatrix} a_{11} \\ a_{12} \end{bmatrix}, d_2 = \begin{bmatrix} a_{21} \\ a_{22} \end{bmatrix}$$

なお、(24)および(27)式において

$$(32) e_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}, e_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}, u = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

である。

さらにここでも、目的関数が一定値をとるとき制約条件の左辺がとり得る点の集合を考えて問題を書きなおそう。

《主問題》

$$(33) u \in \Gamma_p(f)$$

となる最大の f を求めること。ここに

$$(34) \Gamma_p(g) = \left\{ v \begin{cases} v = x_1 p_1 + x_2 p_2 + x_3 e_1 + x_4 e_2 \\ x_1 + x_2 = g, x_1, x_2, x_3, x_4 \geq 0 \end{cases} \right\}$$

また、 $\Gamma_p(f)$ のへりを $G_p(f)$ とかく。

《双対問題》

$$(35) u \in \Gamma_d(g)$$

となる最小の g を求めること。ここに

$$(36) \Gamma_d(f) = \left\{ w \begin{cases} w = y_1 d_1 + y_2 d_2 - y_3 e_1 - y_4 e_2 \\ y_1 + y_2 = f, y_1, y_2, y_3, y_4 \geq 0 \end{cases} \right\}$$

また、 $\Gamma_p(f)$ のへりを $G_d(f)$ とかく。

主問題は前節とまったく同様の方法で図解される： u を含む直線が $\Gamma_p(1)$ のへり $G_p(1)$ と交わる点が

$$(37) \lambda u \in G_p(1)$$

であれば、目的関数 f の最大値は

$$(38) \hat{f} = \frac{1}{\lambda}$$

として得られる。

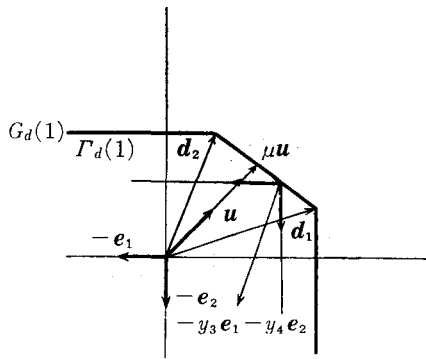
双対問題の図解も同じ要領であるが、制約条件の左辺において、スラック変数の符号がマイナスになっているので、 $\Gamma_d(1)$ は d_1 および d_2 のつくる凸結合およびその左下側の部分ということになる。(図4) 目的関数 g の一般の値に対する $\Gamma_d(g)$ も、座標原点を相似の中心として $\Gamma_d(1)$ を倍率 g で拡大または縮小して得られる。最小値を求める方法も主問題と同様で、ベクトル u を含む直線が $\Gamma_d(1)$ のへり $G_d(1)$ と交わる点

$$(39) \mu u \in G_d(1)$$

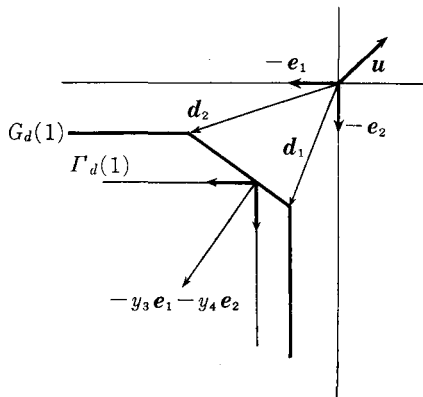
を求めれば、 g の最小値は

$$(40) \hat{g} = \frac{1}{\mu}$$

として得られる。最適解も(16)、(17)式の場合と同様で



(a) 許容解がある場合



(b) 許容解がない場合

図4 双対問題の図解

ある。

ただ、双対問題の図解で注意しなければならないことは、(21)(22)式に対し許容解が存在しない場合があり得ることである。実際、 $g (\geq 0)$ を小さくしてゼロに近づけても $\Gamma_d(g)$ は第3象限にほとんど一致するようになるだけであるから、図4(b)の場合のように d_1, d_2 のどれも第1象限に位置しない場合には、 $g (\geq 0)$ にいかなる値を与えても $\Gamma_d(g)$ が第1象限にあるベクトル u を含むことはあり得ないのである。

さて、双対定理の図解に進もう。周知のとおり、双対定理の主張は次のとおりである。

《双対定理》

(i) 主問題の最大値が無限大のとき、双対問題は解をもたない。

(ii) 主問題が有限の最適解をもつとき、
主問題の目的関数 \leq 双対問題の目的関数
主問題の最大値 = 双対問題の最小値

これらを図上で確かめるには、主問題と双対問題を重

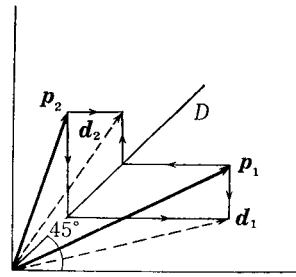


図5 主問題の図から双対問題の図を作る方法

ねて書いてみればよい。主問題の制約条件を与えるベクトル p_1 および p_2 から、双対問題のベクトル d_1 および d_2 を作図するには、補助線として45°線 D を準備しておくことよい。双対問題の制約条件の行列は主問題のそれを転置して得られるものであるから、 d_1 の終点は p_1 を通る垂直線と、 p_2 を通る垂直線と D との交点を通る水平線と、の交点に位置する。また、 d_2 の終点は p_2 を通る水平線と、 p_1 を通る水平線と D との交点を通る垂直線と、の交点に位置する。(図5)

双対定理の第1の主張は次のように図解される。すでに前節で述べたように、主問題のベクトル p_1, p_2 のいずれかが第3象限に入ると $\Gamma_p(f)$ がつねに第1象限、したがってベクトル u を含むので目的関数の値 f は無制限に大きくなりうる。ところで図6に示すように、 p_1 が第3象限に位置するなら、 d_1, d_2 は第2および第3象限を通る垂直線上に終点をもつ。また、 p_2 が第3象限に位置するなら、 d_1, d_2 は第3および第4象限を通る水平線上に終点をもつ。いずれの場合にせよ、 d_1, d_2 のいずれも第1象限には位置しない。したがって、本節ですでに述べたように、 g にいかなる値を与えても $\Gamma_d(g)$ はベクトル u を含み得ない。すなわち、双対問題は許容解をもたない。

双対定理の第2の主張の図解の基礎となるのは、 u を含む直線(補助線 D)が $G_p(1)$ と交わる点と、 $G_d(1)$ と交わる点と、が一致するという事実である。(図7)この事実を確かめるのは後にして、とりあえずこれを認めれば双対定理の第2の主張の幾何学的意味は明らかである。実際、すでに主問題および双対問題の図解法で述べたように、

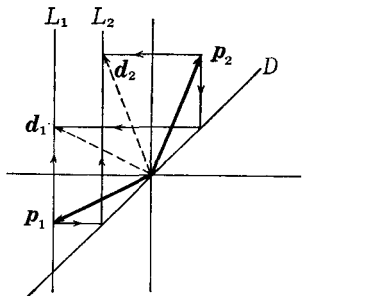
$$(41) \lambda u \in G_p(1)$$

$$(42) \mu u \in G_d(1)$$

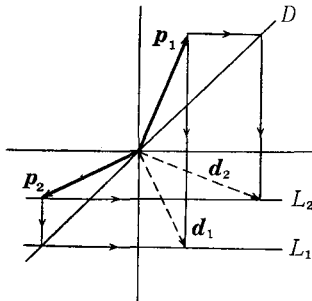
であるとき、

$$(43) f \leq \max f = \frac{1}{\lambda}$$

$$(44) g \geq \min g = \frac{1}{\mu}$$



p_1 が第3象限に位置すれば、 d_1, d_2 は第2～第3象限に位置する



p_2 が第3象限に位置すれば、 d_1, d_2 は第3～第4象限に位置する。

図6 p_1, p_2 のいずれかが第3象限にあると、 d_1, d_2 はいずれも第1象限にはない

である。だから、両交点が一致して

$$(45) \lambda u = \mu u$$

ならば、 $\lambda = \mu$ であるから

$$(46) f \leq \max f = \min g \leq g$$

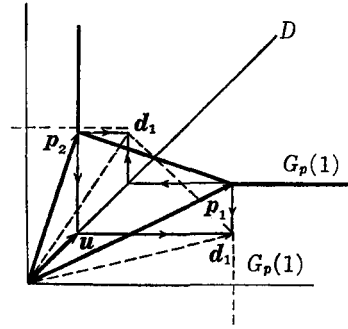
は明らかである。すなわち双対定理の第2の主張である。

さて、両交点が一致する事実を確かめよう。図7(b)のように、 $G_p(1)$ や $G_d(1)$ がその水平部分や垂直部分で D と交わる場合には、これらの一致はほとんど明らかである。 p_1, p_2 から補助線 D を使って d_1, d_2 を作るやり方そのものが、両交点の一致をもたらしているからである。

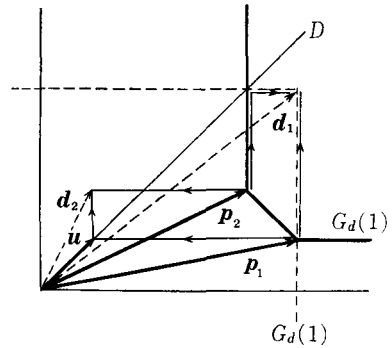
交点が p_1 と p_2 の凸結合や d_1 と d_2 の凸結合の部分に位置する場合の両交点の一致は、パップスの定理を用いれば簡単に証明できる。パップスの定理は、射影幾何学における有名なバスカルの定理の特殊な場合であるが、4世紀以来知られている古い定理である。

《パップスの定理》[4]

任意の2直線 l_1 および l_2 がある。直線 l_1 上に任意の3点 α, β, γ ; 直線 l_2 上任意の3点 ρ, σ, τ をとり、直線 $\alpha\sigma$ および $\rho\beta$ の交点を X 、直線 $\alpha\tau$ および $\rho\gamma$ の交点を Y 、直線 $\beta\tau$ および $\sigma\gamma$ の交点を Z とする。このとき3点 XYZ は一直線上に位置する。(図8) ■



(a)



(b)

図7 $\max f = \min g$

この定理を適用して、両交点の一致を確かめよう。図9において、 p_1 および d_1 の終点を通る垂直線を l_1 、 p_2 および d_2 の終点を通る水平線を l_2 とする。 l_1 上、 p_1 の終点を α 、 d_1 の終点を β 、無限遠点を γ とする; l_2 上、 d_2 の終点を ρ 、 p_2 の終点を σ 、無限遠点を τ とする。こうすると対応する交点 X, Y, Z が上記の定理により一直線上にならぶ。

ところが、補助線 D を使って p_1, p_2 から d_1, d_2 を作る過程を考えれば、点 Y および Z は D 上にある。したがって点 X も D 上に位置する。そしてこの点 X は p_1, p_2 の凸結合と d_1, d_2 の凸結合の交点である。すなわち、 $G_p(1)$ 、 $G_d(1)$ および u を含む直線は1点で交わることがわかった。

参考文献

- [1] 福川忠昭「線形計画法から多目的・多目標計画法へ」本誌、本号
- [2] Vajda, S. "The Theory of Games and Linear Programming," Methuen, 1958

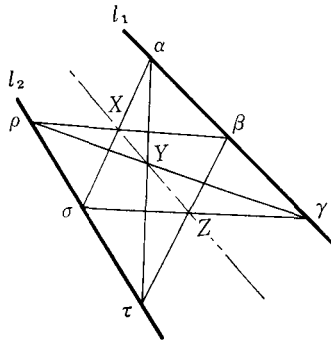


図 8 パップスの定理, 3点X, Y, Zは一直線上に位置する。

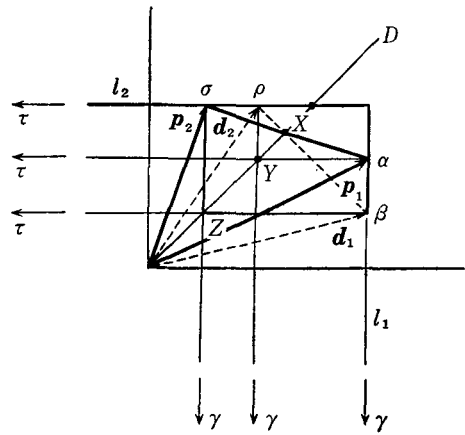


図 9 $G_p(1), G_a(1)$ と D が1点で交わることの証明

[3] 柳井浩「線形計画法に於ける双対定理の図解」日本オペレーションズ・リサーチ学会アブストラクト集, 1985, 秋季

[4] 津田文夫「射影幾何」共立, 1981

損益分岐点分析と感度分析

中村 善太郎 慶応義塾大学

1. 利益図表の役立ち

図 1 に示すのが「利益図表」と呼ばれているものである。利益計画を作成するときなどに良く使われているわかりやすい単純な図である。横軸が操業度あるいは販売量、縦軸は収益と費用を表わしている。販売量を Q 、販売価格を P 、変動費単価を V 、固定費を F で記しておこう。販売量 Q の上に収益 $R = P \times Q$ をとって点 $R = (Q, P \times Q)$ を定める。原点と点 R を結ぶ直線が収益線で、この線の傾斜は販売価格 P になる。次に、販売量 Q の上に費用 $C = F + V \times Q$ をとって点 $C = (Q, F + V \times Q)$ を定め、縦軸に F の高さで点 $F = (0, F)$ をとり、点 C と点 F を結ぶと費用線が描かれる。この費用線の傾斜は変動費単価 V になる。

販売量 Q の値に応じて利益 π の大きさが変わる様子が収益線と費用線の差の部分に表わされている。収益線と費用線の交点 B で利益がちょうど0になる。そのときの販売量 Q^* がいわゆる「損益分岐点」である。式で示すと次のようになる。

$$Q^* = F / (P - V) \quad (1)$$

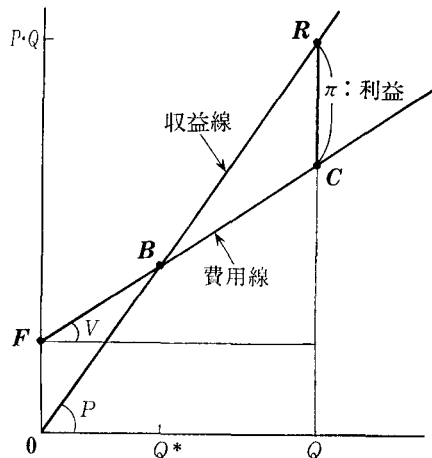


図 1 利益図表

損益分岐点が変わると、販売市場が利益を確保できるものか否かの判断や販売の努力目標を決めるのを助ける。目標利益を達成するのに必要な販売量も図から読める。費用や価格などの条件の変化による利益額の動きも図の上で検討できる。