双対問題とは？

鈴木　久敏　東京工業大学

1. はじめに

線形計画法(以下ＬＰと略称する)を勉強すると，必ず出てくるのが**双対定理**である．たとえば，次の最大化問題

$$
[\mathrm{P}]\quad \begin{array}{ll} \text{最大化} & \boldsymbol{c}^T\boldsymbol{x} \\ \text{条件} & A\boldsymbol{x}\leqq \boldsymbol{b} \\ & \boldsymbol{x}\geqq \boldsymbol{0} \end{array}
$$

が与えられたとき，この問題に対応して最小化問題

$$
[\mathrm{D}]\quad \begin{array}{ll} \text{最小化} & \boldsymbol{b}^T\boldsymbol{y} \\ \text{条件} & A^T\boldsymbol{y}\geqq \boldsymbol{c} \\ & \boldsymbol{y}\geqq \boldsymbol{0} \end{array}
$$

が定義され，前者の問題[Ｐ]が**主問題**，後者の問題[Ｄ]が[Ｐ]の双対問題と呼ばれる．問題[Ｐ]と問題[Ｄ]は互いに表裏の関係にあり，[Ｄ]を主問題と考えればその双対問題は[Ｐ]となる．

このとき，上の２つの最適化問題[Ｐ]と[Ｄ]の間に以下の定理

> 双対定理
> (1) 主問題[Ｐ]とその双対問題[Ｄ]がともに許容解をもつならば，それぞれの問題に目的関数の値が有限な値をもつ最適解が存在する．またそのときそれらの最適解での目的関数の値が互いに一致する．
> (2) 主問題[Ｐ]が非有界ならば双対問題[Ｄ]に許容解が存在しない．
> (3) 双対問題[Ｄ]が非有界ならば主問題[Ｐ]に許容解が存在しない．

が成立することが知られている．

なお，主問題[Ｐ](双対問題[Ｄ])が**非有界**とは目的関数の値を限りなく大きく(小さく)する許容解が存在することである．この双対定理や双対問題の経済学的解釈については，ごく初歩的な線形計画法の教科書に書かれているので読まれたこともあろうし，また学生時代に講義で聞いた覚えのある諸氏も多いことであろう．

ところが不思議なことに，

『問題[Ｐ]の双対問題が，なぜ[Ｄ]の形で定義されるのか？』

『等号制約の問題に対する双対変数に，なぜ非負条件がつかないのか？』

『一方の問題が非有界のとき，なぜ他方の問題に許容解が存在しないのか？』

について，やさしく記述した教科書に出会ったことがない．

そこでこの小文では，双対問題[Ｄ]が主問題[Ｐ]の空間から見てどのような関係にあるのかを幾何学的に説明してみようと思う．

2. 簡単な例題

具体例として，次の

主問題[Ｐ]：

$$
\begin{array}{llr}
\text{最大化} & x_1+2x_2 & (0)\\
\text{条件} & x_1+4x_2\leqq 32 & (1)\\
 & 5x_1+2x_2\leqq 34 & (2)\\
 & 2x_1-x_2\leqq 10 & (3)\\
 & x_1\geqq 0 & (4)\\
 & x_2\geqq 0 & (5)
\end{array}
$$

を考えてみよう．主問題[Ｐ]を x_1-x_2 の２次元平面に図示すると図１のようになる．破線 L_0 が目的関数の値が一定になる点 (x_1, x_2) 集合であり，制約条件式(1)～(5)はそれぞれ直線 L_1～L_5 の片側の領域を示しているから，直線 L_1～L_5 で囲まれたアミカケの凸多角形Ｓが主問題[Ｐ]の**許容領域**となる．

図から明らかなように，最適解が直線 L_1 と L_2 の交点 Ｐ＝(４，７)で与えられ，そのときの目的関数の値が18であることがわかる．

もちろん，[Ｐ]の双対問題は

双対問題[Ｄ]：

$$
\begin{array}{llr}
\text{最小化} & 32y_1+34y_2+10y_3 & (0')\\
\text{条件} & y_1+5y_2+2y_3\geqq 1 & (1')\\
 & 4y_1+2y_2-y_3\geqq 2 & (2')\\
 & y_1\geqq 0 & (3')\\
 & y_2\geqq 0 & (4')\\
 & y_3\geqq 0 & (5')
\end{array}
$$

となり，双対問題[Ｄ]の最適解は(4/9, 1/9, 0)である．

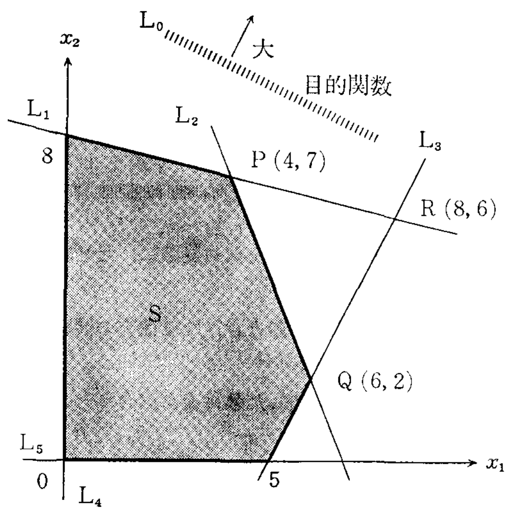


図 1　主問題[P]

なお話を簡単にするため，以下の議論では主問題[P]の許容領域SがS≠φ，すなわち主問題に許容解が存在すると仮定しておく．また，あわせて非退化の仮定もおくことにする．

3.　制約条件式の合成

さて，制約条件式(1)と(2)を加えてできる新たな1次不等式

$$
\begin{array}{rr}
 & x_1+4x_2\leqq 32 \\
+) & 5x_1+2x_2\leqq 34 \\
\hline
 & 6x_1+6x_2\leqq 66
\end{array}
\qquad (6)
$$

を考えてみよう．この新しい不等式を図示すると，図2(a)のように交点Pを通る傾きが−1の直線H_1を境界とする許容領域側の半空間となる．

次に，制約条件式(1)に(4/9)倍の重み，制約条件式(2)に(1/9)倍の重みを課して加えると，新たな1次不等式

$$
\begin{array}{rrl}
 & x_1+4x_2\leqq 32 & \times(4/9) \\
+) & 5x_1+2x_2\leqq 34 & \times(1/9) \\
\hline
 & x_1+2x_2\leqq 18 &
\end{array}
\qquad (7)
$$

が得られる．同様に，この新しい不等式を図示すると，図2(b)のような，これまた交点Pを通る傾き(−1/2)の直線H_2を境界とする許容領域側の半空間となる．

一般に，このようにして他の制約条件式の線形結合から導かれる新たな制約条件式は**合成制約式**と呼ばれている．合成制約式を作るとき，各制約条件式に課する重みをいろいろ変えてみると，どうなるであろうか？

(性質1) 制約条件式(1)にw_1倍($w_1\geqq 0$)の重み，制約条件式(2)にw_2倍($w_2\geqq 0$)の重みを課して加えてできる合成制約式は，交点Pを通り，傾きが直線L_1とL_2に挟まれた直線を境界とする許容領域側の半空間となる

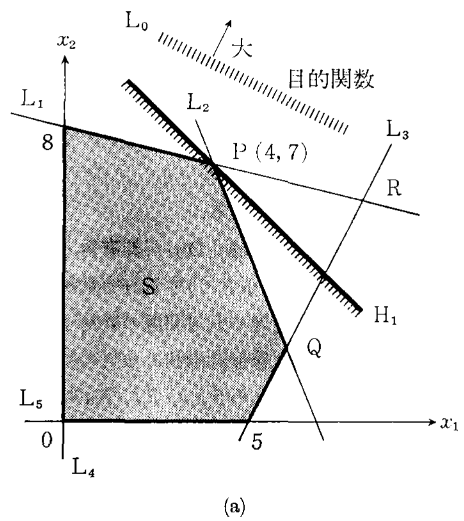
次に，制約条件式(1)に(5/18)倍，制約条件式(2)に(1/18)倍，制約条件式(3)に(4/18)倍の重みを課して加えると，新たな1次不等式

$$
\begin{array}{rrl}
 & x_1+4x_2\leqq 32 & \times(5/18) \\
 & 5x_1+2x_2\leqq 34 & \times(1/18) \\
+) & 2x_1-x_2\leqq 10 & \times(4/18) \\
\hline
 & x_1+x_2\leqq 13 &
\end{array}
\qquad (8)
$$

が得られる．同様に，この新しい不等式を図示すると図2(c)の直線H_3を境界とする許容領域側の半空間となる．再び，各制約条件式に課する重みをいろいろ変えてみると，どうなるであろうか？

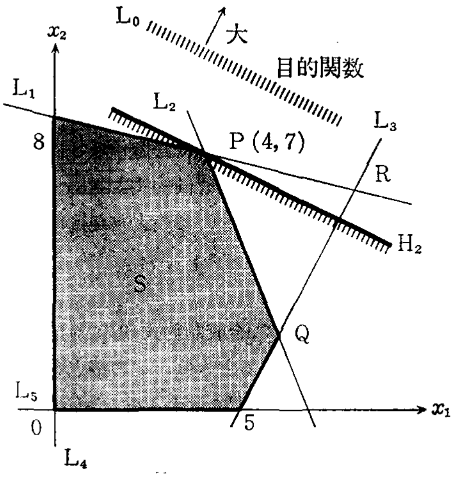
(性質2) 制約条件式(1)にw_1倍($w_1\geqq 0$)の重み，制約条件式(2)にw_2倍($w_2\geqq 0$)の重み，制約条件式(3)にw_3倍($w_3\geqq 0$)の重みを課して加えてできる合成制約式は，許容領域Sの内部と交わらず，かつ三角形PQRの一部を通り，傾きが直線L_1からL_3に挟まれた直線を境界とする許容領域側の半空間となる．

変数x_1, x_2の非負制約式(4)，(5)も制約条件式の1つであるから，式(1)～(5)の各式にw_i倍($w_i\geqq 0$, $i=1,\cdots,5$)の重みを課して，他の式に加えた式

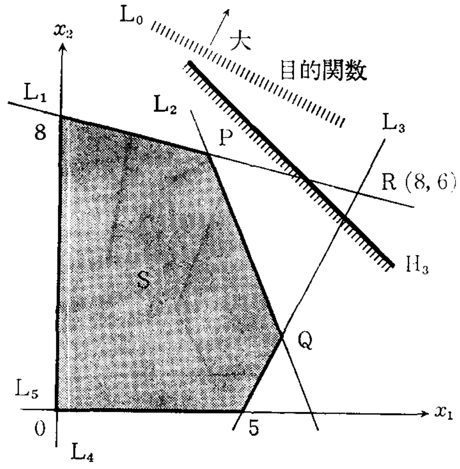


(a)

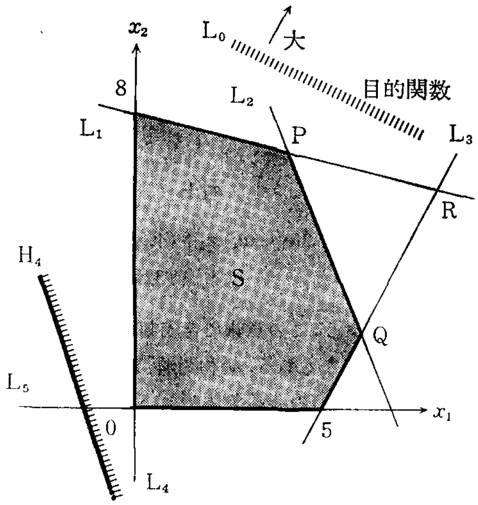
図 2　合成制約式



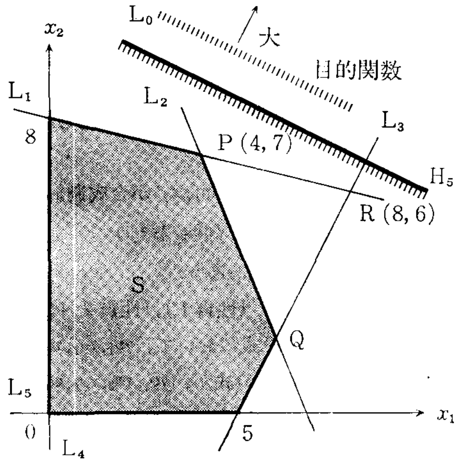
(b)



(c)



(d)



(e)

$$
\begin{array}{lrl}
 & x_1+4x_2\leqq 32 & \times w_1\\
 & 5x_1+2x_2\leqq 34 & \times w_2\\
 & 2x_1-\ \ x_2\leqq 10 & \times w_3\\
 & -x_1\qquad\ \leqq 0 & \times w_4\\
+) & -\ \ x_2\leqq 0 & \times w_5\\
\hline
\end{array}
$$

$$
(w_1+5w_2+2w_3-w_4)x_1+(4w_1+2w_2-w_3-w_5)x_2 \leqq (32w_1+34w_2+10w_3) \qquad (9)
$$

を考えてみよう．

ここで注意すべきことは，不等式の加算を行なうには不等号の向きを揃えておく必要があることである．このため，上の例では，式(4)，(5)の両辺にあらかじめ－1を掛けて不等号の向きを揃えておいた．このような調整がなされているとすると，各式に課する重み w_i は不等号の向きが変わらないように常に“非負”でなければならないことがわかる．

いま，$(w_1, w_2, w_3, w_4, w_5)=(1/8, 0, 0, 25/8, 12/8)$ とすると，合成制約式は

$$-3x_1-x_2\leqq 4$$

となる(図2(d)参照)．$(w_1, w_2, w_3\ w_4, w_5)=(1/3, 1/3, 0, 1, 0)$ とすると，

$$x_1+2x_2\leqq 22$$

となる(図2(e)参照)．

(性質3)このようにして得られる合成制約式(9)は，w_1, w_2, w_3, w_4, w_5 の値 ($w_i\geqq 0$) のいかんにかかわらず，主問題[P]の許容領域Sの内部と決して交わることはない

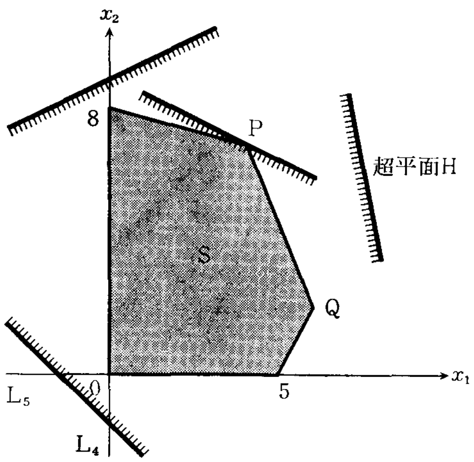


図 3　さまざまな合成制約式

超平面Hを境界とする許容領域を含む側の半空間となる(図3参照).

主問題[P]の許容領域Sが常に(9)式で与えられる半空間に含まれることは,

(x_1, x_2)が制約条件式(1)～(5)を同時に満たす ⇨ (x_1, x_2)が合成制約式(9)を満たす

が成立することから明らかであろう.

すでに気づかれたように,(性質1),(性質2)は(性質3)の特別な場合である.(9)式において,$(w_1, w_2, w_3, w_4, w_5)=(1,1,0,0,0)$とすれば(6)式が,$(w_1, w_2, w_3, w_4, w_5)=(4/9, 1/9, 0, 0, 0)$とすれば(7)式が,$(w_1, w_2, w_3, w_4, w_5)=(5/18, 1/18, 4/18, 0, 0)$とすれば(8)式が導かれる.また,図2において,(a),(b)の合成制約式と(c)～(e)の合成制約式との間には大きな違いがある.(a),(b)の合成制約式に対応する超平面は許容領域Sに接しているのに対して,(c)～(e)の合成制約式に対応する超平面は許容領域Sに接していない.このような違いが生じる原因は何か?

(性質4)図3において,合成制約式(9)に対応する超平面Hが許容領域Sと接するときは,その接点を構成するのに有効なSの制約条件式に対する重みw_iのみが正の値をもつ.

4. 合成制約式を用いた緩和問題

次に,主問題[P]において5本の制約条件式(1)～(5)を,上のようにして合成した1本の制約条件式(9)で置き換えた

緩和問題[P']:

最大化　　$x_1 + 2x_2$

条件 $(w_1+5w_2+2w_3-w_4)x_1+(4w_1+2w_2-w_3-w_5)x_2 \leqq (32w_1+34w_2+10w_3)$

を考えてみよう.この意味で合成制約式(9)は**代理制約式**と呼ばれることもある.緩和問題[P']で注目すべきことは,変数(x_1, x_2)の非負条件がないことである.

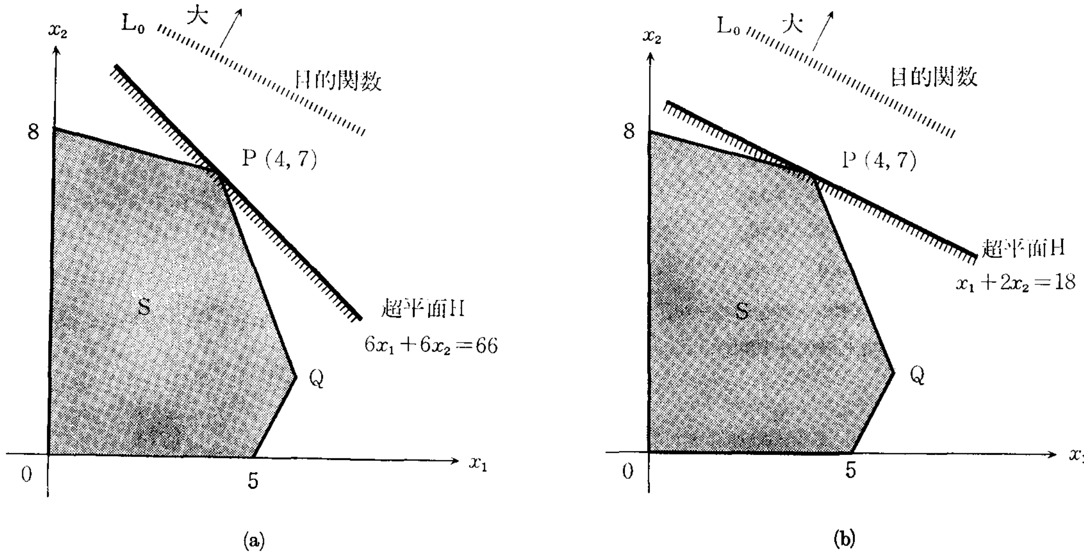
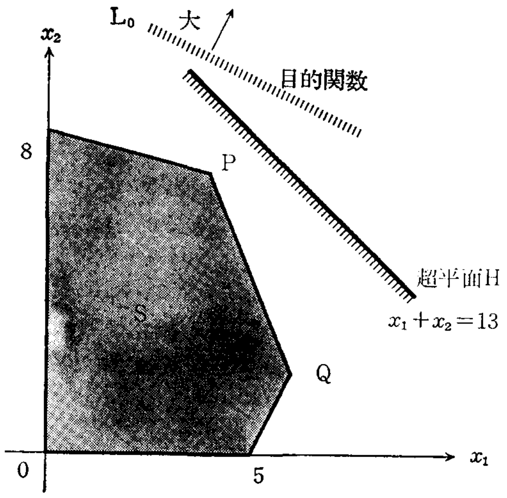
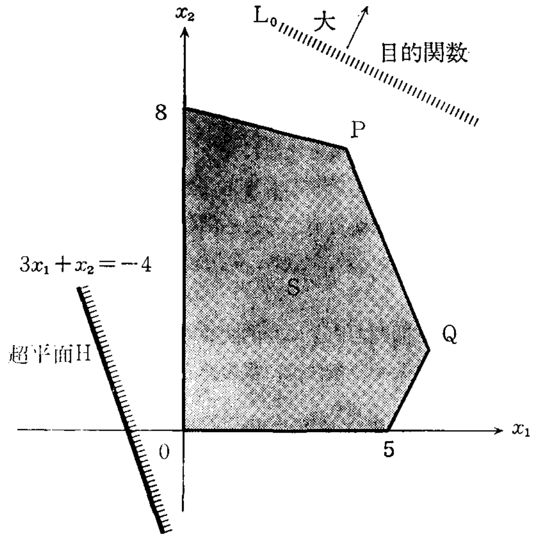


図 4　さまざまな緩和問題[P']



(c)



(d)

緩和問題[P']を図示すると，重み $(w_1, w_2, w_3, w_4, w_5)$ の値によって，**図4**(a)～(e)に示すようなさまざまなタイプの問題が生成される(それぞれ図2の(a)～(e)に対応)．たとえば，重みが $(w_1, w_2, w_3, w_4, w_5)=(1, 1, 0, 0, 0)$ のときは

最大化　x_1+2x_2

条件　$6x_1+6x_2 \leqq 66$

となる(図4(a)参照)．緩和問題[P']の許容領域は，点Pを通る傾き－1の超平面HのSを含む側の半空間である．

同様に，$(w_1, w_2, w_3, w_4, w_5)=(4/9, 1/9, 0, 0, 0)$ のときは

最大化　x_1+2x_2

条件　$x_1+2x_2 \leqq 18$

となる(図4(b)参照)．$(w_1, w_2, w_3, w_4, w_5)=(5/18, 1/18$ $4/18, 0, 0)$ のときは

最大化　x_1+2x_2

条件　$x_1+\ x_2 \leqq 13$

となる(図4(c)参照)．$(w_1, w_2, w_3, w_4, w_5)=(1/8, 0, 0, 25/8, 12/8)$ のときは

最大化　x_1+2x_2

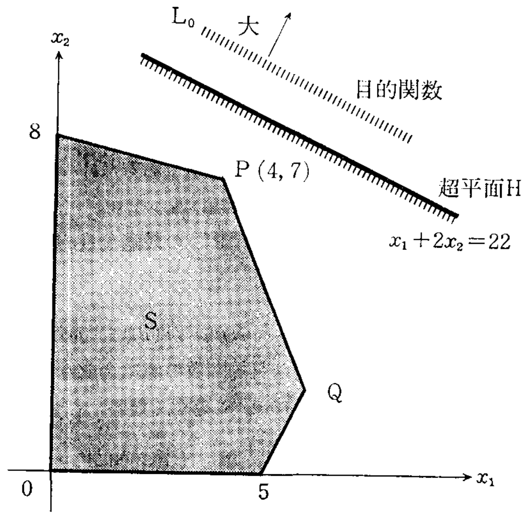
条件　$-3x_1-\ x_2 \leqq 4$

となる(図4(d)参照)．$(w_1, w_2, w_3, w_4, w_5)=(1/3, 1/3, 0, 1, 0)$ のときは

最大化　x_1+2x_2

条件　$x_1+2x_2 \leqq 22$

となる(図4(e)参照)．



(e)

図4(a)～(e)のいずれの場合にも，合成制約式が与える半空間は主問題[P]の許容領域S($\neq \phi$)を含むから，主問題[P]の任意の許容解 $x=(x_1, x_2) \in S$ は常に緩和問題[P']の許容解となる．よって，主問題[P]が許容解をもつなら緩和問題[P']も常に許容解をもつ．

(性質4)緩和問題[P']は許容解をもつ．

一方，図4(a)，(c)，(d)のような場合には，合成制約式の傾きと目的関数の傾きが異なるため，緩和問題[P']に目的関数の値が有限な最適解が存在しない．すなわち

緩和問題[P']が非有界である．しかし，図4(b)，(e)の場合には合成制約式の傾きと目的関数の傾きがちょうど一致し，この場合には緩和問題[P']に目的関数の値が有限な最適解が存在する(合成制約式(9)に対応する超平面H上の点がすべて最適解となる)．

逆に，緩和問題[P']が有界となるためには，合成制約式(9)の各係数が対応する目的関数の係数に等しくなるように，重み$(w_1, w_2, w_3, w_4, w_5)$を決める必要がある．

(性質5)緩和問題[P']に目的関数の値が有限な最適解が存在する必要十分条件は，次の連立1次不等式

$$\begin{array}{rl} w_1+5w_2+2w_3-w_4 & =1 \\ 4w_1+2w_2-w_3 \quad -w_5 & =2 \\ w_1,\ w_2,\ w_3,\ w_4,\ w_5 & \geqq 0 \end{array} \qquad (10)$$

が解$(w_1, w_2, w_3, w_4, w_5)$をもつことである．

5. 最強の緩和問題と双対問題

前節で図示した緩和問題[P']に関して，図4(b)の場合には最適解での目的関数の値が18であり，図4(e)の場合には最適解での目的関数の値が22となる．

このように緩和問題[P']が有界であるための必要十分条件(10)を満たす重み$(w_1, w_2, w_3, w_4, w_5)$であっても，その値によって緩和問題[P']の最適な目的関数の値は異なる．

(性質6)重み$(w_1, w_2, w_3, w_4, w_5)$が(10)式を満たすとき，緩和問題[P']の最適な目的関数の値は合成制約式の右辺定数$(32w_1+34w_2+10w_3)$に等しくなる．

それでは次に，主問題[P]に対して緩和問題[P']がもっとも“きつい”緩和となる場合，すなわち『緩和問題[P']において，最適解での目的関数の値がもっとも小さくなるような重み$(w_1, w_2, w_3, w_4, w_5)$の与え方は何か？』という問題を考えてみよう．この問への答えは，すでに明らかなように，次の最小化問題

$$\begin{array}{lll} & \text{最小化} & 32w_1+34w_2+10w_3 \\ [\mathrm{D'}] & \text{条件} & w_1+5w_2-2w_3-w_4 \qquad =1 \\ & & 4w_1+2w_2-w_3 \qquad -w_5=2 \\ & & w_1,\ w_2,\ w_3,\ w_4,\ w_5 \geqq 0 \end{array}$$

の最適解を求めることである．

問題[D']において，等号制約式と変数w_4, w_5の非負条件から，変数w_4, w_5を消去し，変数w_1, w_2, w_3をあらためてy_1, y_2, y_3と書くことにすれば，

$$\begin{array}{llr} \text{最小化} & 32y_1+34y_2+10y_3 & (0') \\ \text{条件} & y_1+5y_2-2y_3 \geqq 1 & (1') \\ & 4y_1+2y_2-y_3 \geqq 2 & (2') \\ & y_1 \geqq 0 & (3') \\ & y_2 \geqq 0 & (4') \\ & y_3 \geqq 0 & (5') \end{array}$$

となる．これは，とりも直さず2節で与えられた双対問題[D]に他ならない．そして，消去された変数w_4, w_5が，不等式(1')，(2')に対するスラック変数であることはもう述べる必要もないであろう．

6. おわりに

このように見てくると，LPの双対問題[D]とは，

『主問題[P]の各制約条件式にある重みを課して合成するとき，合成制約式の傾きが目的関数の傾きに等しくなるような重みの中で，もっともきつい合成制約式を与える重みを求める問題』

ということになる．

あるいは，

『主問題[P]の最適解を構成するのに，[P]の各制約条件式をどの程度の重みで評価すればよいのか？』

に答える問題ということもできよう．

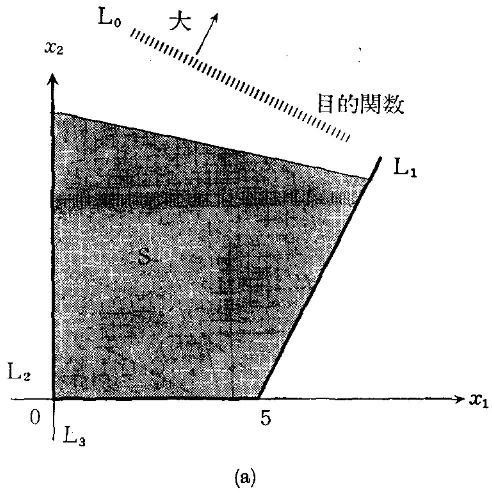
双対問題[D]の最適解が$(y_1, y_2, y_3)=(4/9, 1/9, 0)$であることは，図1において主問題[P]の最適解$P=(4,7)$を構成するのに直線$L_1$を重み(4/9)で，直線$L_2$を重み(1/9)で，直線$L_3$を重み0(直線$L_3$は不要)で評価すればよいことを示している．そして，(1')，(2')式のスラック変数が$w_4=w_5=0$であることは，直線L_4, L_5も主問題[P]の最適解Pを構成する上で役立たないことを意味している(相補性)．

また，主問題[P]の制約条件式の不等号の向きを変えないために，各制約条件式に課する重みw_iが非負であることを要求した．もし主問題[P]の制約条件式に不等号制約でなく等号制約のものがあれば，制約式を合成するとき等号制約に課する重みが負であっても全体の不等号の向きに関係しない．このことが，

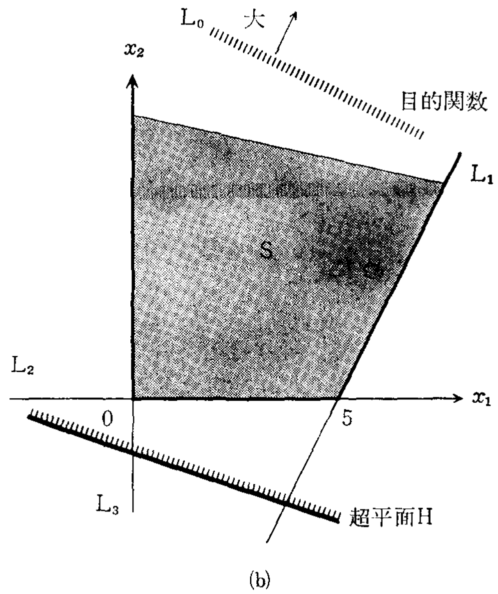
『等号制約に対する双対変数には非負条件がつかない』

ことの説明となる．

最後に，主問題[P]が許容解をもつが非有界である場合を考えてみよう．たとえば，



(a)



(b)

図 5　主問題[P]が非有界

主問題[P]：

最大化	x_1+2x_2	(11)
条件	$2x_1-\ \ x_2 \leqq 10$	(12)
	$x_1 \geqq 0$	(13)
	$x_2 \geqq 0$	(14)

と

双対問題[D]：

最小化	$10y_1$	(11')
	$2y_1 \geqq 1$	(12')
	$-\ y_1 \geqq 2$	(13')
	$y_1 \geqq 0$	(14')

を考えてみよう．明らかに，図5(a)に示すように主問題[P]は非有界となり，その双対問題[D]は許容解をもたない．

主問題[P]の制約条件式(12)～(14)式に重み$(w_1, w_2, w_3) \geqq 0$を課して加えてできる合成制約式は，図5(b)に示すように，許容領域Sの内部に交わらず，傾きが直線L_1～L_3に挟まれた超平面Hの許容領域Sを含む側である．よって，重み$(w_1, w_2, w_3) \geqq 0$を課して加えてできる合成制約式を用いた

緩和問題[P']

最大化　$x_1+\qquad 2x_2$

条件　$(2w_1-w_2)x_1+(-w_1-w_3)x_2 \leqq 10w_1$

は，どのような重み$(w_1, w_2, w_3) \geqq 0$に対する合成制約式の場合でも非有界となってしまうことがわかる．

(性質7)主問題[P]が非有界ならば，いかなる重み$(w_1, w_2, w_3) \geqq 0$に対しても緩和問題[P']が非有界となる．

(性質8)緩和問題[P']が非有界であることの必要十分条件は，次の連立次不等式

$$\begin{aligned} 2w_1-w_2 \qquad &= 1 \\ -\ w_1 \qquad -w_3 &= 2 \\ w_1,\ w_2,\ \ w_3 &\geqq 0 \end{aligned} \tag{15}$$

に解(w_1, w_2, w_3)が存在しないことである．

性質5に対応して上記の性質8が成立するので，結局主問題[P]が非有界のとき，次の性質を得る．

(性質9)主問題[P]が非有界ならば，(15)式を満たす解(w_1, w_2, w_3)が存在しない．すなわち，双対問題[D]に許容解が存在しない．

×　　×　　×　　×