線形計画法から多目的・多目標計画法へ

福川　忠昭　慶応義塾大学

1.　線形計画法の図解

それぞれが1次式で表わされるいくつかの制約条件式を満たしながら，1つの1次式で表わされる目的関数の値を最大（または最小）にする問題を線形計画問題と呼ぶ．

線形計画問題に対する解法には，よく知られた単体法をはじめとして内点法や罰金関数法などがあるが，ここでは単体法をとりあげる．

1.1　単体法と図解

線形計画問題の単体法については，すでに多くの文献で解説されているので，ここでは例題によってごく簡単に説明しておくにとどめよう．

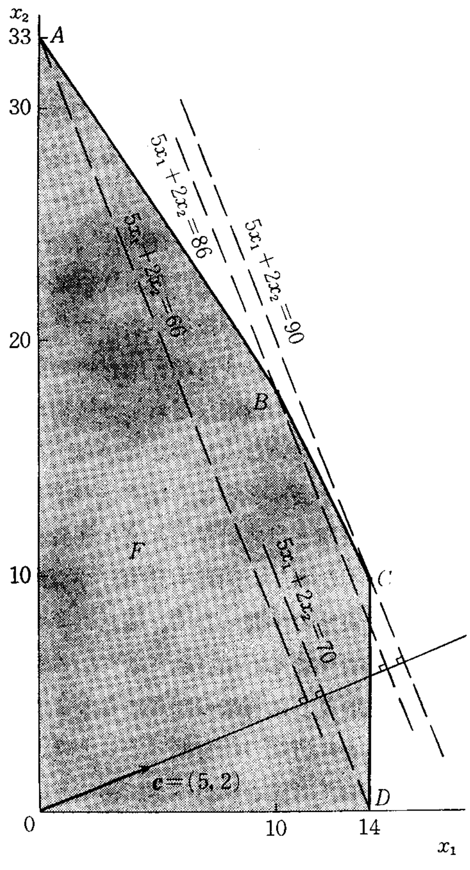


図 1　例題1の図解

表 1　製品および工程の仕様

	製品S	製品T
生産・販売量	x_1単位	x_2単位
単位当り粗利益	5万円	2万円
工程1での単位当り所要時間	15時間	10時間
工程2での単位当り所要時間	20時間	10時間
工程1の1期当りの実働可能延べ時間	330時間	
工程2の1期当りの実働可能延べ時間	380時間	
製品Sの外注部品の1期当り調達可能量	14単位	

（例題1）　2種の製品SとTとを生産している会社がある．各製品はともに工程1と工程2の2つの工程で加工を受けて製品化される．各製品および各工程の仕様は**表1**のようになっている．最も利益を大きくするためには，各製品を今期どれほど生産すればよいか．

この問題は，次のように定式化できる．

目的関数：$g=5x_1+2x_2$ ---→最大化

制約条件：

$$15x_1+10x_2 \leqq 330 \quad (1)$$

$$20x_1+10x_2 \leqq 380 \quad (2)$$

$$x_1 \leqq 14 \quad (3)$$

$$-x_1 \leqq 0 \quad (4)$$

$$-x_2 \leqq 0 \quad (5)$$

x_1-x_2を軸とした2次元空間（決定空間）に，制約条件式の(1)から(5)までのすべてを満たす許容領域Fを図示すれば，図1の5角形OABCDとなる．

各端点は制約条件の交わった交点として求まるので，端点を構成している制約条件を有効な(active)制約条件と呼ぶ．線形計画問題は制約条件式がすべて線形であるから，許容領域があるとすれば凸多面体となる．また目的関数も線形であるから，その等高線は平行直線群をつくる．したがって，最適解は許容領域の端点，あるいはヘりにあることになる（許容領域が閉じてなく，目的関数値を無限に大きくできる非有界の場合も考えられるが，現実的ではないので，以下では除く）．

O点($x_1=0$, $x_2=0$)における目的関数gの値は0，A点（$x_1=0$, $x_2=33$）のgの値は66，B点（10, 18）では

86, C点 (14, 10) では90, そしてD点 (14, 0) では70となり, 最適解がC点であることがわかる. このことはまた, 図中に目的関数の係数ベクトル $\boldsymbol{c}=(5, 2)$ と垂直になる目的関数の等高線を描くことによっても容易に知ることができる.

さて, この例題を単体法で解くプロセスは次のようなものである. まず, 制約条件式の(1)から(3)までの各式にスラック変数 $\lambda_i(i=1,2,3)$ を加え, 等式化する. 制約条件式の(4)と(5)は決定変数の非負制約であるから, 追加するスラック変数 $\lambda_i(i=1,2,3)$ の非負制約と合わせて単体法のステップを進めるなかで満たされる. 単体法を用いれば**表2**のように解かれる.

第1ステップの解はO点であり, 第2ステップでD点に進み, 第3ステップでC点に到達する. この段階でもはやこれ以上目的関数の値を改善できないので (すべての z_j-c_j の値が非負であるから) この解が最適解となる. このように, 最初に選ばれた多角形の端点の1つから辺にそって, 目的関数の値を増加させながら最適解に至るのである.

制約条件式(1)から(5)までの各係数行ベクトルを $\boldsymbol{a}^i(i=1,\cdots,5)$ とすると, $\boldsymbol{a}^1=(15, 10)$, $\boldsymbol{a}^2=(20, 10)$, $\boldsymbol{a}^3=(1, 0)$, $\boldsymbol{a}^4=(-1, 0)$, $\boldsymbol{a}^5=(0, -1)$ である.

各端点で有効な制約条件式に対して,

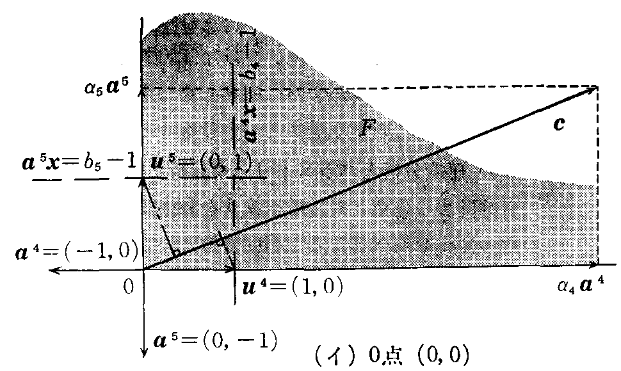
$$\begin{bmatrix} -\boldsymbol{a}^i- \\ -\boldsymbol{a}^j- \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} b_i \\ b_j \end{bmatrix} \tag{6}$$

が成立しているので, その点 (x_1, x_2) は,

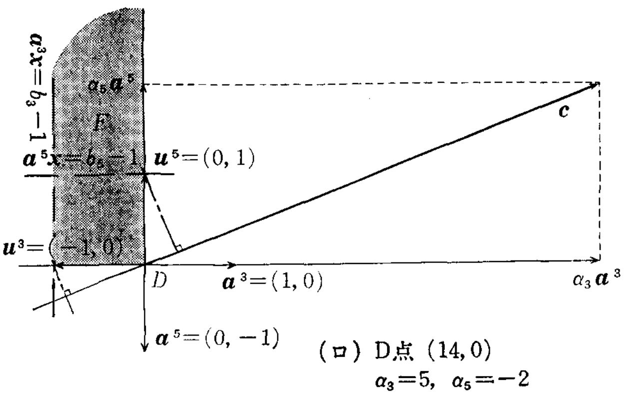
$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} -\boldsymbol{a}^i- \\ -\boldsymbol{a}^j- \end{bmatrix}^{-1}\begin{bmatrix} b_i \\ b_j \end{bmatrix} \tag{7}$$

表2 例題1の単体表

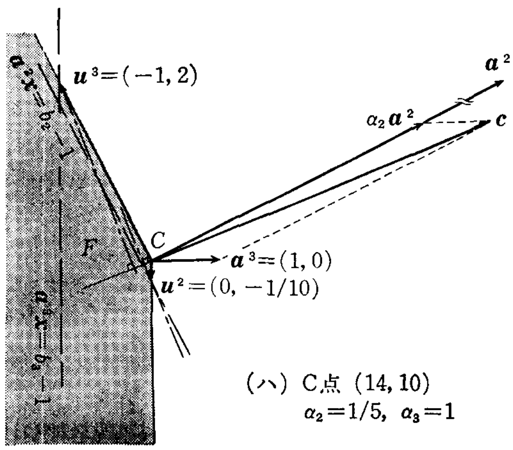
ステップ	c_j			5	2			
		基底	値	x_1	x_2	λ_1	λ_2	λ_3
1		λ_1	330	15	10	1		
		λ_2	380	20	10		1	
		λ_3	14	①				1
	z_j-c_j		0	−5	−2			
2		λ_1	120		10	1		−15
		λ_2	100		⑩		1	−20
	5	x_1	14	1				1
	z_j-c_j		70		−2			5
3		λ_1	20			1	−1	5
	2	x_2	10		1		1/10	−2
	5	x_1	14	1				1
	z_j-c_j		90				1/5	1



(イ) 0点 (0,0)
$\alpha_4=-5$, $\alpha_5=-2$



(ロ) D点 (14,0)
$\alpha_3=5$, $\alpha_5=-2$



(ハ) C点 (14,10)
$\alpha_2=1/5$, $\alpha_3=1$

図2 各点における目標ベクトル c と制約ベクトル $\boldsymbol{a}^i$ および $\boldsymbol{u}^i$ の関係

として求められる．

いま，有効制約条件の一方（それを j としよう）を有効なままにして，他方の制約 i から1単位離れることを考えてみよう．そのときの解の変化ベクトルを $\boldsymbol{u}^{iT}=(u_1{}^i, u_2{}^i)$ とすると，$\boldsymbol{a}^i\cdot\boldsymbol{u}^i=-1$，$\boldsymbol{a}^j\cdot\boldsymbol{u}^i=0$ であるから，

$$\begin{bmatrix}-\boldsymbol{a}^i-\\-\boldsymbol{a}^j-\end{bmatrix}\begin{bmatrix}u_1{}^i\\u_2{}^i\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-1\\0\end{bmatrix}$$

したがって，

$$\begin{bmatrix}u_1{}^i\\u_2{}^i\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-\boldsymbol{a}^i-\\-\boldsymbol{a}^j-\end{bmatrix}^{-1}\begin{bmatrix}-1\\0\end{bmatrix}$$

このときの目的関数 g の変化分 α_i は，

$$\alpha_i=\boldsymbol{c}\cdot\boldsymbol{u}^i=\boldsymbol{c}\begin{bmatrix}-\boldsymbol{a}^i-\\-\boldsymbol{a}^j-\end{bmatrix}^{-1}\begin{bmatrix}-1\\0\end{bmatrix}$$

となる．同様に，制約 i を有効なままにして，制約 j から1単位離れた場合は，

$$\begin{bmatrix}-\boldsymbol{a}^i-\\-\boldsymbol{a}^j-\end{bmatrix}\begin{bmatrix}u_1{}^j\\u_2{}^j\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0\\-1\end{bmatrix}$$

$$\alpha_j=\boldsymbol{c}\cdot\boldsymbol{u}^j=\boldsymbol{c}\begin{bmatrix}-\boldsymbol{a}^i-\\-\boldsymbol{a}^j-\end{bmatrix}^{-1}\begin{bmatrix}0\\-1\end{bmatrix}$$

したがって，次のような関係が得られる．

$$(\alpha_i, \alpha_j)=\boldsymbol{c}\begin{bmatrix}-\boldsymbol{a}^i-\\-\boldsymbol{a}^j-\end{bmatrix}^{-1}\begin{bmatrix}-1&0\\0&-1\end{bmatrix}$$

$$=-\boldsymbol{c}\begin{bmatrix}-\boldsymbol{a}^i-\\-\boldsymbol{a}^j-\end{bmatrix}^{-1} \qquad (8)$$

$$\boldsymbol{c}=-(\alpha_i, \alpha_j)\begin{bmatrix}-\boldsymbol{a}^i-\\-\boldsymbol{a}^j-\end{bmatrix} \qquad (9)$$

最適解のときは，$\alpha_i\leqq 0$，$\alpha_j\leqq 0$ であるから，そのとき $\boldsymbol{c}$ は $\boldsymbol{a}^i$ と $\boldsymbol{a}^j$ の非負線形結合で表わされることになる．

O点で有効な制約条件は x_1 と x_2 の非負条件であり，**図2**の(イ)に示すように，目的関数の係数ベクトルを有効な制約条件の係数ベクトルにより表わすと，

$$\boldsymbol{c}=(5,\ 2)=-\alpha_4\boldsymbol{a}^4-\alpha_5\boldsymbol{a}^5$$

である．この $-\alpha_4$ と $-\alpha_5$ は，(8)式から，

$$-(\alpha_4, \alpha_5)=(5,\ 2)\begin{bmatrix}-1&0\\0&-1\end{bmatrix}^{-1}=-(5,\ 2)$$

として求まり，それらは単体表の初期ステップにおける x_1 と x_2 列の z_j-c_j 欄に示されている．

D点では有効な制約条件が外注部品の調達制約(3)と x_2 の非負条件であり，図2の(ロ)に示すように，

$$\boldsymbol{c}=(5,\ 2)=-\alpha_3\boldsymbol{a}^3-\alpha_5\boldsymbol{a}^5=5\boldsymbol{a}^3-2\boldsymbol{a}^5$$

という関係になっている．$-\alpha_3$ と $-\alpha_5$ は，それぞれ単体表の第2ステップにおける λ_3 と x_2 列の z_j-c_j 欄に示されている．

同様に，最適解のC点における単体表との関係を図2の(ハ)に示してある．この図からもわかるように，目的関数の係数ベクトルが，有効な制約条件の係数ベクトルの非負結合により表わせることが最適解の条件である．実際，C点では(8)式からもわかるように，

$$-(\alpha_2, \alpha_3)=\boldsymbol{c}\begin{bmatrix}-\boldsymbol{a}^2-\\-\boldsymbol{a}^3-\end{bmatrix}^{-1}=(5,\ 2)\begin{bmatrix}20&10\\1&0\end{bmatrix}^{-1}$$

$$=(5,\ 2)\begin{bmatrix}0&1\\1/10&-2\end{bmatrix}=(1/5,\ 1)\geqq 0$$

という条件が成立している．

1.2 解が一意的でない場合

前節の例題でもそうだが，一般的には，線形計画問題の最適解は実行可能領域の端の点になる(端点解)．

(例題2) 前節の例題で，製品Tの単位当りの粗利益が2.5万円であったとするとどうなるか．

この場合，目的関数 g は次のようになる．

$$g=5x_1+2.5x_2$$

目的関数の等高線は**図3**に示すように，工程2の能力制約線と平行になるので，B点とC点とを結ぶ線上のすべての点で $g=95$ となり，最適解は一意ではなくなる．すなわち，各製品の生産量はB点とC点とを結ぶ線分上であればどの組合せであってもよいわけである．

目的関数の係数ベクトル $\boldsymbol{c}$ と同方向の係数ベクトル $\boldsymbol{a}^i$ をもつ有効な制約式があれば，こうした解の状況が生じることになる．一般的には，有効な制約条件の係数ベクトルのうちで $\boldsymbol{c}$ を表わすのに寄与しないもの ($\alpha_i=0$) がある場合に，このようなことが生じることになる．

1.3 感度分析とパラメトリック分析

目的関数の係数 $\boldsymbol{c}$ や右辺定数 $\boldsymbol{b}$ を微小変化させたときの解の変化を調べることを感度分析といい，さらにパラメータ μ を導入して連続的に変化させたときの解の変化の状況を調べることをパラメトリック分析という．

$\boldsymbol{c}$ に $\Delta\boldsymbol{c}$ の変化を与えたとき $\boldsymbol{c}+\Delta\boldsymbol{c}$ がどの端点における有効制約の係数ベクトルの非負線形結合で示せるかを調べればよい．先の例題1を使って**図4**に示すように，原点のO点に各制約の係数ベクトルを描くならば，$\boldsymbol{a}^1$ と $\boldsymbol{a}^4$ の非負線形結合で表わせる領域は X_A であり，$\boldsymbol{c}+\Delta\boldsymbol{c}$ がその領域に入れば解はA点になる．また，$\boldsymbol{a}^1$ と $\boldsymbol{a}^2$ の非負線形結合で表わせる領域は X_B であり，$\boldsymbol{c}+\Delta\boldsymbol{c}$ がその領域に入れば解はB点になる．同様に，$\boldsymbol{a}^2$ と $\boldsymbol{a}^3$ により作られる X_C に入ればC点で，$\boldsymbol{a}^3$ と $\boldsymbol{a}^5$ により作られる X_D に入ればD点が，そして $\boldsymbol{a}^4$ と $\boldsymbol{a}^5$ により作られる X_O に入ればO点が最適解になる．

パラメータ μ を導入して $\boldsymbol{c}+\mu\Delta\boldsymbol{c}$ とすれば，$\boldsymbol{c}+\mu\Delta\boldsymbol{c}$ の点は μ の値によって，図4の直線 $t-t'$ 上を移動するこ

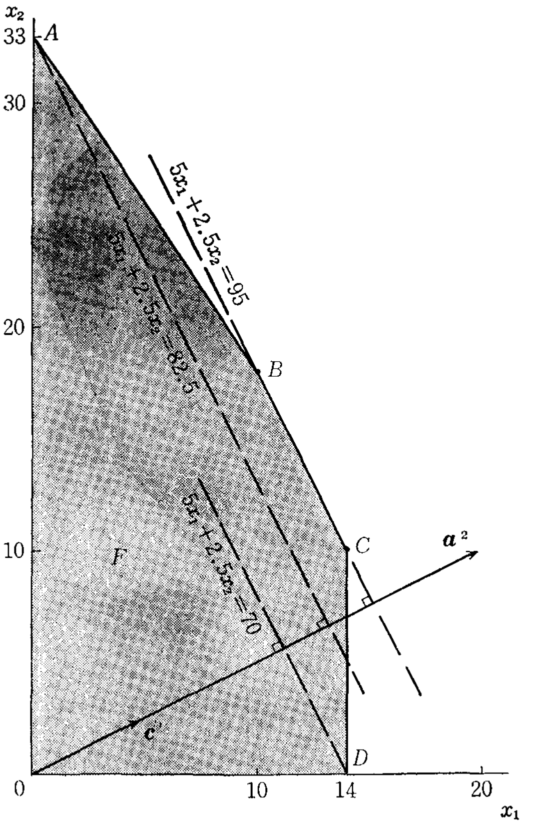


図 3　例題 2 の図解($\boldsymbol{c}'=1/4\cdot\boldsymbol{a}^2$)

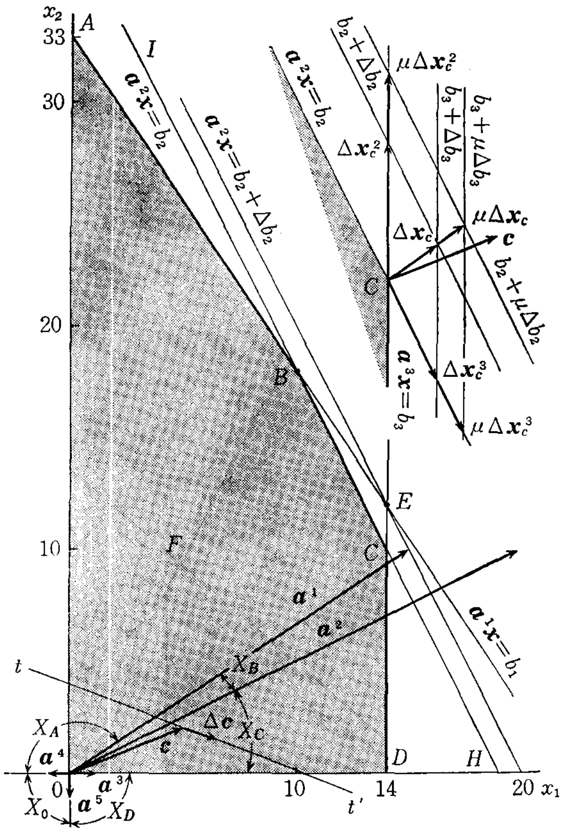


図 4　感度分析とパラメトリック分析

とになる．1つの領域$X.$から隣の領域$X.$に移るときのμの値を調べることにより解の変化を知ることができる．

一方において，右辺定数項$\boldsymbol{b}$に$\Delta\boldsymbol{b}$の変化を与えたときの解の変化は，たとえば先の例で工程2の生産能力を高められるとすると，図4に示すように制約線HIが右上方向に平行移動するので，外注部品の調達制約線EDとの交点であるC点はED線上をE点方向に変化していく．工程2の実働可能時間が380から400まではそうした変化を示すが，400を越えるときはもはや工程2の生産能力は有効制約にはならないので，解はE点に留まることになる．逆に，生産能力が減じてくる場合は，制約線HIが左下方向に平行移動するので，280までC点はED線上をD点に向かって動くことになり，それ以下になるとx_1軸上をO点に向かって動くことになる．

外注部品の調達能力を増やす場合は同様に，C点はED線が右側に平行移動することにより，HI線上をH点に向かって動くことになり，H点を越えてしまえば制約としては効かなくなる．減らす場合にはB点に向かって動くことになる．10単位よりさらに減らすと，工程2の生産能力が制約とはならなくなり，工程1の能力制約が効いてくるため，制約線AE上をB点からA点に向かって動くことになる．

各端点の有効制約の係数ベクトルでつくる行列をAとすると，(6)式で示したように，$A\boldsymbol{x}=\boldsymbol{b}$である．そこで，$\boldsymbol{b}$を$\boldsymbol{b}+\Delta\boldsymbol{b}$に変えると，それによる解の変化分$\Delta\boldsymbol{x}$は，次のようになる，

$$A(\boldsymbol{x}+\Delta\boldsymbol{x})=\boldsymbol{b}+\Delta\boldsymbol{b}$$

$$A\Delta\boldsymbol{x}=\Delta\boldsymbol{b}$$

$$\Delta\boldsymbol{x}=A^{-1}\Delta\boldsymbol{b}$$

したがって，目的関数値の変化分Δgは$\boldsymbol{c}$と$\Delta\boldsymbol{x}$の内積で，次のようになる．

$$\Delta g=\boldsymbol{c}\Delta\boldsymbol{x}=\boldsymbol{c}A^{-1}\Delta\boldsymbol{b}$$

図4の右上にC点の部分を拡大して図示してあるように，C点の有効制約は（2）式と（3）式であるから，$\boldsymbol{b}_C=(b_2, b_3)$である．そこで，$\Delta\boldsymbol{b}^2{}_C=(\Delta b_2, 0)$としたときは$\Delta\boldsymbol{x}^2{}_C$だけ，また$\Delta\boldsymbol{b}^3{}_C=(0, \Delta b_3)$とすると$\Delta\boldsymbol{x}^3{}_C$だけ変化する．さらに，$\Delta\boldsymbol{b}_C=(\Delta b_2, \Delta b_3)$とすると，$\Delta\boldsymbol{x}^2{}_C$と$\Delta\boldsymbol{x}^3{}_C$とを合成した$\Delta\boldsymbol{x}_C$だけ変化することがわかる．他の端点においても同様の図解ができる．

パラメータμを導入して$\boldsymbol{b}+\mu\Delta\boldsymbol{b}$とした場合も同様の

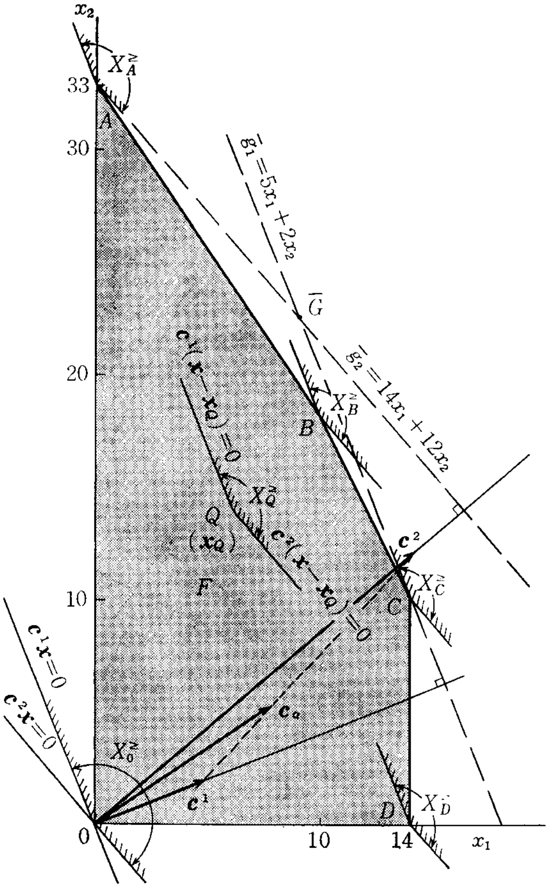


図 5　多目的線形計画法の図解(決定空間)

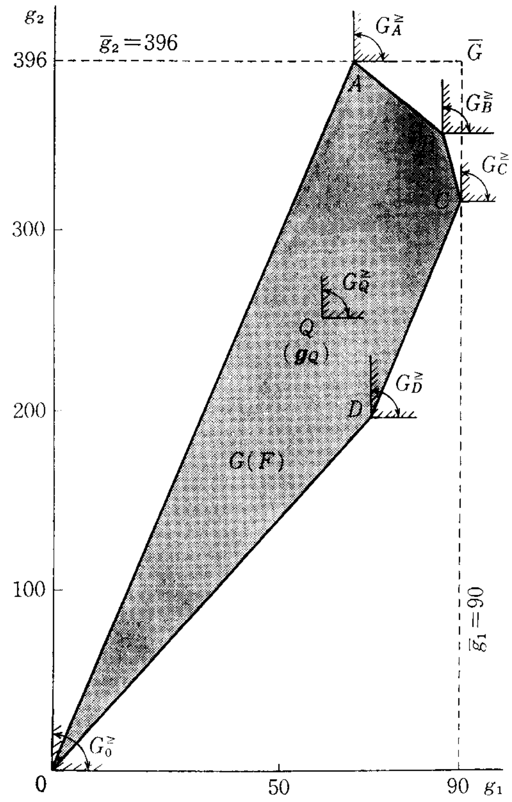


図 6　多目的線形計画法の図解(目的空間)

図解を行なえばよい．

2.　多目的計画法の図解

線形計画問題は1つの目的関数の最大(あるいは最小)化を扱う問題であったが，複数の目的関数を扱う場合の問題を多目的線形計画問題という．

それぞれの目的関数は，その値が大きければ大きいほど好ましい場合（小さいほうが好ましい場合も，符号変換して考えれば同じことである)，各目的関数を個別に最大化したときの解が，いずれも同じ解であれば問題なくその解が最適解である(完全最適解という)．しかしながら，一般には目的ごとの最適解が異なるのが普通である．そうした場合，いずれの解の方が好ましいかは，目的達成値間に代替性を仮定でき，その代替率が与えられなければ比較選択はできない．そこで，多目的計画問題に対する解の概念として非劣解（有効解，パレート最適解ともいう）が定義されている．

[非劣解]

$\boldsymbol{x}^* \in F$ が非劣解 ⇔ すべての $i \in I = \{1, 2, \cdots, m\}$ に対して $g_i(\boldsymbol{x}) \geqq g_i(\boldsymbol{x}^*)$ で，かつ少なくとも1つの $i \in I$ に対して $g_i(\boldsymbol{x}) > g_i(\boldsymbol{x}^*)$ となるような $\boldsymbol{x} \in F$ が存在しない．

すなわち，非劣解とはいずれの目的関数の増加も，他の目的関数を減少させることなしには不可能な解のことである．

(題例 3)　例題1で，粗利益 g_1 の他に売上高 g_2 も大きくしたい．製品Sの単価は14万円，製品Tの単価は12万円である．

売上高の目的関数式は，$g_2 = 14x_1 + 12x_2$ である．**図 5** に示すように，売上高が最大になるのはA点 ($x_1 = 0$, $x_2 = 33$) で，その場合の売上高 g_2 は396万円である．一方，粗利益が最大になるのは先に示したようにC点である．

さて今度は，$g_1 - g_2$ を軸とした2次元空間(目的空間)に許容領域 $G(F)$ を表わすと**図 6** のようになる．各目的関数が線形であるから，目的空間の許容領域もやはり凸多面体となる．

点Aは g_2 に関しては点Cより優るが $(g_2^A > g_2^C)$，g_1 に関しては点Cの方が優っている $(g_1^A < g_1^C)$，なお，各目

的関数を個別に最大化したときの達成値がすべて得られる点 $\bar{G}$ のことを理想点という．

許容領域内の点Qを考えてみよう．点Qより g_1, g_2 のいずれの面でも劣らず，しかも少なくともどちらか一方では優っている点は，$G_Q^{\geq}=\{g|g-g_Q\geqq 0,\ g\neq g_Q\}$ の領域（優越領域という）にある点である．$G_Q^{\geq}$ にはへりは含まれるが，点Qは含まれない．点Qが非劣解であるためには，他の許容解の中に $G_Q^{\geq}$ に含まれる解がない（$G_Q^{\geq}$ と $G(F)$ とに共通領域がない）ことを要求しているのであるから，$G(F)$ の内点はすべて非劣解ではない（劣解という）．

へりにあるO点やD点も $G_O^{\geq}$ や $G_D^{\geq}$ が $G(F)$ と重なりあう領域があるので，非劣解とはならない．結局，$G(F)$ の右上へりの部分（点Aから点Cまで）にある解が非劣解になる．

決定空間でいえば，図5に示すように，$G_Q^{\geq}$ に対応する領域 $X_Q^{\geq}$ は，各目的関数の係数行ベクトル c^1，c^2 を各行に並べた行列を C とすると，$X_Q^{\geq}=\{x|C(x-x_Q)\geqq 0,\ Cx\neq Cx_Q\}$ である．$X_Q^{\geq}$ と F とに共通領域がない点が非劣解となることがわかろう．

多目的線形計画法はこの非劣解の部分（あるいは非劣解の端点解）を求める解法である．考え方として，目的関数の係数ベクトルを線形結合した合成係数ベクトル c_α

$$c_\alpha=\alpha c^1+(1-\alpha)c^2 \qquad (1>\alpha>0)$$

を作れば，α の値によって c_α の先端は c^1 と c^2 とを結ぶ破線上を動くことになる．そこで，c_α を使い，$z=c_\alpha x$ を最大化する1目的の線形計画問題として解を求めれば，点Aから点Cまでの範囲にあるいずれかの端点解が最適解として求まる．α を適宜操作することにより，非劣端点解をすべて求めることができる．

他方，非劣解集合そのものではなく，非劣解集合の中に理想点 $\bar{G}$ に一番近い解（妥協解という）を探す方法もある．その場合，“近さ”を測る距離の次数によって一番近い解は異なる可能性がある．そこで，1次距離からはじまって，2次，3次，…，無限次距離までの各次数ごとの解の集合を求めるのである（図7参照）．それは，問題の前提が各目的の達成値は大きいほど好ましいとしていることから，選好の無差別線の形状はこれらの距離関数のいずれかによって近似されるものと考えられるからである．

そこで，理想点までの p 次距離 $d_p(x)$ は，

$$d_p(x)=\left[\sum_{i=1}^{m}[w_i\cdot(\bar{g}_i-g_i(x))]^p\right]^{1/p}$$

$$p=1,2,\cdots,\infty$$

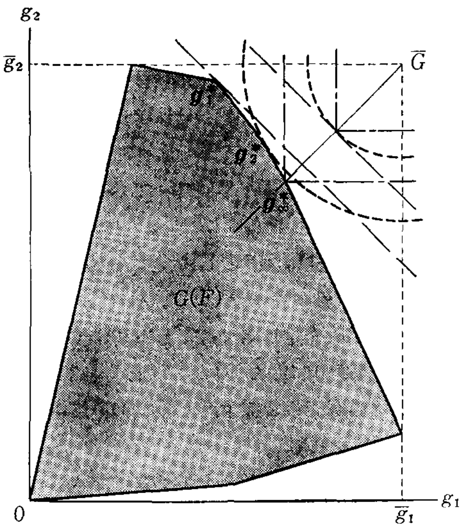


図7 理想点 $\bar{G}$ からの等距離線：$p=1,2,\infty$ の場合（g_p^* は，p 次距離での最適解）

であるから，各 p ごとにこの $d_p(x)$ を目的関数として解けばよいことになる．ここで，w_i は各目的の測定スケールを揃えるための基準化係数である．

1次距離の場合と無限次距離の場合は，線形計画の問題になるが，他は非線形計画問題になる．

3. 多目標計画法の図解

多目標計画法（あるいは単に，目標計画法）は複数の目的を扱う数理計画法の1つである．目的ごとに達成したい目標値 g_i^* を定め，各目的関数式に目標値に達しないときの不足差異を表わす不足偏差変数 d_i^- と超過するときの超過差異を表わす超過偏差変数 d_i^+ とを導入し，

$$\sum_{j=1}^{n}c_{ij}x_j+d_i^--d_i^+=g_i^*(i=1,2,\cdots,m) \qquad (10)$$

として等式化して制約条件に含める（目標制約式と呼ぶ）．

各不足偏差変数と超過偏差変数に，目標の優先順を与える絶対順位係数 $P_l\,(P_l\gg P_{l+1})$ や同順位の目標間における各差異値の相対的な重要性を与える重み（代替率）w_i^-，w_i^+ を付してそれらの総和を目的関数 r とする．

$$r=\sum_{l=1}^{L}P_l\left[\sum_{i\in I_l}(w_i^-d_i^-+w_i^+d_i^+)\right] \qquad (11)$$

ここで I_l は，第 l 優先順位に置かれた目標の添字の集合である．w_i^- と w_i^+ にゼロや，正あるいは負の符号を与えることにより，目標の立て方（「ちょうど～にしたい」とか「～以上にしたい」，「～以下にしたい」など）に対応した目的関数を設定することができる．

r はいわば，目標の不達成にともなうリグレットと考えられる．目標計画法はこの r を最小にする解を求める

ものであり，目標を満足する解を探すところから，最適化というよりも満足化をはかる数理計画法である．

3.1 付順と加重を使う場合の図解

例題1で，粗利益と売上高，それに各製品の販売量に次のような目標を考えているとしよう．

G_1：粗利益の目標値 g_1^* として少なくとも60万円以上にしたい（d_1^- を0にしたい）

G_2：売上高の目標値 g_2^* として少なくとも260万円以上にしたい（d_2^- を0にしたい）

G_3：製品Sの販売量目標 g_3^* として12単位以上にしたい（d_3^- を0にしたい）

G_4：製品Tの販売量目標 g_4^* として24単位以上にしたい（d_4^- を0にしたい）

G_5：製品SとTの構成割合を1：2にできるだけ近づけたい（d_5^- と d_5^+ をともに0にしたい）

粗利益目標 G_1 の達成をまず第1順位の優先目標とし，売上高目標 G_2 を第2順位，そして各製品の販売量目標 G_3 と G_4 を第3順位，製品構成目標 G_5 を第4順位と考えているとしよう．同順位の製品SとTのそれぞれの目標値からの偏差変数に与える重みは，各製品の目標販売量を考慮して $w_3^-=2$, $w_4^-=1$ としたとしよう．するとこの問題は次のように定式化される．

$$\text{目的関数}: r=P_1d_1^-+P_2d_2^-+P_3(2d_3^-+d_4^-)+P_4(d_5^-+d_5^+) \rightarrow \text{最小化}$$

制約条件：

$$\begin{aligned}
5x_1+2x_2+d_1^--d_1^+&=60\\
14x_1+12x_2+d_2^--d_2^+&=260\\
x_1+d_3^--d_3^+&=12\\
x_2+d_4^--d_4^+&=24\\
2x_1-x_2+d_5^--d_5^+&=0\\
15x_1+10x_2&\leqq 330\\
20x_1+10x_2&\leqq 380\\
x_1&\leqq 14\\
x_1,\ x_2,\ d_i^-,\ d_i^+&\geqq 0 \quad (i=1,2,\cdots,5)\\
d_i^-\cdot d_i^+&=0 \quad (i=1,2,\cdots,5)
\end{aligned}$$

最後の条件は，各ペアの偏差変数が同時に値をもってはならないという条件であるが，単体法を用いて解く場合には，各ペアの偏差変数の係数列ベクトルの特徴からして，ペアの偏差変数が同時に基底に取り込まれることはないので，陽に制約式として扱う必要はない．

上記の問題を図解したのが**図8**である．工程制約と外注部品の制約（これらを“固い制約”あるいは“技術的制約”という）および非負制約を満たす実行可能領域は点O，A，B，C，Dに囲まれた領域である．この領域内で第1順位の粗利益目標を満たすことができるのは点A，B，C，D，J，Iに囲まれた部分である．この部分の解であれば，$d_1^-=0$, $d_1^+\geqq 0$ である．これ以外では粗利益が60に満たなくなるため，d_1^- が値をもつことになる．

次に，領域ABCDJI内で第2順位の目標の達成を考える．第2順位の売上高目標を同時に満たせるのは，線分KLの右上側の領域にある点であるので，領域ABCLMIにある解となる．第3順位の販売量目標を満足する解の領域は点Rの右上側の領域にある点であるので領域ABCLMIとは重ならない．そこで，領域ABCLMIのうちで，点Rに重みつきの1次距離（$2d_3^-+d_4^-$）ではかって“一番近い”点がこの問題の解となる．点Rから $2d_3^-+d_4^-$ の等距離線を破線で示してあるように，点BとNとを結ぶ線分上の点はすべて同じ最小のリグレット値をもつことになる．

第3順位の目標は達成されていなくても，解が一意に定まらない（代替的な解が他にもある）場合には，次の順位の目標の達成度合いを改善できる解の探索をさらに続ける必要がある．

そこで，第4順位の製品構成割合を1：2に近づけたいという目標を，ここでは線形化して $2x_1-x_2=0$ の直線OVに近い解とすると，第3順位までの目標の不達成度合いの等しい線分BNの中で点Bが一番近いことになる（$d_1^-=0$, $d_2^-=0$, $d_3^-=2$, $d_4^-=6$, $d_5^-=0$, $d_5^+=2$）．したがって，この問題の最適解は点B（$x_1=10$, $x_2=18$）となり，そのリグレット値 r は $r=P_1\cdot 0+P_2\cdot 0+P_3\cdot 10+P_4\cdot 2$ となる．

もし，優先順位を5段階に分けてそれぞれ G_1, G_2, G_3, G_4, G_5 の順にしたとすると，G_1 および G_2 を満たすのは領域ABCLMIであり，その中で次の目標 G_3 を満たせる領域は四角形NCLWである．ついで G_4 に最も近い点はNであるから，点Nが最適解になり，リグレット値は $r=P_1\cdot 0+P_2\cdot 0+P_3\cdot 0+P_4\cdot 10+P_5\cdot 10$ となる．この場合 G_5 の達成への配慮はなされないことになる（結果的には G_5 にとっても一番好ましい点が選ばれたが）．

もし，順位を G_1, G_2, G_5, そして G_3 と G_4 を同順位（重み $w_3^-=2$, $w_4^-=1$）で4番目という順番をつけたとすると，G_1 と G_2 とを満たせる領域ABCLMIで G_5 を満たせるのは線分UVである．その中で G_3 と G_4 との達成を考えるので解は点 $V(x_1=66/7,\ x_2=132/7)$ になる．この場合のリグレット値は $r=P_1\cdot 0+P_2\cdot 0+P_3\cdot 0+P_4\cdot 72/7$ となる．

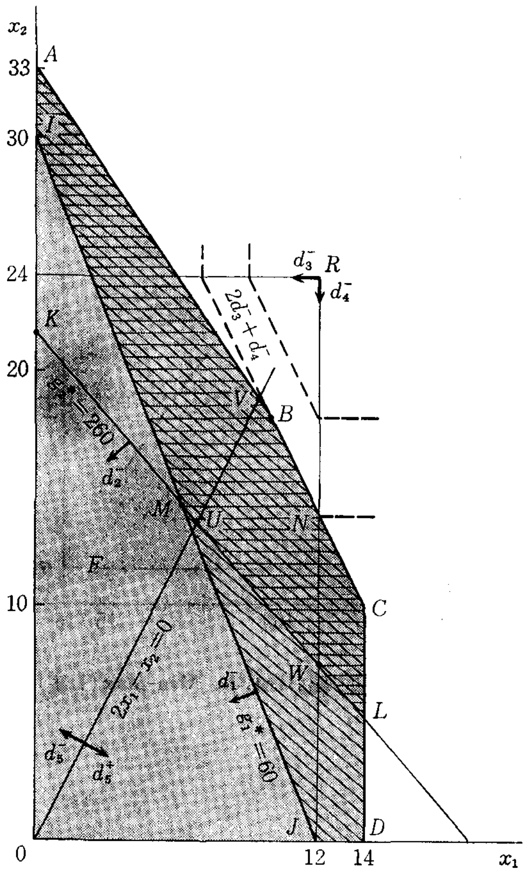


図 8　目標計画法の図解

このように，目標計画法は目標の優先順に目標制約式を追加することにより許容領域を切除してゆき，切除できなければ，追加する目標制約式の不達成度が一番少なくなるような解を探す方法である．目標の優先順位ごとに制約を追加していく多段階の線形計画法として考えることもできる．基本的には線形計画法と同じであるから，感度分析やパラメトリック分析も **1.3** 節と同様にして考えることができる．

3.2　加重和，開いたL字，Min-max（L字）の図解

各目標に明確な優先順位をつけることが困難で，各目標をバランスよく達成させたいといった場合には，さきの付順や加重方式で対応するのはむずかしい．他方，各目標についてこれ以下になることは極力避けたいという最低の水準(必要レベル) g_i^0 と，これ以上ならば満足できるという水準(十分レベル) g_i^s は比較的容易につかめる場合が多い．そこで，目標空間上の2点 $\boldsymbol{g}^0=(g_1^0, g_2^0, \cdots, g_m^0)$，$\boldsymbol{g}^s=(g_1^s, g_2^s, \cdots, g_m^s)$を結んだベクトル $\boldsymbol{\lambda}$（これを目標ベクトルと呼ぶ）を定義し，目標達成値間の非等価性をこの $\boldsymbol{\lambda}$ を用いて基準化することにより，$\boldsymbol{\lambda}$ に対してパラメトリックに可変的なリグレットの無差別線（等リグレット線）を想定する定式化がある．

目標の設定形式に応じて小さくする必要のある差異の平均値と，それらの差異のうちで最大の値 d とを線形結合したものを目的関数のリグレットとして最小化するもので，

目的関数：$r=(1-\beta)\cdot d+\beta\cdot 1/m\cdot(\sum_{i\in I^-} d_i^- + \sum_{i\in I^+} d_i^+)$

⟶　最小化

制約条件：

$$\sum_{j=1}^{n} c_{kj}x_j+\lambda_k(d_k^- - d_k^+)=g_k^s \qquad k=1,2,\cdots,m$$
$$d_i^- - d \leqq 0 \qquad i\in I^-$$
$$d_i^+ - d \leqq 0 \qquad i\in I^+$$
$$\boldsymbol{x}\in F^0$$
$$d,\ d_k^-,\ d_k^+ \geqq 0 \qquad k=1,2,\cdots,m$$

ここで，I^- は“g_i^s 以上にしたい”という形式の目標集合，I^+ は“g_i^s 以下にしたい”という形式の目標集合である．m は目標の数である．また，F^0 は“固い”制約群（目標の必要レベル制約と決定変数の非負制約も含めた不等式制約群）により形成される許容領域とする．そして，β はリグレットの等高線の開き具合を操作するパラメータであり，

$\beta=0$　→　Min-max（L字形）
$\beta=1$　→　加重和（線形）
$0<\beta<1$　→　開いたL字形

となる(図 **9** 参照)．

$\boldsymbol{g}^s=(g_1^s, g_2^s, \cdots, g_m^s)$の第 i 目標 g_i^s を g_i^0 で置き換えたベクトル $\boldsymbol{g}_i^s=(g_1^s, g_2^s, \cdots, g_{i-1}^s, g_i^0, g_{i+1}^s, \cdots, g_m^s)$ とすると，任意の目標 i と j について，目標の達成状況 $\boldsymbol{g}_i^s$ と $\boldsymbol{g}_j^s$ におけるリグレット r の値が等しく，しかもパラメータ β の値のいかんにかかわらず常に1である．すなわち，他の目標の達成値はすべて十分レベルにありながら，ある目標だけが必要レベルにあるような目標の達成状況について，それがどの目標の場合に対しても選好上無差別と判断できる場合の定式化になっている．

例題3に対し，粗利益の必要レベルとして60万円，十分レベルとして，160万円，売上高の必要レベルを260万円，十分レベルを400万円とすると，$\lambda_1=100$, $\lambda_2=140$となる．

$\beta=0$ とすると最大の差異が最小になる解を探すことになるので，等高線は1点破線で示すようになりC点が（C点が最適解になる β の範囲は $0\leqq\beta\leqq 14/57$ である），また $\beta=1$ とすると平均差異が最小の解を探すことにな

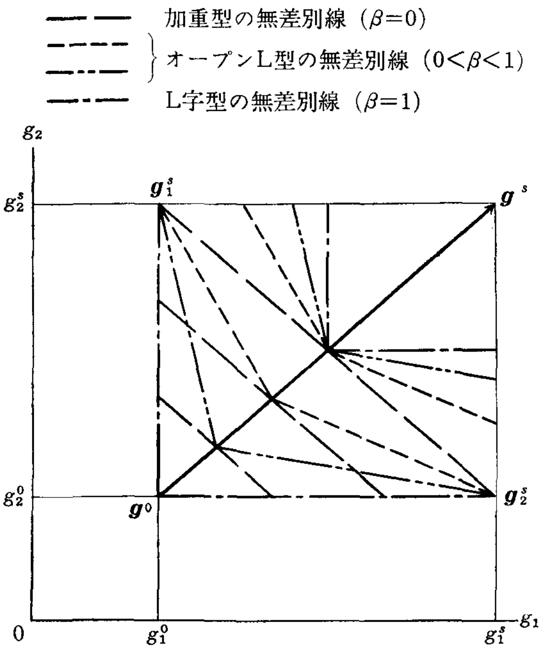


図 9　パラメータ値による無差別線の形状

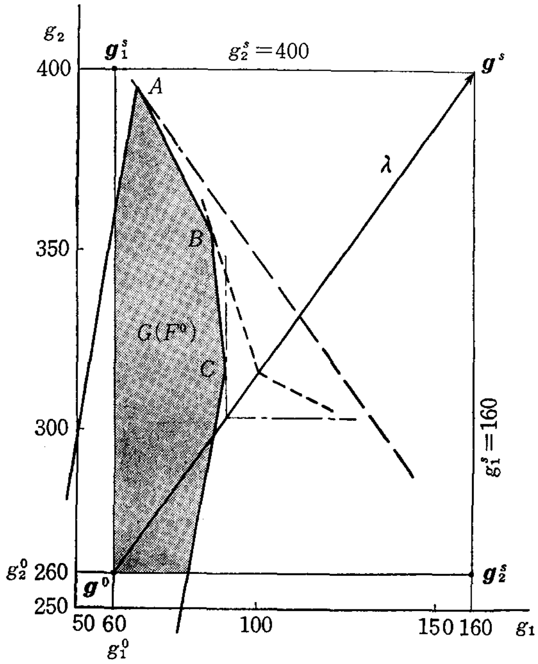


図 10　加重和，開いたL字，Min-max（L字）の図解

るので，等高線は長破線で示すようになりA点が求められる（A点が最適解になるβの範囲は 14/17≦β≦1 である）．そして，βが 14/57≦β≦14/17の範囲では，等高線は破線で示すような開いたL字形になりB点が求められる．β=14/57の場合にはリグレットの等高線が工程2の制約線と平行になるため，線分BC上のすべての点が，また β=14/17 の場合には工程1の制約線と平行になるため，線分AB上のすべての点が解となる．

参考文献

[1] Ignizio, J. P.: Linear Programming in Single and Multiple-Objective Systems, Prentice-Hall, Englewood Cliffs, (1982).

[2] 福川忠昭，山口俊和：目標計画法とその発展，日本経営工学会誌，36巻，1号，(1985)，7-19.

[3] 伏見多美雄，福川忠昭，山口俊和：経営の多目標計画法，森北出版（1986）.

[4] 小島政和ほか：特集　線形計画法の最近の発展，オペレーションズ・リサーチ，32巻，1号，(1987).

[5] Zeleny, M.: Linear Multiobjective Programming, Springer-Verlag, Berlin・Heidelberg・New York, (1974).

[6] Zeleny, M.: Multiple Criteria Decision Making, McGraw-Hill, New York, (1982).