解　説

選挙区議員定数問題の数理

大山　達雄

選挙区議員定数問題の中心課題は，与えられた総議員定数を各選挙区にそれらの有権者数の分布にもとづいて“公平 (fair)”に配分することである．19世紀以来多くの法律家や数学者がこの問題に関心をもち，特に米国では各州の下院議員定数を割当てる，いわゆる議員定数配分問題(Apportionment Problem) として，現在に至るまで学問的そして実際的にも活発な議論がなされている．本稿では議員定数配分方法の理論を整理し，さらにはそれに対するゲーム理論の立場からのひとつの見方を紹介する．

1.　議員定数配分方法の理論

総議員定数と各選挙区の有権者数が与えられた時に，各選挙区に議員定数をできるだけ“公平に”配分する方法を求めるのが議員定数配分問題である．

いま選挙区 $i\in S=\{1,2,\cdots,N\}$ の有権者数が p_i 人で総議員定数が K 人である時，この選挙区 i に割当てられる議員定数 q_i は，理論的かつ理想的には

$$q_i=\frac{p_iK}{\sum_{i\in S}p_i}=\frac{p_iK}{P} \tag{1.1}$$

$$\text{ただし}\quad P=\sum_{i\in S}p_i \tag{1.2}$$

となる．これを選挙区 i の理想議員定数と呼ぼう．しかし，現実の議員定数 d_i はそれ自身が正整数であって，かつ総議員定数が K（正整数）でなければならないという制約があるので，d_i を理想議員定数 q_i に一致させることができないのが普通である．われわれの問題を数学的に述べると，

「条件：$\sum_{i\in S}d_i=K$ (1.3)

$d_i>0$，整数，$i\in S=\{1,2,\cdots,N\}$ (1.4)

の下で，それぞれの選挙区 $i\in S$ の議員定数 d_i を理想議員定数 q_i にできるだけ近くなるように定めること」

となる．数学的にはこれだけの問題であるし，また整数組合せの数もさほど多くはない．“公平”の意味さえはっきりすれば，解法は困難ではないはずであるが，その公平の意味に数学的な表現を与えること自身がきわめて困難なのである．一見妥当と思われる公平さの数学的表現にもとづいて数学者が解法と解を与える．しかし，それが多くの人々から見てどうもしっくりゆかず，ある種の“矛盾”さえ発見されることがある．多くの人々の利益にもかかわる．少数者も尊重されなければならない．したがって，このような欠陥が容認されることはなく，公平さの数学的表現が再び探し求められることになる．このようにして数学者をはじめとする多くの研究者がこれまでの長い期間にわたって詳細な検討を加えてきた([1,2]参照)．

実際，議員定数配分問題は，ただ単に数学的に興味のある問題であるというだけではなく，米国においてその例が見られるように，現在に至るまで過去200年ものあいだ米国各州の下院議員定数

おおやま　たつお　埼玉大学大学院政策科学研究科
〒338 浦和市下大久保255

を実際に定める問題として検討が加えられ，種々の提案がなされている．そのあるものは採択され，また一方では何らかの“欠点”が発見されるたびごとに，改訂が行なわれているのである．

こういう紆余曲折の結果，最近では，すべての“望ましい”性質をもつような議員定数配分方法の存在を疑う声も出ている（完全に証明されているわけではない）．このように議員定数配分問題は根本的な意味で数学的なむずかしさを内包する問題であるので，将来とも多くの研究者によっていろいろな研究が行なわれていくであろう．

以下に紹介する議員定数配分方法は，それらの評価基準に関連して，大きく次のような3種類に分類することができる．

1. 剰余数にもとづくもの
2. 除数にもとづくもの
3. 比率にもとづくもの

上の各々に対応して，さらにいろいろな議員定数配分方法が提案されており，それらの中には実用に供されているものも少なくない．また一方では，独立に提案された配分方法が，それらの数学的構造を調べてみると実は密接な関連を有することが判明した場合もいくつかある．(これらについては後に詳述)

この章では，これまでに提案され，あるいは実際に実施された議員定数配分方法を紹介し，それらの問題点などについても述べることにしよう．

1.1 剰余数系配分方法

(a) 最大剰余数法

最大剰余数法（Largest Fraction Method）は議員定数配分問題に対してまず考えられる簡単な解決方法である．1791年に A. Hamilton によって提起されたことから Hamilton 法とも呼ばれている．実際にも米国議会で1851年から1910年まで採用されており，これを実施した議員の名にちなんで Vinton 法と呼ばれることもある．

この方法では，まず各選挙区 $i\in S$ に $\lfloor q_i\rfloor$ (q_i を越えない最大整数)人の議員定数を割り当てる．一方，総議員定数がKであることから，あと$K-\sum\lfloor q_i\rfloor$ 人（$\sum$は$\sum_{i\in S}$を表わす．今後加算記号中の$i\in S$は省略する）だけの追加配分をする必要がある．そこで $q_i-\lfloor q_i\rfloor, i\in S$ を大きい順に並べ，上の方から$K-\sum\lfloor q_i\rfloor$個の選挙区に1人ずつ議員定数を追加するのがこの方法の手順である．

なお最大剰余数法においては，以下の関係が成立する．

$$0\leqq q_i-\lfloor q_i\rfloor<1,\ i\in S \tag{1.5}$$

$$\sum\lfloor q_i\rfloor\leqq K<\sum(\lfloor q_i\rfloor+1)=\sum\lfloor q_i\rfloor+N \tag{1.6}$$

(1.6)式から $K-\sum\lfloor q_i\rfloor<N$ が得られるので，議員定数を1名分追加される選挙区は$N-1$個以下であることがわかる．最大剰余数法の考え方は他の方法とも独立しており，手法的な他のバリエーションもないようである．

1.2 除数系配分方法

議員1人が何人の有権者を“代表”すべきかという量（以下に述べるλがこれに相当する）を設定し，それにもとづいて各選挙区の議員定数を決定するというのが除数系配分方法の基本的な考え方である．これには上記の量λにもとづいた各選挙区の議員定数の定義の仕方に関して以下に紹介するような2つのバリエーションがある．

(a) 最大除数法

最大除数法（Method of Greatest Divisors）は1792年に米国の Thomas Jefferson によって採用されたことから Jefferson 法とも呼ばれている．またヨーロッパでは，その最初の提案者とされている19世紀のベルギーの数学者の名前をとって d'Hondt 法と呼ばれることもある．

1人の議員が“代表”する有権者数をλ（必ずしも整数ではない）とすると，各選挙区iの議員定数はp_i/λで与えられる．λの変化に対してp_i/λがどのように変化するかを見よう．いま簡単のために$N=2$として，横軸を選挙区1，縦軸を選挙区2の議員定数としよう．このとき，平面上の点$(p_1/\lambda, p_2/\lambda)$は，**図1.1**にあるように，$\lambda$が0から

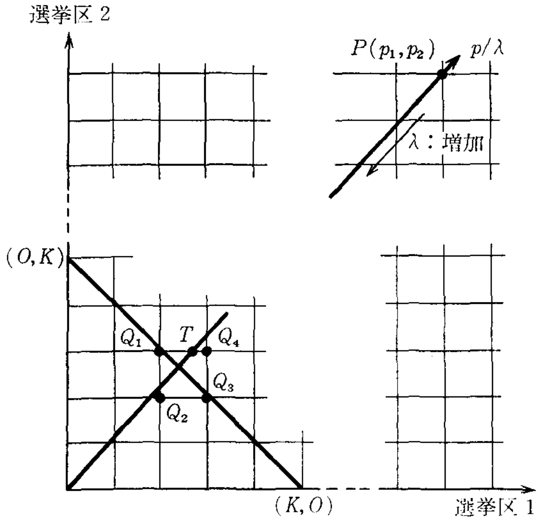

図 1.1　最大除数法の概略（2選挙区の場合）

∞に増加するにつれて原点と点 $P(p_1, p_2)$ を結ぶ半直線（p/λ と表わす）の上を，無限遠から原点に接近する．この点が $p_1+p_2=K$ という総議員定数制約を表わす直線にぶつかるとき，それが整数格子点であれば定数配分が得られたことになるが，通常はそうはならず，この交点の付近で条件を満たす格子点を探すことになる．そこで，とりあえず各選挙区 i に $\lfloor p_i/\lambda \rfloor$ を割り振ることにして，その和 $\sum\lfloor p_i/\lambda\rfloor$ を作ってみる．λ を増加させつつ，この値を見てみると，一般の場合には

$$\sum\lfloor p_i/\lambda\rfloor \geqq K \tag{1.7}$$

を満たすような最大の λ が存在する（証明略）．これを $\lambda^{GD}_{\max}$ と書くことにしよう．ところで $p_i/\lambda^{GD}_{\max}$, $i=1,\cdots,N$ の中にはちょうど整数値になるものが存在する．というのは，λ をより少しでも大きくすれば，(1.7) が満たされなくなるので，そのときいずれかの i に対して $\lfloor p_i/\lambda\rfloor$ が変化することになるからである．そこで

$$E=\{i \mid p_i/\lambda^{GD}_{\max}：\text{整数}\} \tag{1.8}$$

とおこう．さて

$$K'=\sum\lfloor p_i/\lambda^{GD}_{\max}\rfloor \tag{1.9}$$

とおくとき，$K'=K$ならば上述のごとく議員定数を

$$d_i=\lfloor p_i/\lambda^{GD}_{\max}\rfloor$$

と定めれば良い．一方 $K'>K$ の場合には，いずれかの選挙区に対して $\lfloor p_i/\lambda^{GD}_{\max}\rfloor$ より少ない議員定数を割り振らなければならない．議員定数を 1 選挙区で $\lfloor p_i/\lambda^{GD}_{\max}\rfloor$ より 2 名以上削減することは公平さという点から避けなければならないので，減らすとしても高々 1 名である．しかし一体何カ所の選挙区から減らせばよいかというと，$|E|-1$ であることがわかるであろう．実際 λ を少し大きくすれば $\sum\lfloor p_i/\lambda\rfloor$ の値は $|E|$ だけ小さくなり，

$$\sum\lfloor p_i/\lambda\rfloor<K \quad \text{すなわち} \quad \sum\lfloor p_i/\lambda\rfloor\leqq K-1$$

を満たすからである．そこで $D\subset E$ かつ $|D|=|E|-1$ となるような集合 D を選んで（この選び方は一意的ではない）

$$\begin{aligned} d_i&=\lfloor p_i/\lambda^{GD}_{\max}\rfloor & i\notin D\text{ の時} \\ &=p_i/\lambda^{GD}_{\max}-1 & i\in D\text{ の時} \end{aligned} \tag{1.10}$$

とすればひとつの議員定数配分が得られる．(1.8) において，$|E|=1$ の場合には $K'=K$ となるので $D=\phi$ が得られ，$d_i=\lfloor p_i/\lambda^{GD}_{\max}\rfloor$, $i\in S$ が配分定数を与える．これが最大除数法による議員定数配分である．

$N=2$ の場合を考えてみよう．**図 1.1** において点 $Q(q_1, q_2)$ はそれぞれ $q_1=p_1K/P, q_2=p_2K/P$ を表わす．また $Q_i, i=1,2,3,4$ は整数格子点を表わし，それぞれ $Q_1(\lfloor q_1\rfloor,\lceil q_2\rceil)$, $Q_2(\lfloor q_1\rfloor,\lfloor q_2\rfloor)$, $Q_3(\lceil q_1\rceil,\lfloor q_2\rfloor)$, $Q_4(\lceil q_1\rceil,\lceil q_2\rceil)$ のように与えられる．したがって (1.7) を満足するような最大の λ に対応する $\lambda^{GD}_{\max}$ は，直線 p/λ と格子点正方形 $Q_1Q_2Q_3Q_4$ 上の辺 Q_1Q_4 との交点 T で達成されることになる．また，議員定数配分は Q_1 あるいは Q_3 のいずれかということになる．

(b)　過半小数法

過半小数法(Method of Major Fractions)は 1832年に Daniel Webster によって最初に提案されたことから米国では Webster 法とも呼ばれている．またヨーロッパでは，Sainte-Lagues法とも呼ばれ，特にデンマーク，ノルウェーでは現在でも実際の議員定数配分に用いられている．過半小数法の基本的な構造は，前述の最大除数法と

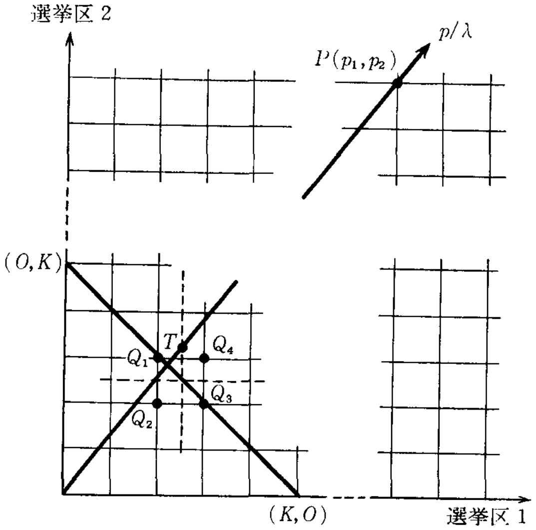

図 1.2 過半小数法の概略（2選挙区の場合）

ほぼ同様である．最大除数法の(1.7)式が p_i/λ を越えない最大整数 $\lfloor p_i/\lambda \rfloor$ を採用するのに対して，過半小数法では p_i/λ を四捨五入した整数値 $\lfloor p_i/\lambda + 0.5 \rfloor$ を用いる点が主な相違点である．この場合にも次の関係を満足する最大の $\lambda(=\lambda^{MF}_{\max})$ を求める：

$$\sum \lfloor p_i/\lambda + 0.5 \rfloor \geqq K \qquad (1.11)$$

また，(1.8) に対応する添字集合として，次の集合を考える．

$$E = \{ i \mid p_i/\lambda^{MF}_{\max} + 0.5 : 整数 \} \qquad (1.12)$$

この場合も $|E| \geqq 1$ は明らかである．したがって

$$K' = \sum \lfloor p_i/\lambda^{MF}_{\max} + 0.5 \rfloor \qquad (1.13)$$

とおき，$K'=K$ の場合には

$$d_i = \lfloor p_i/\lambda^{MF}_{\max} + 0.5 \rfloor, \quad i \in S,$$

$K'>K$ の場合には $D \subset E$ かつ $|D| = |E| - 1$ となるように選挙区の集合 D を選んで

$$\begin{aligned} d_i &= \lfloor p_i/\lambda^{MF}_{\max} + 0.5 \rfloor & i \notin D \text{の時} \\ &= p_i/\lambda^{MF}_{\max} - 0.5 & i \in D \text{の時} \end{aligned} \qquad (1.14)$$

とすればよい．この場合も $|E|=1$ の時は $K'=K$, $D=\phi$ が得られるので，$d_i = \lfloor p_i/\lambda^{MF}_{\max} + 0.5 \rfloor, i \in S$ が議員定数配分を与える．

過半小数法についても選挙区数が2の場合の図解法を示そう．**図1.2**の点線は格子点正方形の互いに向かい合う辺の中点を結ぶ中線とする．(1.11) から得られる $\lambda_{\max}$ は，直線 p/λ と縦の点線との交点 T で達成されることがわかる．

表 1.1 最大剰余数法，最大除数法，過半小数法による議員定数配分

選挙区 (i)	有権者数 (p_i)	議員定数 (d_i^*) 最大剰余数法	最大除数法	過半小数法
1	930	93	96	92
2	19	2	1	2
3	18	2	1	2
4	17	2	1	2
5	16	1	1	2
計	1000	100	100 ($\lambda^{GD}_{\max}=310/32$)	100 ($\lambda^{MF}_{\max}=32/3$)

議員定数配分方法としての最大剰余数法，最大除数法，過半小数法の3種類がかなり異なる配分を与えることを例によって示そう．**表 1.1** にあるような5選挙区，総議員定数100名の例を考えると，3種類による議員定数配分がすべて異なる数字を与えていることがわかる．**表 1.1** の場合は極端な例ではあるが，これら3つの配分方法がかなり異なることを示すには充分であろう．

(c) 割当法

除数を評価基準とする配分方法がもう1つある．Balinski–Young [3] によるもので，本稿で紹介した他の方法がいずれも19世紀初頭に提案されたものであるのに対して，これはごく最近(1974年) のものである．これまでの配分方法のもつ欠点を改良しようというのがそのねらいである（詳細は次章に述べる）．この方法は，総議員定数を順次増やしながら各選挙区に定数を与えていくもので，基本的には最大除数法と同じ判定基準にもとづくものである．すなわち割当法は，総議員定数を1だけ追加するさいに，議員1人当り有権者数が最も大きいところを選ぶ方法である．

いま総議員定数が k の時の選挙区 i の議員配分数を d_i^k とすると，この方法によって得られる d_i^k が

$$d_i^k < kp_i/P \quad つまり \quad d_i^k + 1 \leqq \lceil kp_i/P \rceil$$

なる特性（割当分特性と呼ばれる．次章参照）を満たしていることから割当法（Quota method）と呼ばれる．割当法の手順は以下のように表わすことができる．

1. $d_i^k=0,\ k=1,\cdots,k,\ i\in S,\ k=0.$
2. $k=k+1.$
3. $d_i^k<kp_i/P$ であってかつ $d_j^k<kp_j/P$ なるすべての $j\in S$ に対して $p_i/(d_i^k+1)\geqq p_j/(d_j^k+1)$ ならば，

$$d_i^k=d_i^k+1$$
$$d_j^k=d_j^k \qquad j\in S,\ j\neq i$$

とする．$k<K$ ならば2に戻り，$k=K$ ならば終了．

1.3 比率系配分方法

議員1名当りの有権者数を表わす（p_i/d_i），あるいはその逆数に相当する有権者1名当りの議員数（d_i/p_i）などの“比率”に注目し，それらに関する任意の2選挙区間の相対誤差，絶対誤差等の量が“局所的にではあるが”できるだけ小さくなるようにするというのが比率系配分方法の基本的な考え方である．これは1920年代初めに数学者のE. V. Huntingtonによって提案されたことから全般的にHuntington法とも呼ばれている．この方法はこれまでの議員配分方法とは少し異なる．つまり最大剰余数法，最大除数法，過半小数法などがある評価基準を“全域的（global）に”最適化しようとしているのに対して，Huntington法では“局所的（local）に”最適化しようとするのである．そこで手順という点からみれば，選挙区がNヵ所の場合には最大 $N(N-1)/2$ 回の比較計算を行なうことが必要になる．実際上，Nの数が極端に多いことは考えられないし，また後述のようにはるかに効率の良い計算方法が存在するので，計算上の手間が重大な欠点となるというわけではない．

(a) 等比率法（Huntington 1法）

Huntington自身は5種類の方法を提案した．等比率法（Method of Equal Proportion, Huntington 1法）はそのうちのもっとも一般的な方法であって，1941年以来米国下院の州別議員定数の決定などに現在でも用いられている．

いま，2つの選挙区 i と j の間の議員1名当りの有権者数の比率の相対誤差を表わす次の量 $\varepsilon_H{}^1$ に注目し，これを最小化しようというのがこの等比率法である．

$$\varepsilon_H{}^1=|p_i/d_i-p_i/d_j|/\min\{p_i/d_i, p_j/d_j\}. \tag{1.15}$$

いま，2つの選挙区 i と j の間に $p_i/d_i\leqq p_j/d_j$ が成立する時，選挙区 i は j より“有利である（favored）”という．そこで選挙区 i が j より有利な場合に，選挙区 i の議員定数を1だけ減らし，j のそれを1だけ増加させ（i から j に議員定数を1だけ“移転”させ）れば(1.15)で与えられる相対誤差を $\varepsilon_H{}^1$ が減少する．つまりこのような移転が“有効”ならばそれを行なうというのがHuntington の規則（Huntington's rule）である．そして，任意の2つの選挙区を順次とりあげ，それらの間にHuntington規則を適用し，これ以上議員定数の移転を行なうことが有効とはなりえなくなる（Huntington 規則の収束状態）まで反復計算を実行するというのが等比率法の手順である．

ところで，前述のように，この方法では比較計算に時間がかかるので，計算方法の効率化が求められる．そのためのひとつの定理を示そう．

定理 1.1 2つの選挙区 i と j において，i が j より有利な場合に i から j へ議員定数を1だけ移転するのが有効であるということと次の関係が成立することとは等価である．

$$p_i/\sqrt{d_i(d_i-1)}<p_j/\sqrt{d_j(d_j+1)} \tag{1.16}$$

証明 i が j より有利であることから $p_i/d_i\leqq p_j/d_j$．i から j へ定数を1だけ移転すると，$p_i/d_i \longrightarrow p_i/(d_i-1)$，$p_j/d_j\longrightarrow p_j/(d_j+1)$ となることから，移転が有効であるためには以下の関係が成立しなければならない．

$$\frac{p_j/d_j-p_i/d_i}{p_i/d_i}>\frac{p_i/(d_i-1)-p_j/(d_j+1)}{p_j/(d_j+1)}$$

これを整理すると(1.16)に等価な関係が得られる． ☒

この定理を用いると，等比率法の計算を簡単にすることができる．いま，すべての選挙区 $i \in S$ に対して，$\sum d_i = K$ を満足するような議員定数 $\{d_i\}$ が与えられているとする．

（手順1） $p_i, d_i, i \in S$に対して，以下の量を計算する．

$$\frac{p_i}{\sqrt{d_i(d_i-1)}},\quad \frac{p_i}{\sqrt{d_i(d_i+1)}}$$

（手順2） $\dfrac{p_i}{\sqrt{d_i(d_i-1)}} < \dfrac{p_j}{\sqrt{d_j(d_j+1)}}$

なる組 $\{i, j\}$ が存在するとき，$d_i \to d_i - 1$，$d_j \to d_j + 1$ とする．このような組 $\{i, j\}$ が存在しなければ終了．

このようにして最終的には等比率法では

$$\max_i \frac{p_i}{\sqrt{d_i(d_i+1)}} \leqq \min_i \frac{p_i}{\sqrt{d_i(d_i-1)}} \quad (1.17)$$

が成立し，この状態が Huntington 規則の収束状態となる．

有権者数を p，議員定数を d とする時，関数 $p/\sqrt{d(d+1)}$ をそれぞれの選挙区に対応する階数関数 (rank function) と呼ぶことにすると，等比率法を以下のようにも解釈することができる．すなわち，等比率法によって総議員定数 K に対する議員配分が得られている時，総議員定数 $K+1$ に対する議員配分を求めるには，階数関数の値を計算し，それが最大になる選挙区，つまり

$$\max_i \frac{p_i}{\sqrt{d_i(d_i+1)}} \quad (1.18)$$

を与える選挙区 i_m に議員定数1を追加配分すればよい．この特性は等比率法の解の構造上の特性として重要である．

(b) その他の比率系配分方法

何らかの比率を評価基準とする配分方法としては，等比率法を含めて5種類の方法が提起されている．これらの方法の相違点は(1.15)に相当する"誤差関数"にもとづいている．すなわち，以下に示す5種類の誤差関数に対応してそれぞれの議員定数配分方法が提案されるのである．

$$\varepsilon_H^1 = |p_i/d_i - p_j/d_j| / \min\{p_i/d_i, p_j/d_j\} \quad (1.15再)$$

$$\varepsilon_H^2 = d_i/p_i - d_j/p_j \quad (1.19)$$

$$\varepsilon_H^3 = p_j/d_j - p_i/d_i \quad (1.20)$$

$$\varepsilon_H^4 = d_i p_j/p_i - d_j \quad (1.21)$$

$$\varepsilon_H^5 = d_i - p_i d_j/p_j. \quad (1.22)$$

表 1.2　Huntington 法の誤差関数と階数関数

Huntington 法	誤差関数	階数関数
1 法（等比率法）	$\left(\frac{p_i}{d_i}-\frac{p_j}{d_j}\right)\Big/\min\left\{\frac{p_i}{d_i}, \frac{p_j}{d_j}\right\}$	$\frac{p}{\sqrt{d(d+1)}}$
2 法	$\left\lvert\frac{d_i}{p_i}-\frac{d_j}{p_j}\right\rvert$	$\frac{p}{d+1/2}$
3 法	$\left\lvert\frac{p_i}{d_i}-\frac{p_j}{d_j}\right\rvert$	$\frac{p}{d(d+1)/(d+1/2)}$
4 法	$\left\lvert\frac{d_i p_j}{p_i}-d_j\right\rvert$	$\frac{p}{d+1}$
5 法	$\left\lvert d_i-\frac{p_i d_j}{p_j}\right\rvert$	$\frac{p}{d}$

ある選挙区が他の選挙区よりも有利であるという概念もこれらの誤差関数にもとづいて導入される．すなわち，$k=2, \cdots, 5$ に対して，i が j より有利（ε_H^k の意味において）であるとは $\varepsilon_H^k > 0$ を意味する．上の各々の誤差関数にもとづいて得られる Huntington 規則を適用して議員定数を定めるわけであるが，計算の効率化のために等比率法の場合と同様に他の場合についてもそれぞれの階数関数が得られている(詳細省略，**表1.2**参照)．(1.15)，(1.19)－(1.22)の誤差関数に対応して得られる配分方法をそれぞれ Huntington 1法，2法，…，5法と呼ぶ．

2. 議員定数配分方法の相互関連と諸特性

2.1 議員定数配分方法の相互関連

さて前章においていくつかの議員定数配分方法を見てきた．それらはそれぞれ異なる考え方にもとづくものであるが，数学的に詳しく調べてみる

と，実は等価であるものも少なくない．本節ではこのような関係を示しておく．

(a) Huntington 2法と過半小数法の等価性

Huntington 2法に注目すると，表1.2の階数関数の形からHuntington規則の収束状態では，最終的には次の関係を満足するλが存在する．

$$\max_i \frac{p_i}{d_i+0.5} \leqq \lambda \leqq \min_i \frac{p_i}{d_i-0.5} \tag{2.1}$$

このようなλに対しては次の関係が成立する．

$$p_i/\lambda-0.5 \leqq d_i \leqq p_i/\lambda+0.5 \tag{2.2}$$

したがってそれぞれの選挙区の議員定数配分数d_iは

$$d_i=\lfloor p_i/\lambda+0.5 \rfloor \tag{2.3}$$

によって与えられる．(1.14)，(2.3)よりHuntington 2法と過半小数法が等価であることがわかる．

定理 2.1 Huntington 2法と過半小数法は等価である．

(b) Huntington 4法と最大除数法の等価性

Huntington 4法について考えてみよう．この方法の収束状態では，Huntington 2法の場合と同様に，階数関数の形から，次の関係を満足するλが存在する．

$$\max_i \frac{p_i}{d_i+1} \leqq \lambda \leqq \min_i \frac{p_i}{d_i} \tag{2.4}$$

したがってλは次の関係を満足する．

$$p_i/\lambda-1 \leqq d_i < p_i/\lambda \tag{2.5}$$

よって議員配分数d_iは次式で与えられる．

$$d_i=\lfloor p_i/\lambda \rfloor \tag{2.6}$$

(2.6)を(1.10)と比較すると，Huntington 4法と最大除数法が等価であることがわかる．

定理 2.2 Huntington 4法と最大除数法は等価である．

(c) Huntington 5法と最小除数法の等価性

Huntington 5法について上と同様のアプローチを試みると，次の関係を満足するλが存在する．

$$\max_i \frac{p_i}{d_i} \leqq \lambda \leqq \min_i \frac{p_i}{d_i-1} \tag{2.7}$$

$$p_i/\lambda \leqq d_i \leqq p_i/\lambda+1. \tag{2.8}$$

したがってこの場合の議員定数配分数d_iは次式によって与えられる．

$$d_i=\lceil p_i/\lambda \rceil \tag{2.9}$$

(2.6)のHuntington 4法が最大除数法に相当することを考えると，Huntington 5法はいわば最小除数法(Method of Smallest Divisors)に相当すると言うことができる．

定理 2.3 Huntington 5法と最小除数法は等価である．

定理2.1−2.3の結果から，5種類のHuntington法のうち3種類は前章に述べた配分方法と等価となる．ハーバード大学の数学者であったE. V. Huntingtonが1920年代初めに提起した，しかもこれまでの方法とかなり異なる（全域的最適化に対して局所的最適化という意味で）とされた方法が前述の配分方法とかなり密接な関係を有するのは興味あることである．

2.2 議員定数配分方法の諸特性

議員定数配分方法はどれも公平さをめざして考案されたことはいうまでもないが，一方においてその解，すなわち得られた配分定数が備えているべき望ましい特性を有しているか否かという点からこれらを評価する必要がある．配分定数が備えるべき望ましい特性にはいくつかのものが考えられる．代表的なものをとりあげて，これまでに紹介した配分方法がそれらを備えているか否かについて考えてみよう．

(a) 割当分特性

割当分特性(Quota property)とは各選挙区に対する議員定数配分d_iと理想議員定数$q_i(=p_iK/P)$との間に次の関係が成立する場合をいう．

$$\lfloor q_i \rfloor \leqq d_i \leqq \lceil q_i \rceil, \quad i \in S \tag{2.10}$$

すなわち上式は，各選挙区に対する配分定数がその選挙区の有する厳密な割当分，つまり理想配分数と1以上離れていないことを意味する．特に上の関係を上側と下側の2つの特性に分離して，

$$\text{上側割当分特性} \quad d_i \leqq \lceil q_i \rceil \quad i \in S \tag{2.11}$$

$$\text{下側割当分特性} \quad \lfloor q_i \rfloor \leqq d_i \quad i \in S \tag{2.12}$$

と呼ぶこともある．表1.1の例あるいはまたそれぞれの配分方法の計算プロセスから次の定理が得られる．

定理 2.4 最大剰余数法は割当分特性を満たす．最大除数法は下側割当分特性は満たすが，上側割当分特性は満たさない．過半小数法は上側割当分，下側割当分のいずれの特性も満たさない．

(b) 総議員定数特性

議員配分方法において総議員定数がKから$K+1$に増えた場合に，どの選挙区の議員定数も減少しないという性質を総議員定数特性(House monotone property)という．この特性は，過去の米国議会で実際に問題になったことがあることからもわかるように，現実の議員定数配分の制度運用上も重要な性質である．たとえば議員定数配分方法として最大剰余数法を採用していた1881年当時の米国議会では，総定数299のとき定数8を有していたアラバマ州が総定数300になった時に定数が7に減少するということが生じた．このことから，このような現象をアラバマパラドックス(Alabama paradox)と呼んでいる．

最大剰余数法が総議員定数特性を満たさないことはアラバマパラドックスの例からも明らかである．最大除数法と過半小数法については，(2.7)，(2.1)とそれぞれの議員配分プロセスから，いずれも総議員定数特性を満たすということがわかる．

定理 2.5 過半小数法，最大除数法はいずれも総議員定数特性を満たすが，最大剰余数法は満たさない．

(c) 有権者数特性

総議員定数と選挙区総数が一定という条件の下で，ある選挙区iの有権者数が増加し，他の選挙区の有権者数は不変であるとする．この時，新しい有権者数分布の下での選挙区iの議員定数配分数がもとのそれより小さくなることはないというのが有権者数特性(Population monotone property)である．

表 2.1 議員定数配分方法と特性との関連

特性＼方法		最大剰余数法	Huntington 法 1法	2法	3法	4法	5法	割当法
割当分特性	上側	○	×	×	?	×	○	○
	下側	○	×	×	?	○	×	○
総議員定数特性		×	○	○	○	○	○	○
有権者数特性		○	○	○	○	○	○	×

(対応する列の方法が対応する行の特性を満たす場合には○，満たさない場合には×，不明な場合には？がつけてある．)

最大剰余数法が有権者数特性を満足することは明らかであろう．最大除数法，過半小数法についても，同様にして示すことができる．

定理 2.6 最大剰余数法，最大除数法，過半小数法は有権者数特性を満足する．

割当法については，次の定理が成立する．

定理 2.7 割当法は上側，下側の割当分特性および総議員定数特性を満たすが，有権者数特性は満たさない．

これまでの結果を整理すると**表2.1**が得られる．ここに紹介した以外にも，議員定数配分方法のもつべき望ましい特性がいくつか提起されている．たとえば，いろいろな配分方法にもとづいて得られた定数配分解が（選挙区の一対比較による定数の）“移転”を有効とするか否かに関する解の安定性の問題，各選挙区の有権者数と議員定数が与えられているとき，総議員定数を1だけ追加した場合にどの選挙区が追加定数を得るべきかということに関する各選挙区の“優先度”と定数配分方法の斉合性の問題，あるいはまた配分方法が分割志向型か連合志向型か（ある議員配分方法にもとづいて議員を配分する時，2つの選挙区が連合した場合に議員定数配分が前より少なくなるか多くなるかによって，それらの選挙区が分割志向型か連合志向型かを論ずる）などについても多くの議論がなされている．また，これまでの配分方法に何らかの改良を加えた方法もいくつか提案されてい

る．興味のある諸氏は，たとえば［4,5,6,7,8,9,10］などを参照されたい．

3. ゲーム理論的アプローチと議員定数配分問題

この章では選挙区の投票力（voting power）という観点に注目し，各選挙区がどのような投票力を有するのが妥当であるかという問題をゲーム理論の立場から考え，それを議員定数配分問題と関連づけて紹介する．投票力については，いかにして各選挙区（ゲーム理論の用語ではプレーヤーに相当）の投票力を計測するかという問題を中心に多くの検討がなされ，興味ある有用な結果が数多く得られている［11,12］．

3.1 投票力の計測方法

いまN人の投票者（プレーヤー）がいて，それぞれの投票者$i \in S=\{1,\cdots,N\}$は投票のさいに重み（weight）w_iの投票権を行使できるものとする．この時，投票者の連合$T \subseteq S$が，ある与えられた量qに対して

$$\sum_{i \in T} w_i \geqq q \tag{3.1}$$

を満たす時，連合Tは投票に勝つ（win）といい，Tを勝利連合（winning coalition）という．また連合Tが勝利連合でない時，敗北連合（losing coalition）と呼ぶ．このようなゲームを［q;$w_1,\cdots,w_N$］と表わす．たとえば$N=4$に対してゲーム［51; 30,25,15,12］を考えると，$\{1,2\}$，$\{2,3,4\}$などは次式のようにこのゲームの勝利連合であるが，$\{2,3\}$や$\{3,4\}$は敗北連合である．

$$\sum_{\{1,2\}} w_i=30+25=55>51$$

$$\sum_{\{2,3,4\}} w_i=25+15+12+=52>51$$

$$\sum_{\{2,3\}} w_i=25+15=40<51$$

$$\sum_{\{3,4\}} w_i=15+12=27<51$$

ある勝利連合Tについて，そのいかなる真部分集合も勝利連合とはなり得ないことをいえる時，Tを極小勝利連合（minimal winning coalition）という．したがって上述のゲームの例では，$\{1,2\}$，$\{2,3,4\}$などは極小勝利連合である．また任意の勝利連合Tに含まれる投票者kに対して

$$\sum_{i \in T} w_i \geqq q \quad かつ \quad \sum_{i \in T-\{k\}} w_i < q \tag{3.2}$$

が成立する時，投票者kは軸（pivot）であるという．つまり軸である投票者kは連合に加わることによって敗北連合を勝利連合に変えることができるわけである．

各投票者の投票力を表わすさいによく用いられる指数の1つとして1950年代に提起されたShapley-Shubik投票力指数（power index）［12］がある．これは，各投票者が連合への参加順序をも考えた上で勝利連合の軸となりうる割合であると定義される．すなわち

$$\varphi_i=(\text{投票者 } i \text{ が勝利連合の軸となる場合の数})/N! \tag{3.3}$$

を投票者iのShapley-Shubik投票力指数という．

ところで，連合のすべての順列は“等確率”で起こると考えてよいから，(3.3)式は次のように書くことができる．

$$\varphi_i=\sum \frac{(t-1)!\ (N-t)!}{N!} \tag{3.4}$$

$t=|T|=T$ に含まれる投票者数．

(3.4)式中の加法記号は，投票者iが軸となるようなすべての勝利連合Tに関して加え合わせることを意味する．また(3.4)は，$|T|-1=t-1$，$N-|T|=N-t$人の投票者がそれぞれ任意の順序で連合に加わることを表わしている．

前述のゲーム［51;30,25,22,12］の場合には，投票者1が軸となる勝利連合は$\{1,2\}$，$\{1,3\}$，$\{1,2,3\}$，$\{1,2,4\}$，$\{1,3,4\}$の5通りである．したがって要素数2個の勝利連合が2つ，要素数3個の勝利連合が3つあることから，$N!=24$を用いると(3.4)式よりφ_1は次のように与えられる．

$$\varphi_1=(2\times1!\times2!+3\times2!\times1!)/24=10/24=5/12.$$

同様にして他の投票者についてもShapley-Shubik投票力指数が以下のように与えられる．

表3.1 ゲーム[51;30,25,22,12]のBanzhaf投票力指数

投票者				勝(W)敗(L)	限界性			
1(30)	2(25)	3(22)	4(12)	W/L	1	2	3	4
1	1	1	1	W				
1	1	1	0	W	*			
1	1	0	1	W	*	*		
1	1	0	0	W	*	*		
1	0	1	1	W	*		*	
1	0	1	0	W	*		*	
1	0	0	1	L		*	*	
1	0	0	0	L		*	*	
0	1	1	1	W		*	*	*
0	1	1	0	L	*			*
0	1	0	1	L	*		*	
0	1	0	0	L	*			
0	0	1	1	L	*	*		
0	0	1	0	L	*			
0	0	0	1	L				
0	0	0	0	L				
					10	6	6	2

注) 表中の1は連合に参加，0は不参加でさることを示す．また*は当該投票者が当該連合に対して限界的であることを示す．

$$\varphi_2=\varphi_3=6/24=1/4,\quad \varphi_4=2/24=1/12$$

上の結果からも容易に確認されるが，一般にShapley-Shubik 投票力指数 φ_i に関しては次の関係が成立する．

$$\sum_{i\in S}\varphi_i=1 \tag{3.5}$$

Shapley-Shubik指数と並んでよく用いられるもうひとつの投票力指数に，1960年代半ばに法律家 Banzhaf によって提起されたBanzhaf投票力指数 (power index) がある．Shapley-Shubik 投票力指数が連合への参加順序まで考慮するのに対して，Banzhaf 指数では組合せのみを考慮する．

投票者 i と連合Tに対して，投票者 i がその所属を変更した場合（連合に入っていればそれから脱退し，連合に入っていなければそれに参加する）に連合Tの勝利と敗北とが逆転する時，投票者 i は限界的 (marginal) であるという．投票者 $i\in S$ が限界的であるような場合の数を b_i と表わすと，投票者 i の Banzhaf 投票力指数 β_i は次式で定義される．

$$\beta_i=b_i/\sum_{i\in S}b_i \tag{3.6}$$

この場合にも次の関係が成立することは明らかである．

$$\sum_{i\in S}\beta_i=1 \tag{3.7}$$

ゲーム［51;30,25,22,12］の場合について考えてみよう．**表3.1**からもわかるように，すべての連合の数 $2^4=16$ 通りのうちで，たとえば投票者1が参加のときに勝利連合であるが，脱退すると敗北連合となる場合は {1,2,3}, {1,2,4}, {1,2}, {1,3,4}, {1,3} の5通りある．また一方投票者が連合に参加していないときは敗北連合であるがそれに加わると勝利連合となるような場合は{2,3}, {2,4}, {2}, {3,4}, {3} の5通りある．つまり投票者1が限界的であるのは全部で10通りとなるので $b_1=10$となる．同様にして投票者 2,3,4 に関してはそれぞれ $b_2=b_3=6, b_4=2$ となるので Banzhaf 投票力指数は次のように与えられる．

$$\beta_1=10/24=5/12,\quad \beta_2=\beta_3=6/24=1/4,$$
$$\beta_4=2/24=1/12.$$

この例題では2つの投票力指数が同じになることがわかる．

3.2 投票力指数と議員定数配分

総議員定数が所与であるという条件の下では，各選挙区の有権者数に応じて（比例して）議員定数を配分するのが“理想的”であるというのがこれまでの議論の前提であった．つまり選挙区 i の有権者数が j のそれの2倍ならば，i の議員定数は j のそれの2倍であるべきであるという議論である．しかし投票力指数の考えを用いると，この議論はどうなるであろうか．たとえばある議案に対してN人の投票者がいるとすると，そのうちの任意の1人が限界的となる組合せは残りの$N-1$人がちょうど賛否同数に分かれている場合に相当する．したがってこのような場合の数は次式で与えられる．

$$\frac{2(N-1)!}{\{((N-1)/2)!\}^2} \tag{3.8}$$

上式における分子の2倍は，投票者 i が連合に含まれる場合とそうでない場合とを考慮したものである．ここで Stirling の公式による近似

$$m! \doteqdot \sqrt{2\pi m}\cdot m^m e^{-m}$$

を用いると (3.8) 式は次のように近似することができる．

$$\frac{2\sqrt{2\pi(N-1)}(N-1)^{N-1}e^{-(N-1)}}{2\pi((N-1)/2)((N-1)/2)^{N-1}e^{-(N-1)}}$$

$$=\frac{2^{N+1}}{\sqrt{2\pi(N-1)}} \qquad (3.9)$$

したがって N 人の投票者の賛否の組合せの数 2^N で割ると

$$\frac{2}{\sqrt{2\pi(N-1)}} \qquad (3.10)$$

となり，Banzhaf投票力指数（ある投票者 i が限界的である場合の数をすべての組合せ数で割った割合を（相対）Banzhaf投票力指数ともいう）に相当する量は $N-1$ に逆比例するのがわかる．

つまり(3.10)式は，ある選挙区 i の有権者数がもう1つの選挙区 j の有権者数の4倍である時，i の議員定数は j の議員定数の（4倍ではなく）2倍であるべきことを意味する．これまでの議論にあった“議員定数は有権者数に比例する”という考え方との相違をなすものとして興味深い．ちなみに，IFORS（国際OR学会連盟）では，各国の代表者（1名）は各々の国のOR学会正会員数の平方根に比例した投票力を有すると定めている．これはまさに上の議論に沿ったものといえるであろう．米国の大統領選挙を例にとり，それぞれの州のShapley-Shubik投票力指数あるいは各州の代議員が有する投票力指数を計算した結果が[11]に示されている．わが国の政党自民党の総裁選の各派閥の所属議員の投票力指数をこのような立場から計算するとどうなるであろうか？

おわりに

ひとくちに議員定数問題と言っても“公平”とは何か，“有権者の投票力”とは何か，あるいはまた選挙区分割をどうすればよいか，各選挙区の議員定数をどのように定めるか，望ましい総議員定数は何か，などわれわれORの研究にたずさわる人間にとっても興味ある問題が未解決のまま数多く残っている．ある意味では議員定数問題はまったく“未解決”の分野であると言っても過言ではないかも知れない．

本稿では議員定数問題の定式化と解の特性についてこれまでに得られているいくつかの結果を中心に整理した．また投票力指数の概念を中心としてゲーム理論の立場から眺めた場合の分析方法の紹介を行なった．ここでは議員定数問題のほんの一端を紹介したに過ぎない．これからもますます多くの研究がなされ，貴重な結果が得られるであろうが，本稿がそのような方向へのひとつのきっかけとなれば筆者としてこの上ない幸いである．

最後になりましたが，本稿の作成に当っては原稿の段階から柳井浩教授（慶応大学理工学部）にていねいに読んでいただき，多くの貴重かつ適切なコメントをいただきました．ここに改めて感謝の意を表します．

参 考 文 献

[1] Lucas, W. F. 1983, “The Apportionment Problem”, *Modules in Applied Mathematics*, Chapter 14, Lucas, W.F. (ed.), Vol. 2, Springer-Verlag.

[2] Balinski, M.L. and Young, H.P. 1982, *Fair Representation : Meeting the Ideal of One Man, One Vote*, Yale University Press.

[3] Balinski, M.L. and Young, H.P. 1975, “The Quota Method of Apportionment”, *American Mathematical Monthly*, 82, pp. 701-730.

[4] Balinski, M. L. and Young, H. P. 1979, “Criteria for Proportional Representation”, *Operations Research*, 27, pp. 80-95.

[5] Balinski, M. L. and Young, H. P. 1977, “Apportionment Schemes and the Quota Method”, *American Mathematical Monthly*, 84, pp. 450-455.

[6] Balinski, M.L. and Young, H.P. 1977, “On

Huntington's Methods of Apportionment", *SIAM Journal on Applied Mathematics*, 33, pp. 607-618.

[7] Balinski, M. L. and Young, H. P. 1979, "Quotatone Apportionment Methods", *Mathematics of Operations Research*, 4, pp. 31-38.

[8] Balinski, M. L. and Young, H. P. 1978, "Stability, Coalitions, and Schisms in Proportional Representation System", *American Political Science Review*, 72, pp. 848-858.

[9] Saari, D.G. 1978, "Apportionment Methods and the House of Representatives", *American Mathematical Monthly*, 85, pp. 792-802.

[10] Still, J. W. 1979, "A Class of New Methods for Congressional Apportionment", *SIAM Journal on Applied Mathematics*, 37, pp. 401-418.

[11] Lucas, W. F. 1983, "Measuring Power in Weighted Voting Systems", *Modules in Applied Mathematics*, Chap. 9, Lucas, W. F. (ed.), Vol. 2, Springer-Verlag.

[12] Shapley, L. S. and Shubik, M. 1954, "A Method for Evaluating the Distribution of Power in a Committee System", *American Political Science Review*, 48, pp. 787-792.

●ミニミニ●　　●OR●

トラブル・シューティング型の問題解決（II）

そこで，再び紙の販売元のC社に連絡した．（実際，筆者は紙に原因があるものとばかり思い込んでいたのである．）C社からは，そのようなトラブルが実際に起こるところを見せてほしいといって筆者のところにこられた．C社の方の目のまえで，実際にやってみると，はたして10枚に1枚ぐらいの割合でトラブルがおこる．C社の方々もトラブルの発生は確認されたものの，すぐには原因に思い当らない．

しばらく考えたのち，「もし，裁断の工程に原因があるのならば，裁断の手順は決まっているのだから，トラブル発生には周期性があるはずだ．それを調べてみたい」といわれ，用紙ひと袋を用意，紙に通し番号を打ち，順に「印刷」を実行してみた．結果は否定的で，周期性は見られなかった．仮説は棄却されたわけである．

こうなると，販売元のC社ではどうにもならない．資料を製紙会社のB社の技術部に持ち込んで調べて貰うことになった．B社は調査を約束，それと同時に印字に使ったリボンのカートリッヂが欲しいといってこられた．幸い手許に残っていたので，さっそくお送りした．カートリッヂはA社製のものであった．

しばらくたって製紙会社から技術部の方が説明にこられた．「原因は，やはり紙ではない」とのことで，トラブルが発生した印字個所とリボンを1対1対応させてみると，トラブルの個所ではリボンがくしゃくしゃになっているというのである．実際にリボンをひっぱり出して突き合わせて見るとその通り．サンプルに使った筆者の文書には数式がまざっていたので，つき合わせはきわめて容易であった．

こうして，少なくとも紙の表面に原因があるのではないことが明らかになった．紙が原因とばかり考えていた筆者は恥じ入る他はない．リボンと印字を1対1対応させることなら，筆者自身でもやってできないことではなかった．思い込みが先に立って基本を忘れていたのである．

「A4版の紙の場合，トラブルがタテ方向に続いていればミルとの角度からして，ウチの原因とも考えられるのですが，この場合ヨコ方向ですからねェー」とB製紙会社の方は笑っておられたが，いずれにせよB社＝王子製紙およびC社＝アピカの方々のエンジニア魂による原因追及と納得のゆく説明には脱帽の他はなかった．

さて，それでは真の原因はどこにあるのだろうか？ 製紙会社の技術の方ともども推察したところは次のようなものであった．「リボンは連続作動中巻き上げられ続けているから，張力がかかっているが，しばらく停止していると塑性変形をおこしてタルみ，U字型になってしまう．これが静電気の作用でくっついて畳まれたようになってしまう結果，その上から熱を加えても熱転写されない」（p.286へ）