シミュレーションで何がわかるのか

逆瀬川 浩孝

1. はじめに

ランダムな要因を含むシステムの解析において統計的シミュレーションはますます欠かせないものになってきている．ランダムさの規則がわかれば乱数を使ってランダム現象の起きる様子を再現することができ，現実のシステムをいじることなしにいろいろな実験が可能になるからである．実験は計算機を使って行なわれ，その計算結果は小数点以下何桁もつづく数字をともなって整然と出力されることもあって，シミュレーションを実行すればはっきりした答えがわかると思っている人も多い．しかし，別の乱数を使って計算するとまた別の結果が得られるから，シミュレーションとは，化学反応実験のような実験とも，方程式を解くような計算とも違う性質をもっているということがわかる．このように不確実な計算実験の結果によって何がわかるのか，というのがこの小論のテーマである．

2. シミュレーションの推定の基礎

例を挙げよう．**図1**は，窓口1つのシステムに客がポアソン過程にしたがって到着し，指数分布にしたがうサービスを受けて退去する，いわゆるM／M／1モデルの待ち時間のシミュレーション結果で，客が1人もいない開店時から始めてn人目までの客の平均待ち時間を計算したものである．$n=100$までの計算を乱数を換えて5回くりかえしたら，図のように5回ともそれぞれ大きく食い違う結果が得られた．さて，100人の客の平均待ち時間はどれぐらいと言えばよいのか．**図2**はサービス時間を一定にして(M／D／1モデル)，図1と同じように計算した結果である．傾向として図2の方が図1より小さい値になっているようだが，M／D／1の待ち時間はM／M／1の待ち時間より短いといえるだろうか．

このように乱数を使って何かを求めたい，何かと何かとを比較したいという問題は，ちょうど，今日モンテカルロの賭博場に行ったらいくら儲かるのかとか，一発勝負で賭けるのと，ちまちま賭けるのとではどっちが得かということを考えるのと同じである．その類推から，乱数を使ってランダム要因をシミュレーションする方法をモンテカルロ法と呼んでいることはよく知られている．

シミュレーションというのは，今日のルーレットの回り方はこうなるかもしれない（そうなってもおかしくない）という架空の結果を積み上げて結論を導くもので，実際にルーレットが回って得られる結果とはほぼ確実に一致しない．だから，シミュレーションをやっても今日いくら儲かるかは「わからない」と書くと，そんなことはアタリマエ，という声が聞こえてきそうだが，もっともっと設定を複雑にしていくと，同じタイプの問題

さかせがわ ひろよし 筑波大学 社会工学系
〒305 茨城県新治郡桜村天王台1—1—1

が「わかる」と言ってしまう人は多い．では，シミュレーションでは何がわかるのか．ある賭け方を決めてシミュレーションをやってみたら，1日目は1万円儲かった，2日目は10万円損した，という結果が得られたとすると，シミュレーション結果として意味がある（「わかる」）のは，1万円，－10万円という個々の数字なのではなくて，平均的にどれぐらい損するものなのか，10万円以上儲かるチャンスはどれぐらいあるのかといったような，それら全体の数字の(確率的な)規則性なのである．これはまた，アンケート調査で意味があるのは，調査表個々のデータではなく，その集計結果であるということと同じである．このことから，シミュレーションのことをサンプリング実験と言ったりもする．したがって，シミュレーションの計算結果の解析には標本調査データの統計解析手法がそのまま適用できる．

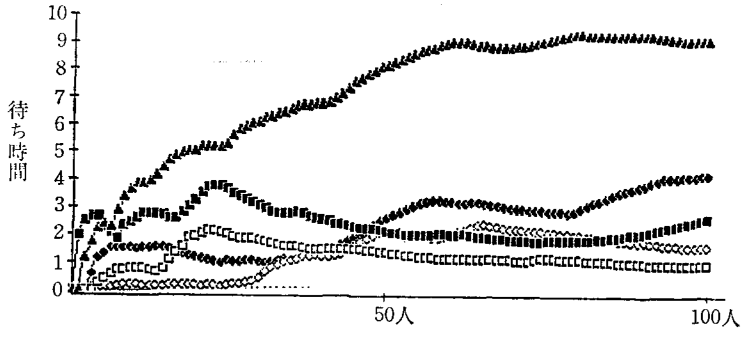


図 1 M／M／1の平均待ち時間

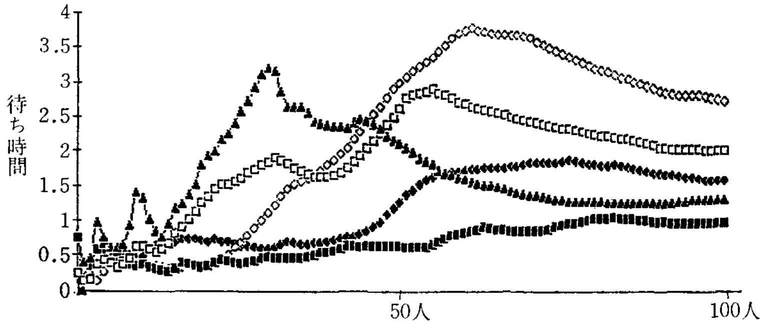


図 2 M／D／1の平均待ち時間

図1の問題にもどろう．100人の平均待ち時間がどれくらいになるかを調べるために乱数を換えて100回計算したら，その平均は4.5になった．この平均値は最初の100人の平均待ち時間であると言ってよいかということが次の問題である．注意深い読者ならば，これも前の問題と同じだということに気がつかれるであろう．状況は複雑になったものの，先の1万円儲けた，10万円損したという数字と同じで，100回のくりかえしを1回のシミュレーションと思えば，この4.5という数字はそうなってもおかしくない，という意味しかなく，別のシミュレーションをくりかえせばほぼ確実に4.5とは違った結果が得られるはずである．

しかし，前と違う点は，4.5という数字が100個の数値の平均だということで，これは可能なバラツキの範囲が大体検討がついているということである．これらの数値を使えば，4.5という数字がどれぐらいもっともらしいかを，標本調査（統計）の理論を使って推論することができる．

実際，シミュレーションのくりかえし回数をn，1回1回の平均待ち時間を$x_1, x_2\cdots$とし，その平均を$\bar{X}$，(不偏)分散を$s^2=\sum(X_j-\bar{X})^2/(n-1)$とすると，真の平均は$\bar{X}\pm 2s/\sqrt{n}$の間にあるといってもそうはずれることはないということが言える．(係数の2はt－分布のパーセント点と言い，推論のはずれる度合いを表わす．詳しくはt－分布表にある.) このことは逆に言うと，そうやって幅をもたせてもはずれることもあるということである．はずれる可能性は，幅を小さくすれば大きくなり，幅を大きくすれば小さくなるが，なか

なか0にはならない．100％正しい推論は，真の値はある正の数であるというもので，これは無意味であるから，何か意味のある推論をしようとすれば，必ずはずれる可能性を覚悟しなければならない，というのがシミュレーションを使った解析法の限界である．すなわち，シミュレーションを使っても「はっきりした」結果はわからない．

上の計算例で$s=2.5$であったとすると，平均は4.5であるという推論の仕方を点推定，平均は4と5の間にあるという推論の仕方を区間推定，〔4，5〕を95％信頼区間という．平均は4と5の間にあるというより，平均は4.3と4.7の間にあると言った方が見掛け上精度がよくなり，真の値に近づいたような気がするが，もしsとnを変えずにこのような区間推定をしようとすれば，パーセント点の2を小さくしなければならない．上の例でいえば2の代わりに0.8としているから，このときはt一分布表から，5回のうち2回ははずれるかもしれないことになり（60％信頼区間）見掛け上の精度のよさは信頼性を犠牲にして得られているということがわかる．信頼性を損なわずに精度をよくするためには，sを小さくするかnを大きくするかのいずれかである．今の場合はsはシステムに固有のものでそう大きくは変えられないからnを大きくするしかない．注目すべきことは信頼区間の幅を半分にしたい場合，シミュレーションの回数は4倍にしなければならないということである．これがシミュレーション実験の効率を悪いものにしている原因である．そこでシミュレーションのやりかたをかえて，sを小さくすることによって精度をよくすることを考えるのが分散減少法である．

信頼区間による区間推定の考え方は有用なものであるが，きちんと使おうとすると結構わずらわしいものだから，結局平均値だけで考えるということが多い．求めたいものが1つだけの場合で信頼区間が許容誤差の範囲に納まっているならば，真の平均は$\bar{X}$であるという点推定をしても間違いではない（もちろんこの場合も5％程度の間違う可能性を含んでいるが）．誤差の限界εが与えられたときに対して点推定が許されるためには少なくとも$4s^2/\varepsilon^2$回のくりかえし計算が必要であるということが先の式から言える．

以上の話はすべてランダムサンプリングを仮定し独立標本が得られる場合の推定の方法であるから，1回1回のシミュレーションは「独立」になるようにしなければならない．上の例では乱数を換えることで独立なサンプリングができるとしている．専用のシミュレーション用プログラム言語も含めて，多くのシミュレーションで用いられる乱数は乗算合同法によるもので，これはよく知られているように，2つの定数λとMをあらかじめ決めておいて，ある数x_0にλをかけたものをMで割った余りをx_1とし，x_1にλをかけたものをMで割った余りをx_2とするというように計算していったとき，$\frac{x_0}{M}$，$\frac{x_1}{M}$，$\frac{x_2}{M}$，…を乱数とみなすというものである．このときx_0を乱数のタネと言い，乱数のタネを換えることによって違った乱数が生成でき，それらは独立になるといわれている．しかし必ずしもそうはならないという例をあげる．

$M=2^{32}$，$\lambda=31415925$とし，タネとして812991763，1886733567，1081427219とした場合で最初の100個の乱数の平均とそれらの間の相関係数を計算すると**表1**のようになり一見独立のように見える．しかし，1番目と2番目，1番目と3番目の数列の散布図をかいてみると**図3**のようになり，これらはとても独立とはいえない．乗算合同法による乱数発生法は非常に巧妙な方法であるには違いないが，このような規則性が表にでてくる危険性があり，使用にさいして注意が必要である．筆者の勧める方法はλを時々換えるというものである．λは特別の数である必要はなく，適当に大きな数で8の倍数＋5になっていれば何でもよい．

3. 定常状態のシミュレーション

次に，24時間操業のラインの不良品発生率を調

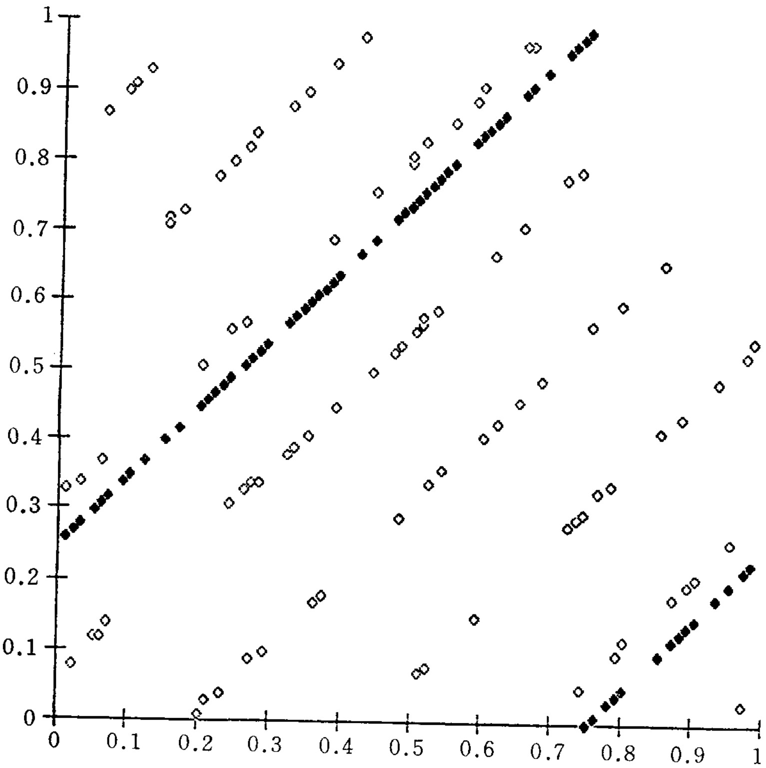
べたいとか，ピーク時の混雑がずっとつづくとしたら待ち時間はどうなるかというように，システムが安定した状態にある時のシステム特性をシミュレーションで計算するにはどうしたらよいかということを考える．安定した状態というのは変動の仕方が時間的に一定しているということで，これは普通定常状態と呼ばれる．現実のシステムが定常状態に達するまでにある程度の「ならし運転」の時間が必要なように，定常状態のシミュレーションでも計算をはじめてからしばらくはシステムを動かして様子を見ることが必要である（システムのウォームアップという）．定常状態のシミュレーションでの問題は，どうしたら定常状態になったと判断できるのかということと，定常状態のデータが取り出せたとして，シミュレーションの結果の精度をどう評価すればよいのかということである．

表 1 乱数列の平均と相関係数（100個）

	乱数のタネ	平均値	相関行列		
系列 1	812991763	0.48	1	0.004	0.010
系列 2	1886733567	0.53	0.004	1	0.015
系列 3	1081427219	0.49	0.010	0.015	1

最初の問題では，実際によく使われている解決法の 1 つは，とにかく最初の 100なり 1000なりのデータを捨てなさいというものである．たとえば M/M/1 モデルの定常状態での平均待ち時間が知りたいとき，システムが空の状態から計算を開始して 1001人目から 1 万人の客の待ち時間を平均するというやり方である．ところで，もし，1001人目の客の到着時に待ち客が 1 人もいなかったら（こういう可能性は大いにありうる），1001人目の到着時点と最初の客の到着時点とで，システムはまったく同じ状態にあるから，1 人目，2 人目，…の待ち時間と1001人目，1002人目…の待ち時間を入れ替えてもだれも気がつかない．したがって最初から定常状態にあると考えてもよいのではないか．そうだとすればウォームアップと称して1000人分のデータを捨てる意味はないことになる．これは空の状態から出発しなくても同じことで，初期状態として，定常状態で取り得る状態の 1 つをとってやると，ウォームアップすることなく最初から定常状態のデータが取れるということである．

それではウォームアップしてからデータを取りなさいというのはどういう意味があるのか．それは第 2 の問題すなわち，計算の精度をどう評価するかという問題にかかわってくる．定常



■ 系列 1 と系列 2
□ 系列 1 と系列 3

図 3 乗算合同法数列の散布図

状態での平均待ち時間をシミュレーションで求める場合は，前節の推定と同じように，定常状態でのシミュレーションをくりかえして独立な平均値を求めてから区間推定をしなければならない．このとき，1回1回のくりかえし計算で使う待ち時間のデータは，定常状態にあるシステムをランダムな時点から観察して得られるようなものでなければならない．もしウォームアップなしにやろうとするとシミュレーションの初期状態として，そのような状態をいきなり作り出さなければならないが，そんなことは不可能である．なぜならそういう状態は定常分布からランダムに選ばれたものでなければならず，それを実際に作り出すためには，（これからシミュレーションによって求めようとしている）定常状態がどういうものかをあらかじめ知っていなければならないからである．そこでそのランダムな定常状態を作り出すためにウォームアップが必要ということになる．上の考察は逆にウォームアップを必要としないシミュレーションの可能性を示唆している．もし，目的のシステムと似たような定常分布をもつシステムで，その定常分布から1つの状態をランダムに選ぶことができるようなものがあれば，そういう状態からシミュレーションを開始することによって近似的に定常状態でのシミュレーションとみなすことができる．しかし，一般的にはそのような近似システムを見いだすことはむずかしいから，多くの場合ウォームアップは必要である．ウォームアップの長さはどのくらいがよいのかというのが次の問題であるが，残念ながらこの問題に対して的確な答えはない．一般論として，システムの構造が複雑なものは長く単純なものは短くてよいといえる程度である．よく行なわれている方法は，ある特性量を計算してグラフ化し，その動きが安定してきたら定常状態に達したとみなしてよいというものであるが，関数の収束の計算と違って，図1のように変動の大きい場合には安定してきたかどうかを見きわめることがむずかしく，必ずしもこの方法が有効ということもいえない．

定常状態をどうやって見いだすかという問題に対するもう1つの答えは乱暴なようであるが，最初から定常状態と考えようというものである．ウォームアップすると最初のいくつかのデータを捨てることになるから，しない場合に比べると推定に使うデータ数が少なくなり，バラツキが大きくなる．一方，ウォームアップしないと定常状態とは異なる初期状態の影響を受けたデータも使って推定するために偏りをもつことになる．どちらの推定がよいかを判定するためにはバラツキと偏りをあわせて総合評価する（平均自乗誤差という）が，ウォームアップをしないほうが平均自乗誤差の意味でよい結果をもたらす場合がある．もちろんこの場合，定常状態でのデータが十分になければ意味がないことはいうまでもない．

次の問題は定常状態の特性量をどのように推定するか，精度をどう評価するかということである．定常状態のシミュレーションでも前節の場合と同様，区間推定するためには複数の独立標本が必要である．そのための1つの方法は乱数列だけを取り換えて独立なシミュレーションをくりかえし，各回ごとにウォームアップ後の，あるいはすべてのデータを使って1つの標本値を計算するというものである(独立標本法)．ウォームアップ中のデータを使うにせよ捨てるにせよ，毎回定常状態になるまでの計算をやりなおさなければならない．また，1回のシミュレーションで定常状態のデータが少ないと推定した区間がずれていたり狭くなっていたりして，信頼係数どおりの信頼区間が得られないおそれがある．したがって，定常状態への近づき方が遅いシステムに対しては，この方法は非常に効率が悪く信頼性に問題があるといえる．そこで第2の方法として，毎回初期状態を新たに取り直さないで，前回のシミュレーションの最終状態を次回のシミュレーションの状態として計算をつづけるというやり方が考えられる．いいかえれば十分に長いシミュレーションの結果を

適当に分割して，複数の定常状態の結果を計算しようというものである(バッチ平均法)．このやり方ならばウォームアップは1回だけでよいから初期状態の影響をほとんど気にしなくてもよく，またデータを捨てるにしても最初の1回分だけですむ．なぜなら，1回目が定常状態で終わっているとすれば2回目以降は定常状態から出発できるからである．この方法の欠点は各回の計算値が独立とはいえないから，厳密には独立標本にもとづく区間推定が正しくないということである．たとえば，M/M/1の待ち時間を推定する問題でいえば，長い1回のシミュレーションを1万人ずつに区切って（それぞれをバッチという）各バッチの平均値を求めるのであるが，もし1万人目の客の待ち時間が長ければ，1万1番目の客の待ち時間も長い可能性が大きく，最初のバッチの平均値と2番目のそれとは独立にはならない．しかし1万人目の客の影響は，その客の含まれる稼働期間に限られ，それはせいぜい1000人ぐらいで終わるから，1万人の大部分は前の1万人とは独立とみなせるというのがこの方法の根拠である．この方法が有効であるためには，各バッチが独立とみなせるものでなくてはならないから，その検定が必要である．検定が不十分でひとつのバッチが小さく相関（正の場合が多い）が残っているときはバラツキを過小評価する恐れがある．逆にバッチが不必要に大きい場合は，独立標本の数が少なくなるので信頼区間の幅が広がる．

ウォームアップの時間であるとか，独立とみなせるバッチの大きさなどを決めるのは理論的にはっきりしたものがあるわけでなく，経験的な知識に頼る部分が大きい．この曖昧さを避けることができるものとして第3の方法は，再生的過程を利用した方法である．G/G/s 待ち行列モデルでいえば，システムが空の状態に客が到着した時点はそれまでのシステムの変化がそれから後のシステムの変化に影響を与えないという性質をもつ（そのような時点を再生点という）．すなわち，各稼働周期でシステムの動きは独立になるので，その周期ごとに計算される量（たとえば，その周期中の客の待ち時間の合計）は独立標本と考えることができる．したがってウォームアップを考えることなくすべてのデータを使い正確に独立標本が得られる．この方法の問題点は，平均値を推定しようとすると，独立標本の比の形になって推定に偏りが生ずることと，システムが複雑になると再生点を見いだすのがむずかしくなることである．

4. おわりに

ここでは紹介しなかったが，シミュレーション結果の解析をめぐって，理論的に面白く発展性のありそうな手法がいろいろと提案され試されている．しかし残念ながら，これらは今のところデリケートな部分が多く，複雑なシステムのシミュレーション解析に使えるまでにはいたっていない．これからもまだしばらくは，「シミュレーションは一応の目安」というところから脱皮できないのではないだろうか．

〈学会ニュース〉

朴在夏博士来日

韓国ＡＰＯＲＳ代表朴在夏博士が４月４日来日された．訪米途上の短かい滞在であったが，国際委員会の伏見委員長，若山委員（ＡＰＯＲＳ事務局長）柳井委員らと会食．筑波におけるＡＰＯＲＳ発足の会議以来の旧知の間柄ゆえ，旧交をあたためるとともに，来たる1988年ソウル市で開催されるＡＰＯＲＳ大会に関する積極的な意見の交換がなされた．韓国側の準備は羅会長のもと着々と進められている由．問題は，よい研究発表が数多く行なわれることであり，朴博士は日本ＯＲ学会に対しこの点の協力を強く求められた．（柳井）