線形計画問題に対する乗法的罰金関数法について

今井　浩

1. はじめに

本稿では，伊理，今井[4]により導入された乗法的罰金関数法 (multiplicative penalty function method) について，その後の精緻化，拡張された結果[2,5,6]やその他の方法との関係も含めて述べる．

この方法は，Karmarkar 法[7]と同様に内点法系統の反復解法であるが，線形目的関数の最適値が既知である場合超1次収束すること，射影変換を用いないことなどが大いに異なる．また，乗法的罰金関数に関する議論は，最適目的関数値が未知の場合の議論も含め，線形計画問題に関する他の罰金関数法に広く通じる所があり，その意味からも重要である．

2. 乗法的罰金関数法

次の型の線形計画問題(P)を考える．

$$\begin{aligned} \min \quad & c(x)\equiv\sum_{\kappa=1}^{n} c_\kappa x^\kappa-c_0 \\ \text{s.t.} \quad & a^i(x)\equiv\sum_{\kappa=1}^{n} a_\kappa{}^i x^\kappa-a_0{}^i\geq 0 \qquad \text{(P)} \\ & (i=1,\cdots,m) \end{aligned}$$

ここで，$c_\kappa, a_0{}^i, a_\kappa{}^i$ $(\kappa=1,\cdots,n;i=1,\cdots,m)$ は所与の定数である．線形計画問題(P)の実行可能領域X，すなわち

$$X=\{\boldsymbol{x}\in \boldsymbol{R}^n\,|\,a^i(\boldsymbol{x})\geq 0(i=1,\cdots,m)\}$$

に関して，Xは非空であり，

$$a^i(\boldsymbol{x}^{(0)})>0 \quad (i=1,\cdots,m)$$

なる真の内点$\boldsymbol{x}^{(0)}\in \mathrm{Int}\ X$が存在するものとする．また，簡単のため次の(i)～(iii)を仮定する（ここで(P)の最適解の集合を$\hat{X}$で表わす)．

(i)　$\hat{X}\neq X$

(ii)　$\hat{X}$は有界である，

(iii)　最適基底解$\hat{\boldsymbol{x}}$において，$a^i(\hat{\boldsymbol{x}})$ $(i=1,\cdots,m)$のうち少なくとも1つは0でない．

さらに，2，3節では

$$\min\{c(\boldsymbol{x})\,|\,\boldsymbol{x}\in X\}=0$$

と仮定する．この仮定は，たとえば与えられた主問題をその双対問題と組み合せた問題を考えると満たされる．この仮定が成り立たない問題をそのまま扱うことについては，4節で述べる．

線形計画問題(P)に対する乗法的罰金関数$F(\boldsymbol{x})$は

$$F(\boldsymbol{x})=c(\boldsymbol{x})^{m+1}/\prod_{i=1}^{m} a^i(\boldsymbol{x}) \quad (\boldsymbol{x}\in \mathrm{Int}\ X)$$

で定められる（伊理，今井[4,5,6]）．**図1**に簡単な例を示す．この関数はKarmarkar [7]のポテンシャル関数（の乗法版）のアフィン版とみなせ，また図1の例からも類推されるように，多くの良い性質（特にその凸性）を有する．

Prop. 2.1　Int Xの点$\boldsymbol{x}^{(\nu)}$ $(\nu=0,1,2,\cdots)$に対して$F(\boldsymbol{x}^{(\nu)})\to 0$ならば，$\boldsymbol{x}^{(\nu)}$と$\hat{X}$の距離は0に収束する（したがって，最適解が$\hat{\boldsymbol{x}}$唯一つの場合，$\hat{\boldsymbol{x}}$に収束する)．

このProp. 2.1の逆は必ずしも成り立たないが，

いまい　ひろし　九州大学　工学部　情報工学科
〒812 福岡市東区箱崎6－10－1

© 日本オペレーションズ・リサーチ学会．無断複写・複製・転載を禁ず．

次のように少し制限を加えると成立する．

Prop. 2.2 $\hat{X} \subset P \subset \hat{X} \cup \mathrm{Int}\ X$ なる閉多面体 P 内の点列 $\{\boldsymbol{x}^{(\nu)}\}$ が最適解に収束する場合（たとえば直線に沿って収束する場合），$F(\boldsymbol{x}^{(\nu)})$ は 0 に収束する．▮

これより，線形計画問題(P)を解くには，$F(\boldsymbol{x}^{(\nu)})$ を Int X で最小化すればよいことがわかる．

$F(\boldsymbol{x})$ の勾配，ヘシアンを $F(\boldsymbol{x})$ で割ったものを $\boldsymbol{\eta}(\boldsymbol{x}), H(\boldsymbol{x})$ とすると

$$\eta_\kappa(\boldsymbol{x}) \equiv \frac{1}{F} \frac{\partial F}{\partial x^\kappa}$$

$$= (m+1)\frac{c_\kappa}{c(\boldsymbol{x})} - \sum_{i=1}^{m} \frac{a_\kappa{}^i}{a^i(\boldsymbol{x})}$$

$$H_{\lambda\kappa}(\boldsymbol{x}) \equiv \frac{1}{F} \frac{\partial^2 F}{\partial x^\lambda \partial x^\kappa}$$

$$= \frac{-(m+1)c_\lambda c_\kappa}{c(\boldsymbol{x})^2} + \sum_{i=1}^{m} \frac{a_\lambda{}^i a_\kappa{}^i}{a^i(\boldsymbol{x})^2} + \eta_\lambda \eta_\kappa$$

$$= \left[\frac{mc_\lambda}{c(\boldsymbol{x})} - \sum_{i=1}^{m} \frac{a_\lambda{}^i}{a^i(\boldsymbol{x})}\right] \left[\frac{mc_\kappa}{c(\boldsymbol{x})} - \sum_{i=1}^{m} \frac{a_\kappa{}^i}{a^i(\boldsymbol{x})}\right]$$

$$+ \sum_{i=1}^{m} \left[\frac{c_\lambda}{c(\boldsymbol{x})} - \frac{a_\lambda{}^i}{a^i(\boldsymbol{x})}\right] \left[\frac{c_\kappa}{c(\boldsymbol{x})} - \frac{a_\kappa{}^i}{a^i(\boldsymbol{x})}\right]$$

と表わせ，これより $H(\boldsymbol{x})$ が非負定値であることがわかる．さらに，仮定(iii)の下では次のことが成り立つ（伊理，今井 [4]）．

Prop. 2.3 $H(\boldsymbol{x})$ は正定値であり，したがって $F(\boldsymbol{x})$ は Int X で狭義の凸関数である．▮

Prop. 2.4 線形方程式

$$H(\boldsymbol{x})\ \boldsymbol{\xi} = -\boldsymbol{\eta}(\boldsymbol{x})$$

の解答は，$\boldsymbol{x} \in \mathrm{Int}\ X$ における $F(\boldsymbol{x})$ の減少方向になっている．

仮定(iii)が成り立たない場合には，$F(\boldsymbol{x})$ は次に述べられるような単純な構造をしている．

Prop. 2.5 仮定(iii)が成り立たないなら，$F(\boldsymbol{x})$ は唯一の最適解 $\hat{\boldsymbol{x}}$ からでる半直線上で線形である．▮

3. Newton 法による最小化

乗法的罰金関数 $F(\boldsymbol{x})$ は前節で述べたような良い性質を有する．そこで，$F(\boldsymbol{x})$ を Newton 法を用いて最小化する次のような算法が考えられる．

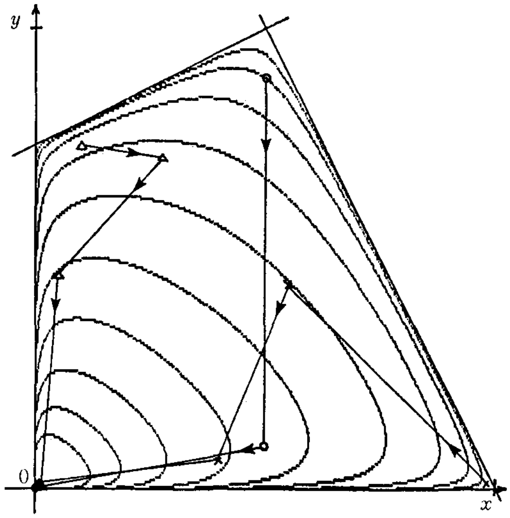

図 1 乗法的罰金関数の例：$n=2$, $m=4$, $\boldsymbol{x}=(x, y)$, $c=x+y$, $a^1=x$, $a^2=y$, $a^3=2-2x-y$, $a^4=3+2x-4y$ の場合の乗法的罰金関数 F の $F=4^k$ ($k=-4, \cdots, 4, 5$) の等高線図と Newton 法により生成される 3 つの点列（[5,6] より）

1° 実行可能領域 X の真の内点 $\boldsymbol{x}^{(0)}$ から始める；
$\nu=0$；

2° 以下のことを適当な停止条件が満たされるまで繰り返す；

$\boldsymbol{x}^{(\nu)}$ での勾配 $\boldsymbol{\eta}(\boldsymbol{x}^{(\nu)})$，ヘシアン $H(\boldsymbol{x}^{(\nu)})$ を求める；

線形方程式 $H(\boldsymbol{x}^{(\nu)})\ \boldsymbol{\xi}^{(\nu)} = -\boldsymbol{\eta}(\boldsymbol{x}^{(\nu)})$ を解き，探索方向 $\boldsymbol{\xi}^{(\nu)}$ を求める；

$\boldsymbol{x} = \boldsymbol{x}^{(\nu)} + t\xi^{(\nu)}\ (t \geq 0)$ 上で $F(\boldsymbol{x})$ を最小にするような t^* を求める；

$\boldsymbol{x}^{(\nu+1)} := \boldsymbol{x}^{(\nu)} + t^*\xi^{(\nu)}$； $\nu := \nu+1$；

図 1 では，この算法により生成される点列を 3 系列示している．この算法の直線探索は，F が凸であることより，たとえば 2 分法と Newton 法を組み合せた方法により高速に行なうことができる．

この算法の収束の速さに関しては，以下のことが示されている [4,5,6]．

Prop. 3.1 主，双対問題がともに退化していない場合，すなわち最適基底が唯一つの場合，この算法は最終段階で最適解に 2 次収束する．

© 日本オペレーションズ・リサーチ学会．無断複写・複製・転載を禁ず．

退化していない場合，最終段階でのNewton法のステップ幅t^*は，1ではなく$m-n$に近づく．退化している場合は超1次収束となる．また，$F(\boldsymbol{x})$がそのテイラー展開の2次の項まででよく近似できるときには，算法の大域的1次収束性が保証されることも示されている．

4. 目的関数の最小値が未知の場合

2，3節での$\min\{c(\boldsymbol{x})|\boldsymbol{x}\in X\}=0$という仮定は

$$\hat{c}_0=\min\{\sum_{\kappa=1}^{n}c_\kappa x^\kappa|\boldsymbol{x}\in X\}$$

なる$\hat{c}_0$が既知であるという仮定に等価である．本節では$\hat{c}_0$は未知であり，$c_0<\hat{c}_0$なる最適目的関数値の下界c_0が与えられている場合に，所与の線形計画問題をその双対問題と組合せて最適目的関数値既知の型の問題に変換することなく，与えられた型のままで効率よく解くことを考え，そのための乗法的罰金関数の理論をImai [2] にしたがい述べる．

本節ではc_0を次第に大きくして$\hat{c}_0$に収束させたりするので，$c(\boldsymbol{x})$, $F(\boldsymbol{x})$などでのc_0の依存性を陽に表わし，$c(\hat{\boldsymbol{x}},c_0)$, $F(\boldsymbol{x},c_0)$などと表わす．$c_0<\hat{c}_0$に対して，Int Xで$F(\boldsymbol{x},c_0)$を最小にすることを考えると，Fの狭義の凸性および2節の仮定(ii)などより次が成り立つ．

Prop. 4.1 $c_0<\hat{c}_0$に対して，Int Xで$F(\boldsymbol{x},c_0)$を最小にする点が唯一つ存在し（その点を$\boldsymbol{x}(c_0)$で表わす），$\boldsymbol{\eta}(\boldsymbol{x}(c_0),c_0)=\boldsymbol{0}$である．∎

$\boldsymbol{\eta}(\boldsymbol{x}(c_0),c_0)=0$に着目して，$\boldsymbol{x}(c_0)$から

$$y_i(c_0)=\frac{1}{m+1}\frac{c(\boldsymbol{x}(c_0),c_0)}{a^i(\boldsymbol{x}(c_0))}(i=1,\cdots,m)$$

により$\boldsymbol{y}(c_0)$を定義すると，次が成り立つ．

Prop. 4.2 $\boldsymbol{y}(c_0)$は線形計画問題（P）の双対問題（D）：

$$\begin{aligned}&\max\ \sum_{i=1}^{m}a_0{}^iy_i\\&\text{s.t.}\ \sum_{i=1}^{m}a_\kappa{}^iy_i=c_\kappa\ (\kappa=1,\cdots,n)\\&\qquad y_i\geq 0(i=1,\cdots,m)\end{aligned}\tag{D}$$

の実行可能解である．その目的関数値に関して

$$c_0<\sum_{i=1}^{m}a_0{}^iy_i=c_0+\frac{c(\boldsymbol{x}(c_0),(c_0)}{m+1}<\hat{c}_0$$

が成り立ち，c_0より良い$\hat{c}_0$の下界が得られる．∎

c_0を$\hat{c}_0$に近づけていくとき，$\boldsymbol{x}(c_0)$, $\boldsymbol{y}(c_0)$はたいへん良い挙動を示す．

Prop. 4.3 $c_0\uparrow\hat{c}_0$のとき，$\boldsymbol{x}(c_0)$は主問題（P）の最適解に，$\boldsymbol{y}(c_0)$は双対問題（D）の最適解に収束する．そのとき，両方の目的関数値

$$\sum_{\kappa=1}^{n}c_\kappa x^\kappa(c_0),\quad \sum_{i=1}^{m}a_0{}^iy_i(c_0)$$

はそれぞれ真に単調減少，単調増加する．∎

さらに，主問題の乗法的罰金関数の最小解である$\boldsymbol{x}(c_0)$からこのようにして構成した$\boldsymbol{y}(c_0)$は，実は双対問題に対する乗法的罰金関数の最小解であるという関係がある．

Prop. 4.4 問題（P）がいわゆる正準形で，$a_\kappa{}^i=\delta_\kappa{}^i$, $a_0{}^i=0$ $(i=1,\cdots,n)$であるとする（$\delta_\kappa{}^i=1$ $(i=\kappa)$, $\delta_\kappa{}^i=0(i\neq\kappa)$）．このとき，（P）の双対問題は次の(D′)のようにも書ける（ここで，$b^j=a_0{}^j$ $(j=n+1,\cdots,m)$）：

$$\begin{aligned}&\min\quad b(\boldsymbol{x})\equiv b^0-\sum_{j=n+1}^{m}b^jz_j\\&\text{s.t.}\quad a_\kappa(\boldsymbol{z})\equiv c_\kappa-\sum_{j=n+1}^{m}a_\kappa{}^jz_j\geq 0\\&\qquad\qquad(\kappa=1,\cdots,n)\\&\qquad z_j\geq 0\quad(i=n+1,\cdots,m)\end{aligned}\tag{D′}$$

問題(D′)に対して，$b^0>\hat{c}_0$とし，その乗法的罰金関数$G(\boldsymbol{z})$：

$$G(\boldsymbol{z})=b(\boldsymbol{z})^{m+1}/(\prod_{\kappa=1}^{m}a_\kappa(\boldsymbol{z})\cdot\prod_{j=n+1}^{m}z_j)$$

を実行可能領域の内部で最小化すると，最適解が唯一つ定まる（$\boldsymbol{z}(b^0)$で表わす）．すると，主問題（P）での$\boldsymbol{x}(c_0)$から構成された$\boldsymbol{y}(c_0)$と$\boldsymbol{z}(b^0)$との間には

$$\boldsymbol{z}(c_0+\frac{m+2}{m+1}c(\boldsymbol{x}(c_0),c_0))=\boldsymbol{y}(c_0)$$

という関係が成り立つ．∎

Imai [2] では，以上の性質を利用して，$\hat{c}_0$のある下界c_0から始め，c_0に関する乗法的罰金関数をNewton法で最小化し，その過程でより良い下界を与える双対変数を構成し，それにより下界

© 日本オペレーションズ・リサーチ学会．無断複写・複製・転載を禁ず．

を$\hat{c}_0$に素早く近づけながら，(P)の最適解を求めるという算法を与えている．

また，$\boldsymbol{x}(c_0)$を中心とし，ヘシアン$H(\boldsymbol{x}(c_0),c_0)$により構成される楕円を考えることにより，すべての最適解で有効でない線形制約を求める次のような手法も与えられている．

Prop. 4.5 $\boldsymbol{x}\in\boldsymbol{R}^n, c_0<\hat{c}_0$ に対して

$$h(\boldsymbol{x},c_0)=\sum_{\lambda=1}^{n}\sum_{\kappa=1}^{n}H_{\lambda\kappa}(\boldsymbol{x}(c_0),c_0)(x^\kappa-x^\kappa(c_0))(x^\lambda-x^\lambda(c_0))$$

により $h(\boldsymbol{x},c_0)$を定める．このとき，

$$X\subseteq\{\boldsymbol{x}\ni\boldsymbol{R}^n\,|\,h(\boldsymbol{x},c_0)\leq m(m-1)\}$$

であり，したがって$H_{\lambda\kappa}(\boldsymbol{x}(c_0),c_0)$の逆行列を$G^{\lambda\kappa}$としたとき，もし

$$a^i(\boldsymbol{x}(c))>\sqrt{m(m-1)\sum_{\lambda=1}^{n}\sum_{\kappa=1}^{n}G^{\lambda\kappa}a_\kappa{}^i a_\lambda{}^i}$$

なら，制約 $a^i(\boldsymbol{x})\geq 0$ はすべての最適解において有効でない． ▮

5. その他の方法との関連

5.1 Karmarkar のポテンシャル関数

ここでは，Karmarkar のポテンシャル関数の乗法的なものを考え，乗法的罰金関数と対比させながら，その性質についてまとめる．線形計画問題(P)に対して，関数 $\Phi(\boldsymbol{x})$を

$$\Phi(\boldsymbol{x})=c(\boldsymbol{x})^m/\prod_{i=1}^{m}a^i(\boldsymbol{x})\quad(\boldsymbol{x}\in\mathrm{Int}\ X)$$

により定める．このΦは必ずしも凸でない．たとえば(P)で $m=n+1$, $c_\kappa=1$, $c_0=1$ とし，$a_\kappa{}^i=\delta_\kappa{}^i$, $a_0{}^i=0$ $(i=1,\cdots,n)$, $a_\kappa{}^m=1$, $a_0{}^m=1$ とすると，Φ の $\boldsymbol{e}=(1,1\cdots,1)^T$ でのヘシアンは $\Phi(\boldsymbol{e})\cdot(I-\boldsymbol{ee}^T/(n-1))$ で不定値である（この場合の乗法的罰金関数$F(\boldsymbol{x})$は狭義の凸関数である）．

一方，実行可能領域Xが有界の場合，Φは狭義の凸関数になる (Imai [3])．Karmarkar 法の場合，単体制約があるので，ポテンシャル関数の乗法版は狭義の凸関数である．

5.2 Sonnevend [9], Renegar [8] の算法

まず，有界でかつ真の内点を有するような多面体を定める線形不等式系の“中心”の概念を説明しよう（[9] では“analytical centre”と，[8] では単に“center”と呼ばれている）．

$X=\{\boldsymbol{x}\in\boldsymbol{R}^n\,|\,a^i(\boldsymbol{x})\geq 0(i=1,\cdots,m)\}$ が有界で，真の内点を有するとする．このとき，関数 $\Psi(\boldsymbol{x})$を

$$\Psi(\boldsymbol{x})=1/\prod_{i=1}^{m}a^i(\boldsymbol{x})\quad(\boldsymbol{x}\in\mathrm{Int}\ X)$$

で定めると，$\Psi(\boldsymbol{x})$ は狭義の凸関数であり，X内で $\Psi(\boldsymbol{x})$ を最小にする点が唯一つ定まる．この点を中心という．

Sonnevend [9], Renegar [8] の算法の骨格は，問題(P)を解くのに

$$a^i(\boldsymbol{x})\geq 0\quad(i=1,\cdots,m),\quad \sum_{\kappa=1}^{n}c_\kappa x^\kappa\leq\tilde{c}_0$$

$(\tilde{c}_0>\hat{c}_0)$ で定められる線形不等式系の中心を Newton 法を用いて求めながら，同時に $\tilde{c}_0$ を $\hat{c}_0$ に近づけていくことにより，問題(P)の最適解を求めようというものである．Renegar の場合，c_κ, $\tilde{c}_0$ で定められる制約を何重にも効かせたりし，さらに $\tilde{c}_0$ の $\hat{c}_0$ への近づけ方をうまく決めてやると，全体として多項式オーダの算法が構成できることを示している．

この中心の概念というのは，4節での議論と密接な関係がある．すなわち，Imai [2] に示されているように

Prop. 5.1 問題 (P)に関する $\boldsymbol{x}(c_0)$ は，

$$a^i(\boldsymbol{x})\geq 0\quad(i=1,\cdots,m)$$
$$-\sum_{\kappa=1}^{n}c_\kappa x^\kappa\geq-\sum_{\kappa=1}^{n}c_\kappa x^\kappa(c_0)-c(\boldsymbol{x}(c_0),c_0)/(m+1)$$

の $m+1$ 本の線形不等式系の中心である． ▮

したがって，曲線 $\boldsymbol{x}(c_0)$, $\boldsymbol{y}(c_0)$ $(c_0<\hat{c}_0)$ に関する議論はこの算法にも適用できる．

5.3 de Ghellinck, Vial [1] の算法

この算法も $\Psi(\boldsymbol{x})$のような関数を Newton 法で最小化しているとみなせるステップを含み，計算時間も多項式オーダであるが，乗法的罰金関数に対する Newton 法や，5.2節の算法との関連についてはあまりわかっていない．

6. おわりに

3, 4 節で述べた算法の予備的な計算機実験の結

© 日本オペレーションズ・リサーチ学会．無断複写・複製・転載を禁ず．

果[2,5,6]によると，乗法的罰金関数法は単体法と比べ反復回数の点で優れており，たとえばランダムＬＰという計算機実験でよく用いられる密な問題に関しては，単体法がおおよそ $O(n^{1.5})$ 回のピボットを要するのに対し，乗法的罰金関数法は $O(n^{0.5})$ ぐらいの反復回数しか要さないことが観察されている．したがって，Newton 法で線形方程式を解く部分を高速化できれば，実際の計算時間の点でも単体法より優れることが予想される．Karmarkar 法と比べた場合，乗法的罰金関数法は初期解を変えたときの反復回数の変動の度合いが大きいことがある．

Karmarkar 法以降，線形計画問題を適当な非線形関数を最小化する内点法により解くことが有望視されているわけであるが，当然のことながら導入された非線形要因というのは非常に良い性質（凸性その他）をもっている．本稿では乗法的罰金関数およびそれに関連した非線形関数について特にそのような点を多くまとめており，今後，このような性質の実際線形計画ソフトウエアへの適用が期待される．

参考文献

[1] de Ghellinck, G., and Vial, J.-P.: A Polynomial Newton Method for Linear Progarmming. *OCRE Discussion Paper N°* 8614, Center for Operations Research & Econometrics, Universite Catholique de Louvain, March 1986.

[2] Imai, H.: Extensions of the Multiplicative Penalty Function Method for Linear Programming. *Technical Report CSCE-86—C04*, Department of Computer Science and Communication Engineering, Kyushu University, July 1986, revised.

[3] Imai, H.: The Multiplicative Version of Karmarkar's Potential Function is Strictly Convex when the Corresponding Feasible Region is Bounded. Manuscript, August 1986.

[4] 伊理正夫，今井 浩：ＬＰの一解法—Karmarkar 法，罰金法等とも関連して．日本ＯＲ学会数理計画研究部会資料，1985年２月．

[5] Iri, M., and Imai, H.: A Multiplicative Penalty Function Method for Linear Programming—Another "New and Fast" Algorithm. *Proceedings of the 6th Mathematical Programming Symposium of Japan*, November 1985, pp. 97-120.

[6] Iri, M., and Imai, H.: A Multiplicative Barrier Function Method for Linear Programming. *Algorithmica*, to appear.

[7] Karmarkar, N.: A New Polynomial-Time Algorithm for Linear Programming. *Combinatorica*, Vol. 4 (1984), 373-395.

[8] Renegar, J.: A Polynomial-Time Algorithm, Based on Newton's Method, for Linear Programming. Mathematical Sciences Research Institute, Berkeley, June 1986.

[9] Sonnevend, Gy.: An "Analytical Centre" for Polyhedrons and New Classes of Global Algorithm for Linear (Smooth, Convex) Programming. Presented at *the 12th IFIP Conference on System Modelling and Optimization*, Budapest, 1985.

訂正とお詫び

前号（1986年12月号）727ページ(左欄下から３行）に誤植がありました．訂正してお詫び申し上げます．

誤

講演では，西田俊夫先生（大阪大）が「ＯＲ雑談」，増都大）が「鎖山繁先生（京パッキング問題について」，

正

講演では，西田俊夫先生（大阪大）が「ＯＲ雑談」，増山繁先生（京都大）が「鎖パッキング問題について」，

© 日本オペレーションズ・リサーチ学会．無断複写・複製・転載を禁ず．