対称な双対問題のペア上でのカーマーカー法

小島　政和

1. はじめに

N. Karmarkar［1，2］が線形計画問題（ＬＰ）の新解法（以下，Ｋ法と呼ぶ）を発表して以来，この方法をめぐって非常に多くの研究がなされてきた．論文［1，2］で与えられたＫ法の原型は，特殊な線形計画問題であるＫ法のための基準形ＬＰ

目的：c^Ty→最小化

条件：$Ay=0$　(1)

$y \in S$　(2)

をその対象としている．ただし，

R^n：n 次元ユークリッド空間

（ただし，各点は列ベクトルとする）

$c \in R^n$：定数ベクトル

A：$m \times n$ 行列　定数行列

$S=\{y \in R^n : e^Ty=n,\ y \geqq 0\}$

(n-1 次元単体)

$e=(1, 1, \cdots, 1)^T \in R^n$ 定数ベクトル

$y=(y_1, y_2, \cdots, y_n)^T$ 変数ベクトル

T：転置記号

である．この問題の特徴は制約条件が同次式 (1) と変数 y を単体 S に閉じ込める制約 (2) からなっていることにある．論文［1，2］では，さらに，“最小値が既知”を仮定して，K法の説明が展開されている．標準形のＬＰを上述のＫ法のための基準形に変換する方法や，最小値が既知の仮定を取り除く手法が追加説明されているが，この出発点は，これまで主として単体法を学んできた者にとってはきわめて不自然であり，Ｋ法の原理の理解をむずかしくさせていた．

Todd-Burrell［6］は最小値が既知の仮定を取り除き，Ｋ法のための基準形ＬＰの双対問題を使って未知な最小値の下界を各反復で更新する強力な手法をＫ法に導入し，上述の難点の１つを解決した．

Ｋ法の標準形ＬＰ上への移植は何人かの研究者によって独立に行なわれている（小島［3］，Lustig［5］，Ye-kojima［7］）．特に，［3］，［7］では，Todd-Burrell による下界値の更新式も標準形ＬＰ用に修正され，上述の２つの難点が解決されている．

本稿では，これらの仕事にもとづき，Ｋ法とそれに付随した理論を以下の対称な双対問題のペア上で展開する．

(P)主 問 題　Min. c^Tx_N

s.t.　$Ax_N \geqq b,\ x_N \geqq 0$

(D)双対問題　Max. b^Tu_B

s.t.　$A^Tu_B \leqq c,\ u_B \geqq 0$

ここで，Aは $m \times (n-m)$ 行列，$b \in R^m$，$c \in R^{n-m}$，$x_N \in R^{n-m}$，$u_B \in R^m$ である．このペア上でK法を動かすことにより，K法に双対理論がどのように生かされるかがより明確になる．

こじま　まさかず　東京工業大学　理学部　情報科学科
〒152 目黒区大岡山 2—12—1

スラック変数を導入すると，この２つの問題は等号条件つき問題

$(\bar{P})$ Min. $c^T x_N$

s.t. $Ax_N - x_B = b,\ x = (x_N, x_B) \geqq 0$

$(\bar{D})$ Max. $b^T u_B$

s.t. $A^T u_B + u_N = c,\ u = (u_B, u_N) \geqq 0$

に変形される．これらに，下界値の更新式［６］を組み込んだ標準形ＬＰを対象とするK法の修正版［３，７］を適用すると，それぞれ，

問題$(\bar{P})$へのK法では

$\{0 < x^p\}$：問題$(\bar{P})$の実行可能解の列

$\{\lambda^p\}$　：下界値の列

問題$(\bar{D})$へのK法では

$\{0 < u^p\}$：問題$(\bar{D})$の実行可能解の列

$\{\mu^p\}$　：上界値の例

が生成される．双対定理により，自明な関係として，

$c^T x_N{}^P \longrightarrow$問題$(\bar{D})$の上界値

$b^T u_B \longrightarrow$問題$(\bar{P})$の下界値

であることがわかる．

以下では，問題$(\bar{P})$へのK法の適用において，下界値 λ^p を計算するさいに，その副産物として問題$(\bar{D})$の内点実行可能解（$u > 0$ なる実行可能解）を生成していることを示す．問題$(\bar{D})$と問題$(\bar{P})$は対称であるから，問題$(\bar{D})$へのK法の適用においては，副産物として問題$(\bar{P})$の内点実行可能解が生成される，

この事実は，Karmarkar 法の原形［１，２］がそのうえで働く単体上のK法のための基準形ＬＰ（上述）および標準形ＬＰに対しては，上記の論文［６，３，７］でK法に取り込まれているが，対称な双対問題のペア上で議論を展開することにより，主問題と双対問題に，同時に，平行して，かつ，互いに情報を交換しながらK法を適用できることを示唆している．

2. ポテンシャル最小化問題への変換

問題$(\bar{P})$の実行可能解の集合を X，内点実行可能解の集合を X^0 で表わす．議論を簡単にするために X^0 が非空かつ有界（この仮定は，“X^0 が非空，かつ，最小解の集合が有界”に弱めることができる．［４］参照）で，初期内点実行可能解 $x^0 > 0$ が既知であると仮定する．また，最小値を λ^* で表わす．

問題$(\bar{P})$のポテンシャル関数

$$f(x, \lambda) = (1+n) \ln (c^T x_N - \lambda) - \sum_{j=1}^{n} \ln (x_j)$$

を導入する．ただし，λ は最小値の下界．このとき，任意の $x \in X^0$ と $\lambda < \lambda^*$ に対して等式

$$\frac{c^T x_N - \lambda}{c^T x_N^0 - \lambda^0} = \gamma(x) \exp \{f - f^0)/(1+n)\}$$

が成立することが簡単な計算により確かめられる．

ただし，

$$f = f(x, \lambda),\ f^0 = f(x^0, \lambda^0),$$

$$\gamma(x) = \exp\{(\sum_{j=1}^{n} \ln(x_j) - \sum_{j=1}^{n} \ln(x_j{}^0)/(1+n)\}$$

である．内点実行可能解の集合 X^0 は有界であるから，$\gamma(x)$ は X^0 上である $\kappa \in R$ により上から押さえられる．したがって，任意の $x \in X^0$ と $\lambda < \lambda^*$ に対して不等式

$$\frac{c^T x_N - \lambda}{c^T x_N^0 - \lambda^0} \leqq \kappa \exp \{f - f^0)/(1+n)\} \qquad (3)$$

が導かれる．ゆえに，制約条件

$x \in X^0,\ \lambda < \lambda^*$

のもとでポテンシャル関数を最小化し，$f \to -\infty$ にすれば，$c^T x_N - \lambda \to 0$，すなわち，目的関数値 $c^T x_N$ は上から，下界値 λ は下から，それぞれ，最小値 λ^* に近づくことがわかる．特に，K法では各反復でポテンシャルfを少なくとも $\delta = 0.2$ は小さくする点列，すなわち，不等式

$$f(x^p, \lambda^p) \leqq f(x^{p-1}, \lambda^{p-1}) - \delta \quad (p = 1, 2, \cdots)$$

を満たす点列

$\{x^p \in X^0\},\quad \{\lambda^p \leqq \lambda^*\}$

が生成される．上の不等式は，

$$f(x^p, \lambda^p) \leqq f(x^0, \lambda^0) - p\delta \quad (p = 1, 2, \cdots)$$

を意味するが，これを(３)に代入すると，結局，不等式

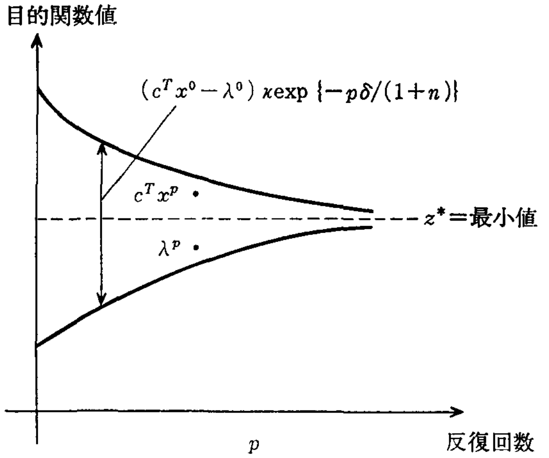

図1　Karmarkar 法が生成する点列の収束

$$\frac{c^T x_N^p - \lambda^p}{c^T x_N^0 - \lambda^0} \leqq \kappa \exp\{-p\delta/(1+n)\}$$

を得る．この不等式は目的関数値とその下界値の差 $\{c^T x_N^p - \lambda^p\}$ が，平均的に見て，少なくとも反復回数 p の線形オーダーで0に収束することを保証しており，K法が多項式オーダーの方法であることを証明するための鍵になっている．(**図1**参照)

3. 最急降下方向

$p+1$ 番目の反復では，前の反復で得られた内点実行可能解 x^p を単体

$$S=\{\begin{bmatrix} y_0 \\ y \end{bmatrix} \in R^{1+n} : e^T \begin{bmatrix} y_0 \\ y \end{bmatrix} = 1+n, \begin{bmatrix} y_0 \\ y \end{bmatrix} \geqq 0\}$$

の重心 e に移す$R_+{}^n$(R^n の非負象限) から S への射影変換T

$$(y_0, y) = T(x),$$
$$y = (1+n)D^{-1}x/(e^T D^{-1}x + 1),$$
$$y_0 = (1+n) - e^T y$$

を考える．ただし D は $x_1{}^p, x_2{}^p, \cdots, x_n{}^p$ を対角要素とする対角行列であり，e は次元が n または $1+n$ の要素がすべて1であるベクトルを表わす．この変換Tを実行可能領域Xとポテンシャル関数fにほどこす(詳しくは，[3] 参照)．その結果，変換された空間=単体S上での変数yに関するポテンシャル最小化問題

$$\text{Min. } \bar{f}(y_0, y, \lambda)$$
$$\text{s.t. } -by_0 + AD_N y_N - D_B y_B = 0, \quad y \in S$$

が導かれる．ただし，

$$y = (y_N, y_B),$$
$$D_N = \mathrm{diag}\{x^p, \cdots, x_{n-m}^p\},$$
$$D_B = \mathrm{diag}\{x_{n-m+1}{}^p, \cdots, x_n{}^p\},$$
$$\bar{f}(y_0, y, \lambda) = (1+n)\ln(c^T D_N y_N - \lambda y_0) - \sum_{j=0}^{n} \ln(y_j)$$

ここでは，λ は変数ではなく，パラメータとみなす．

ポテンシャル関数 f と $\bar{f}$ の間には，任意の $x \in X^0$ とその射影変換 $(y_0, y) = T(x)$ に対して，

$$\bar{f}(y_0, y, \lambda) = f(x, \lambda) + \text{定数}$$

なる関係がある．したがって，新しい下界値 $\lambda^{p+1} \geqq \lambda^p$ を決定した後に，変換された空間=単体 S 上で現在の実行可能解 $e = T(x^p)$ よりも，$\delta > 0$ だけポテンシャルの小さい点 a，すなわち，

$$\bar{f}(a, \lambda^{p+1}) \leqq \bar{f}(e, \lambda^{p+1}) - \delta$$

を満たす $a \in S$ を見つけ，それを逆変換 $x^{p+1} = T^{-1}(a)$ すれば

$$f(x^{p+1}, \lambda^{p+1}) \leqq f(x^p, \lambda^{p+1}) - \delta$$

となる．さらに，$\lambda^p \leqq \lambda^{p+1} \leqq \lambda^*$ を考慮にいれると不等式

$$f(x^{p+1}, \lambda^{p+1}) \leqq f(x^p, \lambda^p) - \delta$$

が得られる．

上述の射影変数をほどこした後に，重心 e でのポテンシャル関数 $\bar{f}$ の最急降下方向 $d(\lambda)$ を計算する．具体的には，

$Y = e \in S$での実行可能方向の集合

$P_Y = Y$ への直交射影行列

としたとき，最急降下方向は $-P_Y \nabla \bar{f}(e, \lambda)$ で定義される．さらに，

$$\bar{c}(\lambda) = \begin{bmatrix} -\lambda \\ D_N c \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ D_N c \\ 0 \end{bmatrix} - \lambda \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \in R^{1+n}$$

と置くと最急降下方向は，方向として，$-P_Y \bar{c}(\lambda)$ に一致することが確かめられる．したがって，

$$d(\lambda) = -P_Y \bar{c}(\lambda)$$

と書ける．この計算のさいに，副産物として，下界値 λ^p の更新と双対問題の内点実行可能解が得られることになる．

4. 下界値と双対実行可能解の生成

$e\in S$ での実行可能方向の集合 Y は

$$Y=W\cap E,$$

$$W=\{\begin{bmatrix} y_0 \\ y \end{bmatrix}\in R^{1+n}:\bar{A}\begin{bmatrix} y_0 \\ y \end{bmatrix}=0\}$$

$$\bar{A}=(-b\ \ AD_N-D_B)$$

$$E=\{\begin{bmatrix} y_0 \\ y \end{bmatrix}\in R^{1+n}:e^T\begin{bmatrix} y_0 \\ y \end{bmatrix}=0\}$$

のように分解される．また，$e\in W$ であることにより，空間 Y,W,E への直交射影行列 P_Y,P_W,P_E の間には $P_Y=P_EP_W$ なる関係が成立するのがわかる．したがって

$$d(\lambda)=-P_Y\bar{c}(\lambda)=-P_EP_W\bar{c}(\lambda)$$

と表わせる．

ここで，$P_W\bar{c}(\lambda)$ に注目する．まず，直交射影行列 P_W は

$$P_W=(I-A^{-T}(\bar{A}\bar{A}^T)^{-1}\bar{A})$$

と表わせる．したがって，

$$v(\lambda)=(\bar{A}\bar{A}^T)^{-1}\bar{A}\bar{c}(\lambda)$$

とおくと

$$\begin{aligned} P_W\bar{c}((\lambda)&=\bar{c}(\lambda)-\bar{A}^T(\bar{A}\bar{A}^T)^{-1}\bar{A}\bar{c}(\lambda)\\ &=\bar{c}(\lambda)-\bar{A}^Tv(\lambda)\\ &=\begin{bmatrix} -\lambda \\ D_Nc \\ 0 \end{bmatrix}-\begin{bmatrix} -b^Tv(\lambda) \\ D_NA^Tv(\lambda) \\ -D_bv(\lambda) \end{bmatrix} \end{aligned}$$

となる．ゆえに，$P_W\bar{c}(\lambda)>0$ と

$$\lambda<b^Tv(\lambda),A^Tv(\lambda)<c,v(\lambda)>0$$

が同値であることがわかる．後の2つの不等式は $v(\lambda)$が双対問題の内点実行可能解であることを意味している．

結局，$P_W\bar{c}(\lambda^p)>0$ の場合には

$$\bar{\lambda}=\sup\{\lambda:P_W\bar{c}(\lambda)\geqq 0\}>\lambda^p$$

$$\lambda^{p+1}=b^Tv(\bar{\lambda})$$

により，新しい下界値が得られる．また，$\lambda^p\leqq\lambda<\bar{\lambda}$ なる任意の λ に対して $v(\lambda)$ は双対問題の内点実行可能解となる．$P_W\bar{c}(\lambda^p)\not>0$ の場合には，$\lambda^{p+1}=\lambda^p$ とおく．いずれの場合にも $P_W\bar{c}(\lambda^{p+1})\not>0$ となり，$e\in S$ から最急降下方向 $d(\lambda)$ に進むことによって，ポテンシャル $\bar{f}$ を少なくとも0.2減少させる点 $(\bar{y}_0,\bar{y})\in S$ が得られる．この点を R^n へ射影逆変換した点が x^{p+1} になる．ポテンシャルの減少に関して，詳しくは，Todd-Burrell［6］，小島［3］，Lustig［5］参照．

5. 標準形の基底変換との関係

標準形の線形計画問題が与えられたとき，それにピボット演算をほどこすことにより，第1節で述べた問題($\bar{P}$)の形をした線形計画問題に変換することができる．この変換は基底変数 x_B の選び方に依存するが，得られる問題はすべて互いに等価である．また，理論的にはK法によって生成される実行可能解の列は基底変数の選び方によらない．これらの等価な主問題と対応する双対問題に上述の議論を適用したときの関係を**図2**に示す．

与えられた標準形の線形計画問題(P)は基底変数を x_B および x_C にとることにより，それぞれ，問題($\bar{P}$)と問題($\tilde{P}$)に変換される．この2つの問題の制約式では基底変数 x_B あるいは x_C の係数が負になっているが，これは第1節で述べた問題に形を合せるためで本質的なことではない．単体法で行なう通常の基底変換のように，基底変数の係数を正にとっても同様の議論ができる．

3つの主問題(P)，($\bar{P}$)，($\tilde{P}$)は互いに等価であるが，これらの上で定義されるポテンシャル関数も，また互いに等価になる（主問題の内点実行可能解に対して同じ値を与える）．問題($\bar{P}$)と問題($\tilde{P}$)は，それぞれ，双対問題($\bar{D}$)と($\tilde{D}$)を定める．これらの双対問題は，ピボット演算により，一方から他方へ変換可能であり，互いに等価になっている．したがってこれらの上で定義されるポテンシャル関数も互いに等価であることが導かれる．

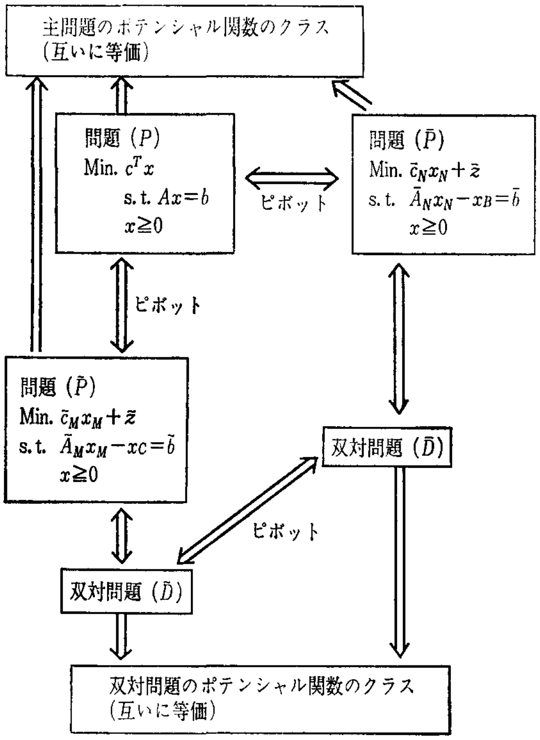

図 2　標準形ＬＰの基底変換と Karmarkar 法

参考文献

[1] N. Karmarkar : A New Polynomial-Time Algorithm for Linear Programming. Proceedings of 16th Annual ACM Symposium on Theory of Computing, Washington D. C., 1984.

[2] N. Karmarkar : A New Polynomial-Time Algorithm for Linear Programming. Combinatorica 4 (1984) 373-395.

[3] 小島政和 : Karmarkar 法の改良について, 第6回数理計画シンポジウム 1985.

[4] M. Kojima and K. Tone : An Efficient Implementation of Karmarkar's New LP Algorithm. Research. Rept. B-180, 1986, Tokyo Institute of Technology

[5] I. J. Lustig : A Practical Approach to Karmarkar's Algorithm. Tech. Report SOL 85-5, 1985, Stanford University

[6] M. J. Todd and B. P. Burrell : An Extension of Karmarkar's Algorithm for Linear Programming using Dual Variables. Tech. Report, 648, 1985, Cornell University.

[7] Y. Ye and M. Kojima : Recovering Optimal Dual Solutions in Karmarkar's Polynomial Algorithm for Linear Programming. Working Paper, Revised, August, 1985, Stanford University

新しい表紙について

本学会30周年に当り，かねてより表紙の図案を公募しておりましたが，応募作品７点のうちより，審査委員会において慎重審査の結果，高井英造氏の作品が入選と決まりました．本号より表紙を飾ることとなったのがその作品です．賞状ならび，賞金は30周年記念式典のさい，授与されることとなっております．

まずは高井氏より作者のことばをうかがいました．

高井　英造

創立30周年，と言ってもＯＲ学会のことであれば成熟のイメージよりは，さらなる前進と変革の清新さを月々の机の上で感じていただければと考えています．しかしながら，このような抽象的な作品に対して，強いて意味づけを求めるのは時として危険なことでもあると思うのです．大げさな言い方になりますが，たとえば小林秀雄の「モーツァルト」の中に出てくる「疾走する悲しさ」という言葉を知ってしまうのは，イメージを固定されてしまう意味で１つの不幸でもあるのではないでしょうか．

そこで，この表紙．むしろ作者の意図と気持は，みる方々の解釈におまかせしたい――というのは表現の拙なさを棚に上げた逃げ口上ではありません．できあがるまでの苦心談やら心理的葛藤やらを述べるのではなくて，表現と結果そのもので勝負を決めなくてはいけないのは，このような作品もＯＲのモデルも同じではありませんか．