随筆・LPメリーゴーラウンド

刀根　薫

歴史や人生は時折とんでもない回り道をするものである．幼なじみの2人がさまざまな暗夜行路の末に80を過ぎてからやっと結ばれたという新聞記事を読んだりすると，造物主の釆配の妙に思わずウムとうなったりすることがある．

さて，ＬＰをめぐってこの2年前から起こりつつあることをふりかえるとき，私にはそのような回り道の1つをわれわれ自身がたどっているような気がしてならない．ただし，この劇には演出家はいない．とは言え，そのスケールの大きさ，内容の面白さ，現代性――どの1つを取り上げてみても当代随一であることは間違いない事実であろう．そこで，私の個人的な体験をもとにこの2年間をふりかえってみることにした．題して「ＬＰメリーゴーラウンド」．なぜって？　まあ，お気軽にお読みください．

起

時間を2年数カ月前1984年の盛夏にもどそう．この年はIFORSの年であった．もともと南米アルゼンチンで開催される予定であったものが，フォークランド紛争のあおりをうけて，米国が肩代わりし，ワシントンＤＣで8月上旬に開かれた．私はこの会議に参加した後，テキサス大学オースチン校のサイバネティックス研究センターにチャーンズ先生――というよりはテキサスのチャーンズ親分と呼ぶほうがふさわしい――からご招待を受けて滞在していた頃である．招かれるままにチャーンズ邸に参上しては，この碩学が数学の上でたどってきた道程とキーイベントの数々を教わったり，将来の見通しを論じたりという楽しい夜を送っていた．もっとも，テキーラを飲むにつれていい気分になり，不覚にも居眠りを始めてお開きになるというていたらくで，今にして思えば惜しいことをしたものです．

こうした毎日を過ごしていたとき，忘れもしない9月24日の昼食時にチャーンズからカーマーカーの1件が同席者に紹介されたのである．彼は興奮気味で，科学雑誌「Science」の記事を語るとともに「今朝グラハム(AT&Tでのカーマーカーの上司）に電話して確かめたところだが，信じ難い記事だ．real worldのLP問題は内点法でアプローチできるほど甘くはない．最初の内点をどうやって見つけるのか．射影変換を使うらしいが，あの変換がＬＰに使えるか疑問だ.」という強い否定調のものであった．また，内容があのような形でリークされたことにも不満を示していた．しかしチャーンズは，ことの重大性は十分認識しているらしく，後にカーマーカー法の収束性が高々1次であることを示す例題を作っている．

私もさっそく問題の記事を読んでみた．たった1ページ余りの取材記事であったが，28歳のインド出身の数学者がこの方法を発見したとある．例によって肝心の部分になると比喩的な表現になってしまう科学記事であったが，それでもおぼろげながら方法の輪郭はつかむことができた．しかも5000変数問題をＩＢＭコードより50倍速く解いた

とね　かおる　埼玉大学　政策科学研究科
〒338 浦和市下大久保255

とある．事実とすれば大変な方法が出現したものだ．テキサスからの帰路立ち寄ったUCLAのジェオフリオンの所でも大きな話題になっていたが，情報不足で皆半信半疑であった．いったいAT＆Tは方法論を公開するのだろうか．

私は，ぞくぞくするような予感をもってロスアンゼルスを発った．

承

1984年10月に帰国してからカーマーカーの本論文を入手し読了したが，方法自体は意外に簡単なものであった．多項式性をアルゴリズムの形で証明しているし，そのアルゴリズムもすぐにパンコンに乗ることがわかったので，とりあえず8ビット機に組み込んで小さな問題を解いてみた．確かに1次収束性を持つのである！　これらの結果は1984年11月の秋のOR学会(法政大学工学部)のさいに若山邦紘君に申し出て特別に時間をさいてもらい，新LP解法とは何かを解説すると同時に8ビット機で解法を実演した．このプログラムでは直交投影の部分を単純に連立1次方程式を解くことによって求めていた．しかも反復ごとにそれをはじめからやるので，この部分に大部分の時間がとられていた．メモリの制約のためせいぜい20変数程度の問題までに限られた．また内点法であるから頂点解がズバリ得られないことは言うまでもない．同一問題を単体法で解く場合と比べて格段に劣ることがわかったがそれはあまり気にならなかった．むしろ1次収束性が成立することに驚きを感じた．もちろん多項式性即高速解法に結びつくとは限らないことはこの前のカチァンの例で承知しているので過大な期待はしなかったが，とにかく直交投影の部分をスピーディに処理できればきわめて有望な解法になり得るという確信を得た．

そこでまずやったことは基底を導入することであった．基底を導入して射影法をすべてやれないものか？　もちろん，やれるはずだ．しかも次第に最適基底に近づけることはできないか？　それも最適解が非退化ならばできるはずだ．退化している場合でも近くまではゆけるはずだ．こうすれば，ε-収束する前に最適基底解が得られる確率は高くなる．直交投影はどうするか？　とりあえず基底から得られるreduced gradient方向を使ってみることにした．この方向は基底が最適なものに近づけば直交射影自身に近づくことが期待される．また，初期の段階で両者の食い違いが大きい場合には正規直交基底を作って正確な方向を出すという手順をとってみた．その他，目的関数の暫定的な最小値の導入とその改訂，双対テストによる下界値のカサ上げなどいろいろ工夫したうえで今度は16ビット機に組み込んで実験した．

この方法の基本的な構想については1985年6月の東京の数理計画部会で，実験結果は同年10月の第6回数理計画シンポジウムで発表した．テスト問題としては，もっぱらAvis-ChvátalのランダムLPを用いたが，この非現実的なLPはサイズを自由にコントロールできるという意味では数値実験に好都合であった．また行列の過疎性（ゼロ要素が多いこと）を考慮する必要もないので私にとってまったく未知の領域であった過疎行列技術を使わなくてもよいという点でも好都合であった．といっても不勉強の言いわけにはならないが．

今度の方法は，この前の素朴な方法に比べて格段の進歩が見られたことは事実であったが，まだ単体法より数倍遅いのである．しかし問題のサイズが大きくなればなるほどその差はつまっているので，いよいよ射程距離内に入ってきたという感じがしてきた．

さて，かねてから東工大の小島政和君にはカーマーカー法に関する情報交換やパソコンのソフトのことでいろいろお世話になっていたが，同シンポジウムの同君の発表でreduced gradientを初期値としてconjugate gradient法（以下CG法と略す）を適用すると正しい直交投影方向が早く得られることを教えられた．これだ！　持つべきは有能な友．

このシンポジウムの後，小島君との共同研究の形に入る．ＬＰの定式化からはじまって，スケーリング，初期点と初期基底，目的関数値の上下界の改訂法，暫定最小値の更新，問題の縮小化，ＣＧ法等に検討を加えることによりほぼアルゴリズムの骨子は固まり，予備的な数値実験をくりかえしたが，パソコンでの実験をほぼ終了したので，大型機に移植して実験を続行した．このときプログラムの移植に関して大変面白い体験をした．

私はパソコンではNECの PC-FORTRAN を使ってプログラムを組んでいた――この言語は倍精度実数の指数部が単精度と同じという欠点を除けばごく普通の FORTRAN77 である――．このプログラムを大学の情報処理センターのHITAC M260Dに移すために，同センターの福島又一君の作成したIFITというソフトのご厄介になった．このソフトにより MS-DOS の下で書かれたフロッピーディスク上のファイルは M260D 上のファイルに転送されるのである．なんと便利な世の中になったものではないか．後は大型機用のエディターを使ってI/Oの部分や FORTRAN の違いを若干修正すればすべて完了である．このプログラムの移植は４時間程度で終った．この４時間には，比較のために組んだ改訂単体法の FORTRANプログラムの移植とデバッグも含まれる．もしこのプログラムを最初から大型機で作っていたら，おそらく10倍以上の時間がかかっていたことであろう．「モデルはパソコンで，実行は大型機で」これが私のモットーです．

さて，実験開始である．パソコンでとりあつかえた最大規模の問題，制約式の数m（変数の数は２m）にして約50がこちらでは最小規模の問題であり，$m=50$，100，150，200，250と上げてゆく．予期していた通りとはいえ，$m=100$のあたりで単体法と CPU 時間が逆転し，大型になればなるほど新解法のほうが有利であることがはっきり出てきたのは感激的な一瞬であった．

Avis-Chvátal のランダムＬＰの場合，単体法のCPU時間がmの3.8乗に比例して増大するのに対して新解法のそれはmの2.9乗であった．当然のことながら比較の対象となった単体法のプログラムのでき具合いが問題となるはずである．この点に関しては，後日われわれと同じ問題を他機種上でRANDのLPプログラム(単体法)を用いて解いた人がいて，その結果はほぼ同じ多項式性を示しているので，傍証が得られたものとみている．一応これまでの結果をまとめて論文にしようということになり1986年４月に東工大情報科学科のリサーチレポートとして小島君との共著で出させてもらった．もともとこの論文は方法論を主体としたもので，数値実験の部分は「予備的」としたことからもわかるように，きわめて特殊なランダムＬＰを対象としたものである．後日，本格的な数値実験をするつもりであった．しかし世間の多くの人はこの部分から興味を持つらしく「カーマーカー以外の人が出した初めて単体法を越えた結果」というマンガサリアンのコメントをはじめ，ダンツィクからは「ランダムＬＰでこの結果ならば，一般の構造つきのＬＰの場合はもっとうまくいくだろう．」というコメントをいただいた．もっともサーティの同僚からは「予備的数値実験だけでその後の本格的な実験のない論文がなんと世の中には多いことだろう…」と痛い点もつかれたが．

さて，そこが問題である．一般のＬＰすなわち real world のＬＰ問題は過疎行列をもっている．そして過疎行列をとりあつかう技術やソフトウエアは大変な進歩をしているようである．それは数理計画の分野ばかりではなく構造計画をはじめとするエンジニアリングの多分野で強く要請されていることである．悲しいかな私はこの面ではずぶの素人であるにすぎない．この面ではソフトウエアの質，量ともに米国が圧倒的な優位に立っているようだ．もちろんわが国でも優れた研究はなされているが，この問題をめぐる一般的な環境はそれほどよくない．しかし泣き言をいっても始まらない．とにかく隗より始めよだ．これが目下(1986

年8月）の課題.

転

とこうするうちに，カーマーカーから，6月に日本にゆくので東京で会いたいという電話が小島君宛に入ってきた．京都での日米シンポジウムに出席した後上京するとのこと．大歓迎である．カーマーカーとは初対面であったが，射影法の im. plementationの細部にわたって3人で検討することができた．これは実に有益な機会であった(1986年6月14日)．その折のテーマは次のようなものであった．

1. 下界値の改訂法，特に2次元ラインサーチについて
2. 過疎行列の基底のＬＵ分解とその更新について
3. ＣＧ法の停止規則について
4. 射影法が強相補性の成立するユニークな解に収束することについて
5. 射影法の軌跡を微分方程式で追跡する方法をめぐって

このように，射影法全体にわたる内容であった．正直な話彼がこれほどオープンに自分の知見を開陳してくれるものとは思ってもいなかったので，まったく驚きであった．カーマーカーをめぐる世間の風評は，あれはいったい何だったのか．若いなどということはもう一切問題にもならない程度に一流の学者に間違いないと私は見た．この後に行なわれた一般講演や懇談会を通して好印象を持った人は少なくない．もっとも，AT&Tの機密に属すると思われる部分は依然として不明のままであるが，これはカーマーカーといえども企業人であるから当然のことととれなくもない．

ここで，挿話をひとつ．カーマーカーはカリフォルニア大学バークレー校でカープの下で学位(組合せ論)をとった後，シリコンバレーのＩＣ関係の企業に就職しようと思っていた．ＩＣ設計に自信を持っていたからである．ところが，日本のＩＣ攻勢の前にシリコンバレーは壊滅的な打撃を受けてこの話は立消えとなった．こうして，AT&Tのベル研究所に入ることになった．入社後ＬＰでもやってみようかということで6カ月で新解法を考案したそうである．春秋の筆法を以ってすれば日本のＩＣ産業が新ＬＰ解法の生みの親．

話をもとにもどそう．彼は来日当時on leaveで滞在していたカリフォルニア大学バークレー校でアドラー等と一緒に行なっている研究レポートを持参してくれた．それは射影変換の代りにアフィン変換を用いるものであった．数値実験も行なっていて，実際的なＬＰ問題を単体法より数倍程度速く解いている．しかも大規模問題ほどその差は大きい．ほぼ同時に送られてきたスタンフォード大学SOL (Systems Optimization Laboratory)のレポートを見てもアフィン変換を用いる方向に動いていることがうかがわれる．

射影変換の代りにアフィン変換を使う利点は次のようなものである．

① アルゴリズムの構成がより単純化される．
② 標準型のＬＰがそのままとりあつかえる．
③ 単体上への射影が不要になる．
④ 目的関数の最小値の推定が不要になる．
⑤ ポテンシャル関数を使わなくても済む．
⑥ 目的関数値は毎回減少する．

ただしこの方法の多項式性については不明である．そこでわれわれの方法にもこの方式をとり入れてみた．驚くなかれ15－60%程度のCPU時間短縮が可能となった．しかも上記のように，方法はきわめて単純化されたし，アジャストすべきパラメータの数も減った．これは，限られた問題についてのみの実験結果とはいえ，大きな改善であった．ただし，アフィン法の多項式性はこれらの問題に関するかぎり射影法のそれとほぼ同じであり，その前についている定数が小さくなったとみるべきであろう．一般の場合は不明である．

もっともアドラー等やSOLのギル，マーレー等は標準型ＬＰにそのままアフィン法を適用するのではない．双対問題に対して適用する．その方が

途中の反復点の実行可能性が容易に保証されるというのが理由らしい．完全に無制約問題を解くことになるからである．しかし，途中で得られる点は双対可能であるにすぎない．元の問題の可能点ではない．双対問題の ε-最適解が得られた後に初めて元の問題の最適解が得られるという仕組みになっている．これは一般に便利な方法と言えるだろうか．われわれの方法は元の問題に対して直接アフィン法を適用するのでその点は便利である．途中でやめても可能解が得られているし，しかもＮＬＰの双対原理を使えば最小値をはさむ下限値が得られるはずである．その下界値は反復が進むとともに最小値に収束する．

もうひとつ注目すべき点がある．アドラー等の実験には行列の過疎性を十分にとり入れていることである．もしこれをとり込まなかったら，あるいは下手にとり入れたら，はたして単体法を越える結果が得られたであろうか．ある種の方法論はそれ自体の優劣とは別にそれを implement する技術がともなうかどうかで評価は逆転する可能性もあるのだ！

さて，与えられた枚数も残り少なくなってきた．この辺でメリーゴーラウンドに入ろう．射影法が1954年にノルウェーのフリッシュ（Frisch）によって提案された対数ポテンシャル法の系列に属するということはすでに1984年11月にチャーンズが指摘しているが，1985年７月にＳＯＬのギル，マーレー等によって正式に示された．アフィン法にいたってはもっと直接的に自然に対数ポテンシャル法との対比がとれるのだ．その詳細についてはＳＯＬの文献または日本数学会応用数学分科会予稿集（1986年秋季）の拙稿をみてもらうとして，当該の近似点を常に単体の重心にもってくるという射影法やアフィン法のキーポイントはすでに30年以上も前にimplicitに提案されていたことになる．なんという歴史の回り道であろうか．単体法の圧倒的な威力の前にこれらの方法論はＬＰに対しては日の目をみることなくすぎてきたのである．もっともＮＬＰに対する方法論としては十分にその力を発揮してはきたが．

内点法と単体法とどちらがこれからの主流になるのだろうか．私はどちらも他の良い点をとり入れる余地が十分あると見ている．そしてある意味でハイブリッドな方法に進むのではないだろうか．たとえば単体法の phase 1 が内点法によってきわめてスピーディに処理できることは指摘されているし，内点法は単体法がこれまで蓄積してきた過疎行列技術を活かせるはずである．

先ほど指摘した，歴史の回り道は決して無駄ではなかったのだ．われわれはメリーゴーラウンドを楽しんだのみではなく，スパイラルに進歩しつつあるといえよう．そしてこの問題をめぐって多くの新理論や新解法がこの２年間に提案された．伊理，今井による乗法的罰金関数法やレネガー（Renegar）の方法はニュートン法の系列に属しており，超１次収束性を持つという点で射影法を越えている．ＬＰの理論と解法は大きく変ろうとしている．そして，今はその夜明け前である．これから始まる変革は科学（理論）と技術の総力戦となるであろう．技術のなかには行列を処理するためのソフトウエア技術はもとより並列処理といったハードウエア技術もふくまれる可能性がある．

結

誰の言葉だったか忘れたが――あんがいモーゼあたりかもしれないが，さる賢人としておきましょう――「人は一生のうち７回狂う」という．狂う対象は人さまざまである．私も小学生の頃の模型飛行機から始まって今度のＬＰまで勘定してみるとちょうど７回「狂」と名のつくことを経験したことになる．ということは，これでおしまいなのだ．まだ，狂いたいものが幾つか残っているというのに．

若い人でまだこの回数に達していない人はＬＰ狂になってはいかが？　それも大狂いを．

（文中敬称略）