有向マトロイドと線形計画

福田　公明

1. はじめに

線形計画の分野では，最近，Karmarkar 法に代表されるような非線形手法の研究が脚光を浴びているが，そのようなアプローチとは対照的に，線形計画理論の組合せ的な部分に注目し，そのエッセンスを見つけだす研究が過去15年の間に進められてきた．有向マトロイドを用いた線形計画法の研究がそれである．

線形計画法を組合せ論的に研究する試みは，実は，Tucker，Balinski らによって20年以上も前からすでに始まっている[1,21]．彼らの研究は，シンプレックス表において，そこに現われる実数値の大きさではなく，その符号だけに着目し，線形計画の双対定理やアルゴリズムの組合せ的な性質を浮き彫りにした．しかし真に注目に値する研究は，Rockafellerの啓蒙的ともいえる論文[14]に発表されている．この中で，Rockafeller は，線形計画法の重要定理を拡張するような組合せ論的な枠組みの存在を予想したのである．そしてその後，Bland[3]，Lawrence [8]らが，この予想にもとづき，有向マトロイドの概念を導入し，シンプレックス法や双対定理を純粋に組合せ的に拡張して，線形計画の組合せ論的基礎を築きあげた．

ふくだ　こうめい　東京工業大学　理学部　情報科学科
〒152 目黒区大岡山2―12―1

有向マトロイドは実線形部分空間を単純化した概念であるが，「マトロイド」という難解そうな用語が災いしてか，有向マトロイドを用いた組合せ論的線形計画法の成果についてはあまり知られていないように思われる．シンプレックス法におけるBlandの最小添字規則は有名であるが，これは1つの成果にすぎない．本稿では，線形計画理論と有向マトロイドとの密接な関係について，これまであまり紹介されなかった重要な定理やアルゴリズムに触れながら解説していくことにしよう．

2. Terlaky の自己双対最小添字法

シンプレックス法はピボット演算を使って線形計画問題を解く方法であるが，退化した問題に対し，巡回と呼ばれるピボット演算の無限ループに入り込む可能性があるため，一般に収束は保証されない．巡回を防ぐための手段としては，許容されるピボットを限定する規則がいくつか知られている．

10年前まではスタンダードであった辞書式規則[5,7]は，制約式を微小に動かして得られる退化していない問題を解く技法（摂動法）を，ベクトルの辞書式順序を使って，仮想的に実現するものである．

現在，最もよく知られているのはBlandの最小添字規則[2,5,20]である．説明する必要もないと思うが，許容されるピボットの中で対応する非基底変数の添字の最も小さい列を選び，続いて，対

応する基底変数の添字の最も小さい行を選ぶという規則である．辞書式規則に比べ，はるかに簡単で実用的価値もあるため，Blandの選択規則が代りに採用されるようになっている．

さて，以上の特殊なピボット選択を組み込んだシンプレックス法の他に，LP を有限回で解くピボット法が存在する．たとえば，Bland が最小添字規則を発表したさい，同時に，回帰的なピボット選択規則 [2] を発表している．また，その後 Edmonds-Fukuda[9]，Todd[18], Jensen[12], Terlaky[17]，Wang[22]らが新しい方法を次々に提案している．Blandの 2 つの方法を含めてこれらの方法はすべて有向マトロイドの組合せ的な枠組みの中から生まれたものである．

ここでは，紙面の制約上すべてを紹介することはできないので，最近発表されたTerlakyのアルゴリズムを紹介しよう．おそらく，線形計画問題を（有限回の反復で）解くアルゴリズムの中で，最も簡単なものであろう．直感的には，Blandの最小添字規則を，主・双対問題の両方に同時に適用したような方法である．Terlaky自身は，この方法を**十文字法** (Criss-Cross Method) と呼んでいるが，ここではBlandの規則との関連を強調し**自己双対最小添字法**と呼ぶことにする．

扱う線形計画問題を，基準形の LP:

(1) $\max \sum_{j=1}^{n} c_j x_j$

$$\text{subj. to} \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \leqq b_i \ (i=1, \cdots, m)$$

$$x_j \geqq 0 \ (j=1, \cdots, n),$$

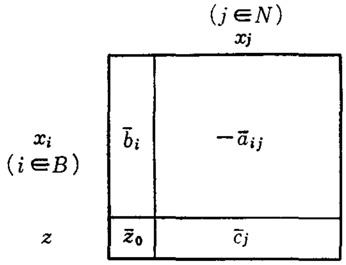


図 1 辞書の行列表現

としよう．ここで，c_j，a_{ij}は与えられた実数である．いま問題(1)をスラック変数 $x_{n+1}, \cdots\cdots, x_{n+m}$ を用いて，以下のように書き換えておく：

$$\max\ z$$

subj. to

$$x_{n+i} = b_i - \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \ \ ((i=1, \cdots, m)$$

$$z = 0 + \sum_{j=1}^{n} c_j x_j \quad x_j \geqq 0 \ \ (j=1, \cdots, n+m).$$

また，このLP の任意の**辞書** (Dictionary) を

$$x_i = \bar{b}_i - \sum_{j \in N} \bar{a}_{ij} x_j \ \ (i \in B)$$

$$z = \bar{z}_0 + \sum_{j \in N} \bar{c}_j x_j$$

と書き，**図 1** のように行列で表わす．ここで，B, $N(\equiv\{1, \cdots, m+n\} - B)$はそれぞれ基底変数,非基底変数の添字集合である．辞書はシンプレックス表と基本的に同じものであることに注意しよう．**辞書の最適性**は，**主実行可能性**: $\bar{b}_i \geqq 0$ $(i \in B)$と**双対実行可能性**: $\bar{c}_j \leqq 0$ $(j \in N)$ の両方が満たされていることである (**図 2 参照**)．

Terlakyのアルゴリズムは，任意の辞書から始めて，主・双対問題いずれかの実行不可能性を得るか，または最適な辞書に到達して終了する方法

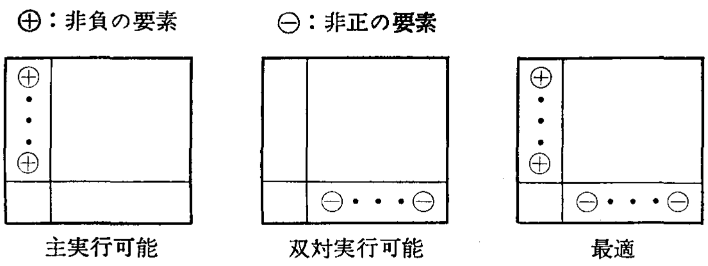


図 2 辞書の主・双対実行可能性と最適性

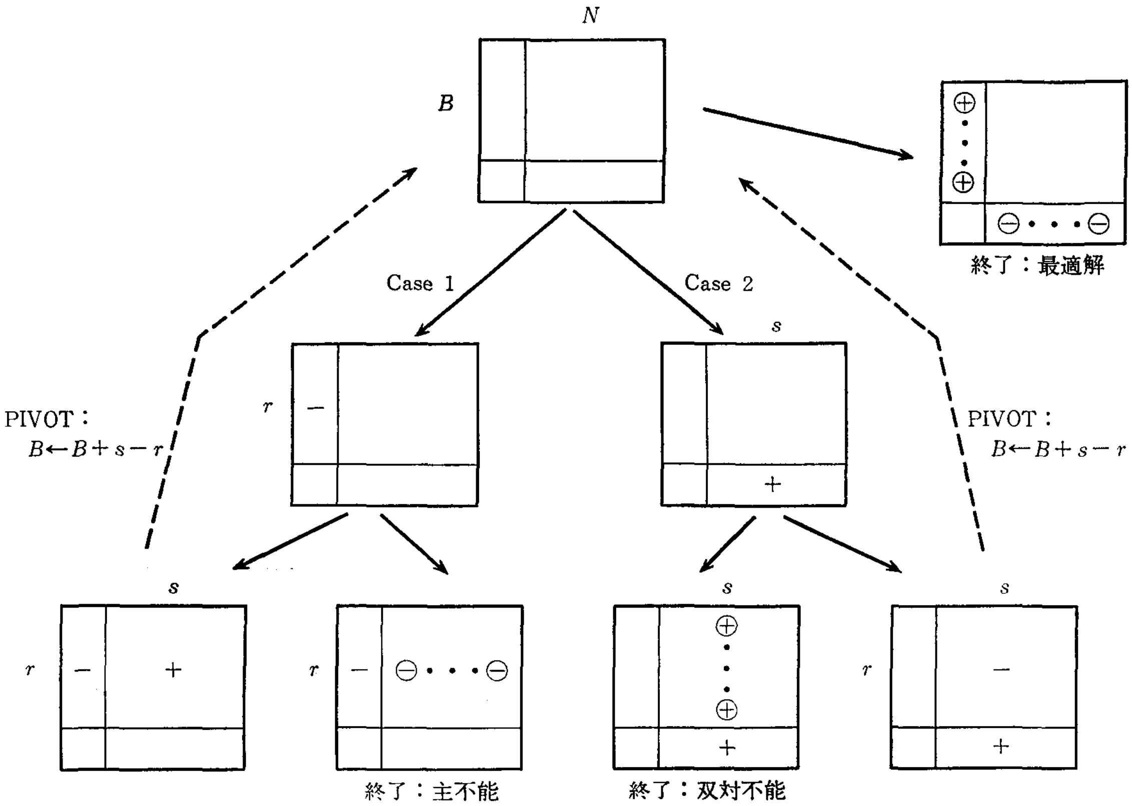


図 3 Terlaky の自己双対アルゴリズム（十文字法）

である（**図 3** 参照）.

Terlaky の自己双対最小添字法

STEP 0. 初期基底を $B=\{n+1,\cdots,n+m\}$ とおく.

STEP 1. $h=\min(\{i\in B:\bar{b}_i<0\}\cup\{j\in N:\bar{c}_j>0\})$ を満たす h を求める．そのような h がなければ終了（⇨最適解）.

STEP 2.

Case 1. $h\in B$ の場合
$r=h$ とおき，$s=\min\{j\in N:-\bar{a}_{rj}>0\}$ なる $s\in N$ を求める．そのような s がなければ終了（⇨主不能）.

Case 2. $h\in N$ の場合
$s=h$ とおき，$r=\min\{i\in B:-\bar{a}_{is}<0\}$ なる $r\in B$ を求める．そのような r がなければ終了（⇨双対不能）.

STEP 3. (r,s) 要素 $\bar{a}_{rs}$ を軸にピボット演算を行ない，基底 B を更新する．STEP 1 へ.

2 段階シンプレックス法に比べ，実行可能性を得るための第 1 段階がないので，驚くほど簡単である．収束性の証明のアイデアについては，8 節で説明することにしよう.

3. 線形計画法の主要定理

前節で紹介したTerlakyのアルゴリズムをはじめ，線形計画問題を有限回の反復で解くアルゴリズムは，線形計画法の主要定理を構成的に証明するための重要な道具となる.

この節では，前準備として，線形計画法における主要定理について簡単に復習し，後の節で，それらの新しい証明方法について説明することにしよう.

最大化（最小化）の LP において，目的関数が制約領域の中で上に（下に）有界であるとき，そ

の問題は**有界**であると呼ばれている.

線形計画法において，初等的な概念だけを使って表現できる重要な定理は次のものであろう.

(LPの基本定理)

実行可能で有界なLPは最適解をもつ.

基底解の概念や双対の概念を導入せずに表現されるという意味において，この定理は，線形計画法における最も基本的な定理と呼んでさしつかえないであろう.

さて，基本定理と並んで線形計画法における最も重要な定理は，双対定理であろう.

(LPの双対定理)

主問題，双対問題がともに実行可能であれば両方に最適解が存在し，目的関数値は一致する.

この定理は，基本定理と線形部分空間の双対性を組み合せたもので，線形計画理論の中核となる.

定理である.

7節，8節では，以上の定理の初等的な証明のアイデアについて説明する.

4. 線形計画問題と線形部分空間

線形計画問題を考える場合，その制約条件式や目的関数が陽に与えられていることを仮定している．たとえば，基準形のLPは，2節の(1)のように表現されていて，係数 c_j, a_{ij} は与えられた実数としている．一方，双対問題は

(2) $\min\sum_{i=1}^{m} b_i w_i$ subj. to

$$\sum_{i=1}^{m} a_{ij} w_i \geqq c_j \ (j=1,\cdots,n)$$

$$w_i \geqq 0 \ (i=1,\cdots,m)$$

と定義される.

このような問題の行列表現は，線形計画法の理論を構築するさい，あたかも必要であるかのように見える．ところが，この表現は，基本定理，双対定理，シンプレックス法などを説明するときには，本質的なことではない．ここでは，線形計画問題を扱うさい，その行列表現よりも本質的な線形部分空間表現について考えよう.

問題(1)を，スラック変数 $x_{n+1},\cdots,x_{n+m}$ を用いて，以下のように書き換えておく.

$$\max\sum_{j=1}^{n} c_j x_j \text{ subj. to}$$

$$-b_i+\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j + x_{n+i}=0 \ (i=1,\cdots,m)$$

$$x_j \geqq 0 \ (j=1,\cdots,n+m).$$

ここで，$(m+1)\times(m+n+2)$ 行列 A を

$$\begin{array}{cc} & \begin{array}{ccccccc} 0 & 1 & n & n+1 & n+m & m+n+1 & \end{array} \\ A= & \begin{pmatrix} -b_1 & a_{11} & a_{1n} & 1 & 0 & 0 & 0 \\ -b_2 & a_{21} & a_{2n} & 0 & 1 & 0 & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ -b_m & a_{m1} & a_{mn} & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -c_1 & -c_n & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \end{array}$$

と置き，その核空間を $V=\{x : Ax=0\}$ とする．このとき，主問題(1)と双対問題(2)は，それぞれ次のようにきわめて対称的に書き換えることができる：

(3) max x_f

subj. to $x \in V$,

$x_g=1$,

$x_j \geqq 0 \ (j=1,\cdots,m+n)$;

(4) max y_g

subj. to $y \in V^{+}$,

$y_f=1$,

$y_j \geqq 0 \ (j=1,\cdots,m+n)$,

ただし，$g=0$，$f=m+n+1$ である．また，V の直交補空間 V^{+} は $\{y :\ y=wA,\ w\in R^{m+1}\}$ であることに注意しよう．線形計画の主・双対問題はこのように書き換えると，線形部分空間およびその直交補空間の双対的関係と密接に対応していることが理解できる.

5. 線形部分空間と有向マトロイド

E を有限集合とし，d 次元実空間 R^{E} の線形部分空間を V とする(ただし $d=|E|$)．任意のベク

トル $x \in R^E$ に対し，各部分の符号だけを残してできる“符号”ベクトルを $\sigma(x)$ と表わすことにする．たとえば，$x=(2,-3,0)$ とすると，$\sigma(x)=(+,-,0)$ である．線形部分空間 V のすべてのベクトルから生成される符号ベクトルの集合 $\sigma(V)$ を F とおこう．一般に，V は無限個のベクトルからなる集合であるのに対し，F に含まれるベクトルの個数は（高々 3^d 個で）有限である．このことから，F がもつ情報量は，V のもつそれよりかなり少ないことが予想される．しかし意外にも，線形部分空間 V の多くの性質が，その符号ベクトルの集合 $\sigma(V)$ の性質として表現されるのである．有向マトロイド研究のねらいは，集合 $\sigma(V)$ が満たす自明な性質を公理として扱い，その公理から線形部分空間上で成り立つ（離散的な）定理やアルゴリズムを一般化しようとするものである．

（E 上の）**符号ベクトル**とは，各成分 X_j が符号 $+, 0, -$ のいずれかを取るベクトル $X=(X_j: j \in E)$ である．X, Y を符号ベクトルとした時，その**合成**（composition）$X \circ Y$ を符号ベクトル Z

$$Z_j=\begin{cases} X_j & X_j \neq 0 \quad \text{のとき} \\ Y_j & X_j = 0 \quad \text{のとき} \end{cases} \quad (j \in E)$$

として定義する．符号ベクトル X, Y において，$\{X_f, Y_f\}=\{+,-\}$ となっている要素 $f \in E$（つまり符号が反転している要素）の集合を $D(X,Y)$ と書くことにする．また，**零ベクトル**を 0 で表わす．

有向マトロイド[3, 4, 7, 8, 13]とは，以下の公理（OM1）～（OM4）を満足する（E 上の）符号ベクトルの集合 F である：

(OM1) $0 \in F$

(OM2) $X \in F \Rightarrow -X \in F$

(OM3) $X,\ X' \in F \Rightarrow X \circ X' \in F$

(OM4) $X,\ X' \in F,\ f \in D(X,\ X')$
$\Rightarrow \exists Z \in F$ such that
$Z_f=0$
$Z_j=(X \circ X')_j \ \forall\ j \notin D(X,X')$.

例（線形有向マトロイド）

R^E の線形部分空間 V のすべてのベクトルの符号ベクトルの集まり $\sigma(V)$ は，有向マトロイドになる．

公理（OM1）と（OM2）が成り立つことは，自明である．公理（OM3）と（OM4）は，V が任意の線形結合について閉じていることから簡単に導かれる．つまり，公理（OM3）は

(V3) 任意のベクトル $x, x' \in V$ と十分小さな $\varepsilon>0$ に対して，$x+\varepsilon x' \in V$;

そして，公理（OM4）は，

(V4) 任意のベクトル $x,\ x' \in V$ と $x_f>0$, $x'_f<0$ なる要素 f に対して，$|x'_f|\,x+|x_f|\,x' \in V$;

という性質に対応している．

線形部分空間から得られる有向マトロイドは，**線形**マトロイドと呼ばれる．非線形有向マトロイドについては，いろいろな興味深い構成法[4, 9]が研究されているが，ここでは説明は省く．また有向マトロイドは，球面上に埋め込まれた複数個の超球面を使って位相的に表現されることが知られているが[8, 13]，この表現は定理やアルゴリズムを解釈するうえできわめて重要である．

6. 有向マトロイド計画

F を有限集合 E 上の有向マトロイドとし，f と g を固定された E の2つの要素とする．g 成分が正であるベクトルの集合

$$A=\{X \in F: X_g=+\}$$

を**アフィン空間**と呼び，g 成分が零である集合

$$A^{\infty}=\{X \in F: X_g=0\}$$

を**無限空間**または**方向空間**と呼ぶ．アフィン空間に含まれるベクトルは，単に**ベクトル**または**点**と呼び，方向空間に含まれるベクトルは，**方向ベクトル**と呼ぶことにする．任意の集合 $F \subseteq E' \equiv E-\{f,\ g\}$ に対して，ベクトルの集合

$$P(F)=\{X \in A: X_j \geqq 0 \ \ \forall j \in F\}$$

を**多面体**と定義する．

いま，P を多面体としよう．方向ベクトル Z が P 内の点 X からの**実行可能方向**であるとは，X と Z

の合成がまたPに含まれる，つまり，$X \circ Z \in P$となるときに言う．P内の点Xは，$Z_f>0$($Z_f<0$)なる実行可能方向$Z \in A^\infty$をもたないとき，Pにおいて**fを最大化する(最小化する)**といわれる．

有向マトロイド計画問題(OPと以下略す)とは

(5) $P=(F,\ g,\ f)$：

多面体$P=P(E')$においてfを最大化する点Xを求めよ；

という問題である．OP (5) は，$P \neq \phi$のとき**実行可能**と呼ばれる．また，実行可能でかつ，$Z_j \geqq 0$ ($j \in E'$)，$Z_f>0$なる実行可能方向$Z \in A^\infty$が存在するとき，OPは**非有界**であると呼ばれる．

$LP(3)$は，有向マトロイド上の問題(5)の特殊な場合であると考えられる．つまり，OP(5)において，$E=\{0, 1, \cdots, m+n, m+n+1\}$とし，$F=\sigma(V)$と置けば，

(a) 多面体内の各点Xに対して，$X=\sigma(x)$を満たすLPの実行可能解xが存在する．逆に，LPの実行可能解xに対し，$\sigma(x)$はOPの実行可能解である；

(b) OPが非有界であることと，LPが非有界であることは同値である；

(c) (a)における実行可能解の対応において，解の最適性が保たれる；

以上のことから，線形の有向マトロイド計画OP(5)とLP(3)とは(数学的に)等価な問題となる．

7. 有向マトロイド計画における基本定理

有向マトロイド上でOPのような問題を考えることの意味は何であろうか．その1つの解答が，LPの基本定理を拡張したOPの基本定理である：

(OPの基本定理) [3]

実行可能で有界なOPは最適解をもつ．

この定理からLPにおける基本定理は実ベクトル空間のごく限られた性質から導かれることがわかるのである．

多くの定理の証明がそうであるように，この定理の証明は帰納法を使った初等的な証明とアルゴリズムを使った構成的証明の2通りにわかれる．

まず，初等的な証明のアイデアを説明しよう．実は，この証明がOPを解くアルゴリズムを発見するために役立つのである．証明はEの要素数$|E|$に関する帰納法で行なわれる．有向マトロイドのマイナーの概念がそのために必要である．Eの各要素hに対して，2つの**マイナー**

$F \setminus h=\{X \setminus h : X \in F\}$

$F/h=\{X \setminus h : X \in F,\ X_h=0\}$

を定める．ここで，$X \setminus h$はXからh成分を除いた部分ベクトルである．どちらの集合も，$E-h$上の有向マトロイドになることが簡単にわかる．

特に，Fが線形のときは，これらは線形性を保つオペレーションになっている．たとえば，Fが行列Aの行空間$\{y : y=wA\}$から得られる線形有向マトロイドの場合は，$F \setminus h$の操作が行列Aのh列の削除に対応し，F/hがAのh列を単位ベクトルとするような行(ピボット)演算後に，その列と，その列に1を含む行を削除することに対応している．一方，Fが行列Aの核空間$\{x : Ax=0\}$に対応している時は，$F \setminus h$とF/hの操作は，行列では前者の場合の逆になる．

マイナーを使って，有向マトロイド計画問題(5)のマイナー(子問題)$P \setminus h$とP/hを

$P \setminus h\ (F \setminus h,\ g,\ f)$

$P/h\ (F/h,\ g,\ f)$

によって定義する ($h \in E-\{f, g\}$)．線形計画問題に限ると，$P \setminus h$は元問題からインデックスhに対応する不等式条件を無視(削除)した問題，P/hは対応する不等式条件を等式条件に変えた問題になっていることが簡単にわかる．この解釈から推測がつくとおり，

(a) 問題$P \setminus h$が実行不可能ならば，元問題Pも実行不可能；

(b) 問題P/hが非有界ならば元問題Pも非有界である；

が自明に成り立つ．よって，次の命題が基本定理の帰納法証明のキーポイントとなる：

表 1

		$P\diagdown h$ OPT	$P\diagdown h$ UB
P/h	OPT	OPT	OPTまたはUB
P/h	INF	OPTまたはINF	INFまたはUB

（補題A）[9]

任意の $h\in E-\{f-g\}$ に対し，P の部分問題$P\diagdown h$と P/hに対する前提条件の４つの組合せについて元問題P の状態が**表 1** のように決定される．ただし,OPT, UB, INFはそれぞれ最適解の存在，非有界，実行不可能を意味する．

補題Aは，有向マトロイドの公理から簡単に導かれる．４つの場合それぞれについて，背理法で証明を試みていただきたい．ここでは,LPの場合に限定して，その意味するところを解釈してみよう．たとえば，子問題$P\diagdown h$ と P/hを解いて,最適解 x' と x'' を得たとする．補題から，元問題P にも最適解が存在することがわかる．さらに，最適解 x' と x'' のいずれかが P の最適解になっていることも簡単に証明される(**図 4** 参照)．

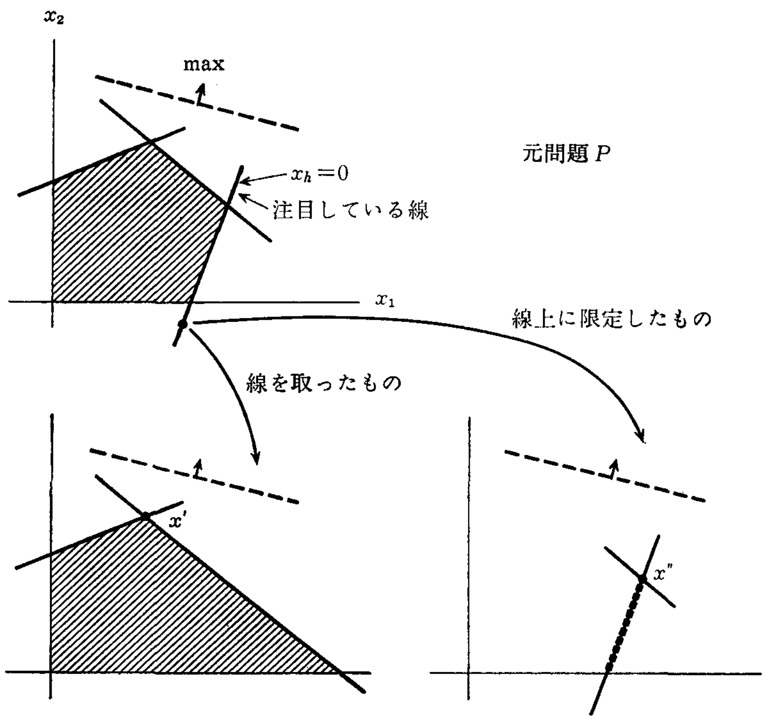
「OP の解は２つの子問題 $P\diagdown h$ と P/hのどちらかに引き継がれる」というのが補題Aの本質的な主張であるが，このことを１歩進めて考えると $2^{(d-2)}$個の自明な(制約式を持たない)LPを解けば元問題が解けるという事実が導かれる．

8. 基底解の概念

LP における基底の概念は，シンプレックス法などのピボット法を考える上で基本的なものである．有向マトロイド上では，この概念が自然に拡張される．一般に，有向マトロイドの**基底**とは，条件：

$$X\in F,\ X_j=0\ (\forall j\in N)\Rightarrow X=0$$

を満足する E の極小の部分集合Nのことである．基底 N と各 $s\in N$に対し，



子問題 $P\backslash h$　　子問題 P/h

図 4　ＯＰの２つの子問題への分解

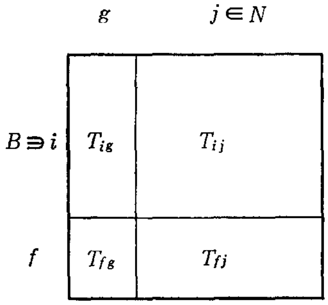


図 5　OPの辞書

$$T_j=0\quad \forall j\in N-s,\ T_s=+$$

を満足する符号ベクトル$T\in F$が一意に定まることが知られている．この符号ベクトルを$T=T(N;s)$と書く．

有向マトロイド計画$P=(F,\ g,\ f)$において，$g\in N$, $f\notin N$なる基底Nと各$s\in N$に対し，符号ベクトル$T(N;s)$の$B\equiv E-N$の部分を並べて作った行列(**図 5**参照)をOPの**辞書**と呼ぶ．ただし，$T_{ij}=T(N;j)_i$である．

2節で紹介した，Terlakyのアルゴリズムは線形計画問題に限定して記述したが，OP に対してもまったく同様に記述できることは明らかであろう．以下の補題は，このアルゴリズムの収束性の証明において本質的な役割を果たすものである．

（補題B） 与えられたOPと要素$h\in E-\{f,\ g\}$について，**図 6**のような4つの辞書を考える．このとき，次の命題が成り立つ：

(a)　D1 と D2 が存在すれば，$\alpha=\ominus$or $\beta=\oplus$;

(b)　D1 と D4 が存在すれば，$\alpha=\ominus$or $\delta=\oplus$;

(c)　D2 と D3 が存在すれば，$\beta=\oplus$or $\gamma=\ominus$;

(d)　D3 と D4 が存在すれば，$\gamma=\ominus$or $\delta=\oplus$.

実は，Terlaky の方法ばかりではなく，Bland の最小添字規則や2節で触れた多くの組合せ的アルゴリズムについても，その収束証明の本質的な部分が補題Bの証明に帰着することが示される．

紙面の制約上，有向マトロイド計画の双対性については，あまり触れることができなかった．LP の双対理論は大変美しいが，OP 上では，さらに一層エレガントに展開される．OP上の双対定理は，上の補題を使って導かれる．詳しくは[3, 9]を参照されたい．

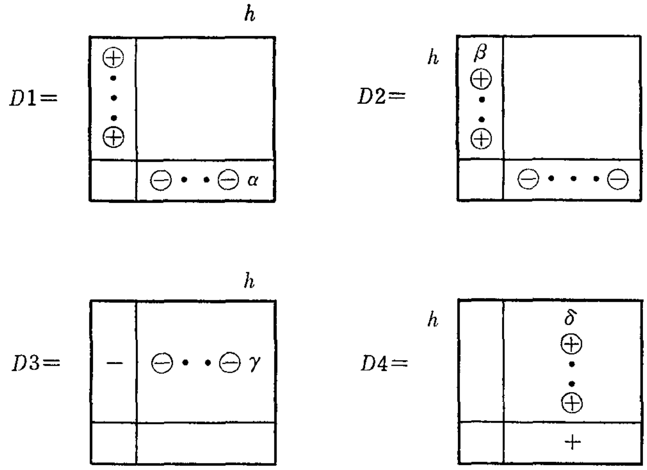


図 6

Terlaky のアルゴリズムの理論的考察［15］と計算実験による改訂シンプレックス法との興味深い比較［23］が行なわれていることを付記しておこう．

9. おわりに

本稿では，線形計画法の組合せ論的研究の最近の成果について紹介した．もう研究しつくされたと考えられがちな線形計画法にも，まだまだ未解決の問題は多い．多項式オーダーのピボット法の発見も，その中の大きな問題である．これらの問題の解決のためには，従来からのアプローチから少しはなれて，新しい視点から問題を眺めることも必要であろう．有向マトロイドの研究や，有向マトロイドの抽象化と考えられるアサイクロイドの研究[19]は，その1つの試みなのである．現在進められている理論的研究[11, 16]の積み重ねが，将来に大きな成果を生み出すことを期待したい．

参考文献

[1] Balinski, M. L.: Notes on a constructive approach to linear programming. in *Mathe-*

matics of the Decision Sciences, Part 1 (G. B. Dantzig and A. F. Veinott, Eds.), 1968, 38-64.

[2] Bland, R. G.: New finite pivot rules for the simplex method. *Math. Oper. Res.* 2 (1977), 103-107.

[3] Bland, R. G.: A combinatorial abstraction of linear programming. *J. Combin. Theory, Ser. B* 23 (1977), 33-57.

[4] Bland, R. G. and Las Vergnas, M.: Orientability of matroids. *J. Combin. Theory, Ser. B* 24 (1978), 94-123.

[5] Chvatal, V.: *Linear Programming*. W. H. Freeman and Company, 1983.

[6] Clausen, J. and Terlaky, T.: A note on the Edmonds-Fukuda rule for oriented matroids. preprint (1986).

[7] Dantzig, G. B.: *Linear Programming and Extensions*. Princeton University Press, 1963.

[8] Folkman, J. and Lawrence, J.: Oriented matroids. *J. Combin. Theory, Ser. B* 25 (1978), 199-236.

[9] Fukuda, K.: Oriented Matroid Programming. Ph.D. Thesis, University of Waterloo, (1982).

[10] 福田公明：有向マトロイドと線形計画．日本OR学会第15回シンポジウム『離散システムとその応用』論文集，1986.

[11] K. Handa: A characterization of oriented matroids in terms of topes. Master Thesis, Waseda University, (1986).

[12] Jensen, D.: Coloring and duality: combinatorial augmentation methods. Ph. D.Thesis, School of OR and IE, Cornell University, (1985).

[13] Mandel,A.: Topology of oriented matroids. Ph. D. Thesis, University of Waterloo, (1982).

[14] Rockafeller, R. T.: The elementary vectores of a subspace of R^n. in *Combinatorial Mathematics and Its Applications* (R. C. Bose and T. A. Dowling, Eds.), (1969).

[15] Roos, C.: On Terlaky paths in the umbrella graph of a linear programming problem. Reports of the Dept. of Math. and Inf., No. 85-12,Delft University of Technology,(1985).

[16] Tamura, A.: Painting lemmas and combinatorial abstractions. Master Thesis, Tokyo, Institute of Technology, (1986).

[17] Terlaky, T.: A finite criss-cross method for oriented matroids. *J. Combin. Theory, Ser. B*, to appear.

[18] Todd, M.: Linear and quadratic programming in oriented matroids. *J. Combin. Theory, Ser. B* 39 (1985), 105-133.

[19] Tomizawa, N.: Theory of acycloid and holometry. Memoir of the Research Institute of Mathematical Sciences of Kyoto 534(1984), 91-138.

[20] 刀根薫：数理計画法．朝倉書店 (1978).

[21] Tucker, A. W.: Combinatorial theory underlying linear programs. in *Recent Advances in Mathematical Programming* (R. F. Graves and P. Wolfe, Eds), 1963, 1-16.

[22] Wang, Z.: A finite conformal-elimination-free algorithm for oriented matroid programming. Dept. of Statistics & Operations Research, Fudan University, (1985).

[23] 渡辺祐貴：線形計画法における自己双対最小添字法について．卒業論文，東京工業大学，(1986).

次 号 予 告

特集　雪

積雪災害の現状と問題点　青山　道雄（新潟大学）
札幌市の総合雪対策について
広畑　民雄（札幌市役所）
「北のまちづくり」への提案
松田　寿夫（北海道庁）
雪害問題とオペレーションズ・リサーチ
中峠　哲郎（福井大学）
岩手の雪　石川　明彦（岩手大学）

連載講座

会計計算の図解（2）　中村善太郎（慶応義塾大学）