

三角図表の作図

——筆順のモジュール化——

柳井 浩

1. はじめに

三角図表は使いなれると便利なものである。薬品の混合比、気・液・固3相の平衡状態の表示など、化学の分野では広く実用に使われてきた。ORでも、線形計画法の分野で最近話題になっている、Karmarkarの方法の説明など理論面のほか、製造工程における進捗管理など実用面でも多少は使われている。……もっと多く使われてもよい図表だと思う。

和が一定値になる非負の3変数 x, y, z がつくる集合は、3次元直交座標空間では、図1に示すように、1つの正三角形になる。これを紙の上に置いたものがすなわち三角図表である。

さて、この三角図表のグラフ用紙をペン書き式プロッタを用いて書くときの合理的な筆順は如何というのが本稿で取り扱う問題である。

2. 合理性とその要因

合理性の総合的尺度としては、作図の所要時間を採用するのが妥当と考える。実際の機械では、できあがりの図の品質は普通よく管理されていて比較の対象にならないからである。所要時間を短縮する要因としては次の3項目が主要である。

① ペンの総移動距離が短いこと

やない ひろし 慶応義塾大学 管理工学科

〒223 横浜市港北区日吉3-14-1

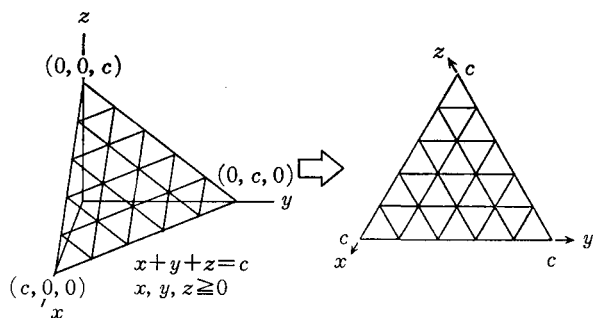


図1 三角図表

② 筆順を構成する線分の本数が少ないこと

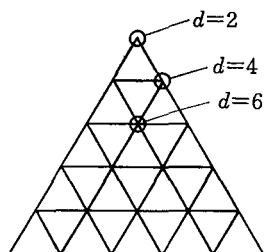
③ 筆順がモジュール化されていること

これらの各要因が所要時間の短縮にどのように寄与するのかは、機種によって異なるから、これらをあらかじめ総合することは避け、代替案に即して考えることにする。各要因について、少々検討しておこう。

① ペンの総移動距離が短いこと

描くべき図形そのものはすでに与えられているのだから、比較の対象になるのは、空送りである。つまり、ペン先を紙につけずに移動する距離が問題になる。空送りがゼロという筆順は、いわゆる一筆書きに相当するが、これは図形によって存在するものとししないものがある。幸い、三角図表のグラフ用紙の場合には、一筆書きの存在が確かめられる。図2に示すように各結節点に集まる枝の数 (local degree) がどこでも偶数だからである (Euler の定理)。したがって、一筆書きが筆順設計の1つの努力目標になる。

図 2 Local Degree



② 筆順を構成する線分の本数が少ないこと
多くのペン書き式プロッタでは、始点と終点を与えてこれらを結ぶ線分を描くようになっている。だから、線分の長さにはかかわらない、なにがしかの時間が、線分を1本描くたびに必要になる。このことは、空送りの場合にも同様である。したがって、空送りを含めた線分の本数が所要時間に大きく影響する所となる。

③ 筆順がモジュール化されていること
いいかえれば、筆順の大部分がおなじパターンを、大きさをかえながら、くりかえし描くようになっていることである。こうなっていれば、プロッタを駆動するプログラムも、くりかえしの部分がまとめられて単純なものになり、計算の所要時間も短縮される。

3. 筆順の代替案

上記の3要因を考慮しつつ、図3に示す3つの筆順を代替案として検討する。

筆順 (i)

これは、通常人が描くときの筆順である。平行に移動させるだけの手順がくりかえされている。手作業の場合、定規を回転させて方向を定めることが手間のいることなので、この筆順がかなりの合理性をもつのであろうが、機械の場合には別に評価されなければならない。しかし、例外の部分なくよくモジュール化されているものの、一筆書きではなく、空送りの部分もかなりある。

筆順 (ii)

これは、一筆書きの一例ではあるが、線分の本数がきわめて多い。しかし、右上の一辺をのぞいてよくモジュール化されている。

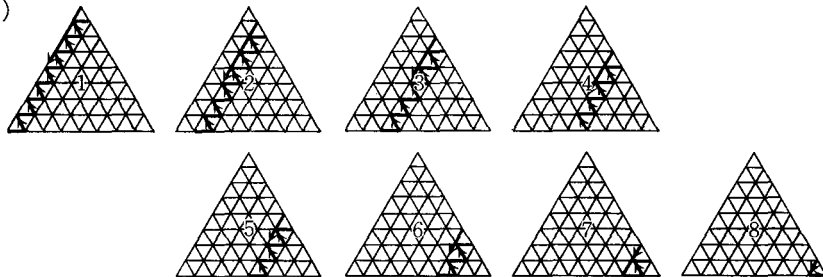
筆順 (iii)

これも、一筆書きの一例である。線分の本数は少なく、大部分モジュール化されてはいるものの、多少の乱れがある。図上1と記された部分は2以下とはまったく異なるパターンである。ま

筆順 (i)



筆順 (ii)



筆順 (iii)



図 3 筆順3種

た、2も3以下とは多少異なる。実は、2の場合、3以下と手順をたどっても描かれる図形は同じものなのだが、同じ線分をなぞることになる。同じ線分をなぞれば、ペンの移動距離がそれだけ長くなる上に、普通のペン書き式プロッタでは、なぞると線が太くなってしまう。だから、2の部分は、プロッタを駆動するプログラムにおいても、例外として処理するようにしておかなければならない。

4. 筆順の比較

格子の数を m とすると、ペンの総移動距離(L_m^s)および構成する線分の本数(N_m)を表1に示す。総移動距離については、三角図表全体の三角形の一边を単位とするもの(L_m^L)と、各格子の一边の長さを単位とするもの(L_m^s)が、併記してある。

表1をみると、移動距離についていえば、筆順(i)のそれが、他より大きい。距離の単位を三角図表の一边とすると、3という値であるから、それほど問題にはならない。

これに対し、線分の本数についてみれば、筆順(ii)のそれが断然大きい。筆順(i)および(ii)のそれが格子の数 m の1次式であるのに対し、筆順(ii)の本

表1 各筆順の諸元

筆 順	L_m^s	総移動距離	L_m^L	線分の本数 N_m
	距離の単位 = 格子の 1 辺		距離の単位 = 三角図表の 1 辺	
(i)	$3 \cdot \frac{m(m+3)}{2}$	$\{3m\}$	$\frac{3(m+3)}{2}, \{3\}$	$6m, \{3m\}$
(ii)	$3 \cdot \frac{m(m+1)}{2}$	$\{0\}$	$\frac{3(m+1)}{2}, \{0\}$	$\sum_{i=1}^m 2i = m(m+1) \{0\}$
(iii)	$3 \cdot \frac{m(m+1)}{2}$	$\{0\}$	$\frac{3(m+1)}{2}, \{0\}$	$7\left(\frac{m}{2}-1\right)+3+4=\frac{7m}{2}, \{0\}$ $m: \text{偶数}$ $7\left(\frac{m-1}{2}\right)+3=\frac{7m-1}{2}, \{0\}$ $m: \text{奇数}$

{ }……うち空送り分

数は m の2次式である。だから、線分の本数が少しでも問題になるような機種のプロッタの場合には、筆順(ii)の所要時間は格子の数の増加とともにきわめて大きくなるから、実用には適さない。

筆順(iii)の場合線分の本数は $7m/2$ (m : 偶数) $(7m-1)/2$ (m : 奇数) であるが、これは次のような意味で線分の本数として到達しうる最小値である。

三角図表のグラフ用紙を構成している線分 (三角図表を端から端まで横切っている線分) を使って一筆書きをつくらうとすれば、図4のような形のものしかありえない。このことは、これらの線分の1つの端点が、たとえば $(a, b, 0)$ という座標をもつとき他は $(b, a, 0)$, $(a, 0, b)$, $(b, 0, a)$, $(0, a, b)$ および $(0, b, a)$ という5つ

しかとりえないことからわかる。($a=b$ の場合には、この数はさらに減る)

ところが、これらの形はまさしく筆順(iii)のモジュールでの基本形であり、三角図表のグラフ用紙はこれらを重ね合わせたものである。したがって、三角図表のグラフ用紙全体を描きつくすためには、どのような筆順にしたがうにせよ、結局、このようなモジュールを全部描かなければならない。しかもあるモジュールから別のモジュールに乗り移るためには少なくとも1本の線分

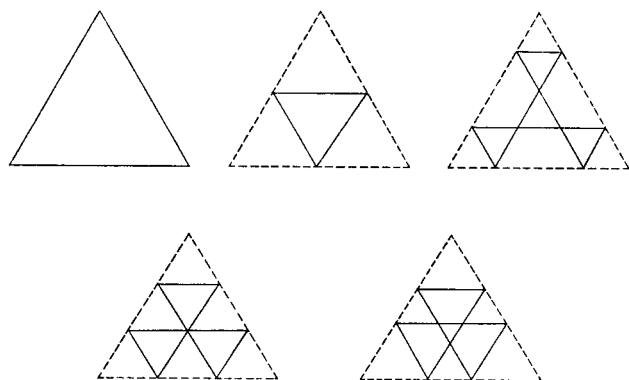


図4 三角図表を構成する線分を端から端まで使ってつくる一筆書き

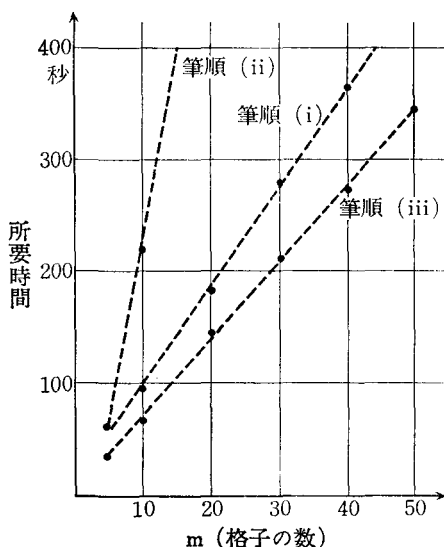


図 5 各筆順の所要時間

```

10 REM"TRIANGULAR COORDINATES"
20 CLEAR
30 DIM X(2),Y(2),Z(2),U(2),U(2)
40 INPUT "MESH=?";M
50 INPUT "SIZE=?";S:T=S/SQR(3)
60 LPRINT CHR$(28);CHR$(37)
70 LPRINT "0";5;"",",-96
80 X(1)=0:Y(1)=0:Z(1)=M
90 X(2)=M:Y(2)=0:Z(2)=0
100 GOSUB 900
120 X(2)=0:Y(2)=M:Z(2)=0:GOSUB 900
130 R=INT(M/2):Q=SGN(M/2-R)
140 X(2)=0:Y(2)=R:Z(2)=M-R:GOSUB 900
150 FOR I=R TO M-1-Q
160 N=2
170 IF I=R THEN N=Q+1
180 FOR J=1 TO N
190 X(2)=Z(1):Y(2)=Y(1):Z(2)=X(1):GOSUB 900
200 X(2)=X(1):Y(2)=Z(1):Z(2)=Y(1):GOSUB 900
210 X(2)=Y(1):Y(2)=X(1):Z(2)=Z(1):GOSUB 900
220 NEXT J
230 Y(2)=Y(1)-1:Z(2)=Z(1)+1:GOSUB 900
240 NEXT I
250 LPRINT "M";0;"",",-20
260 END
900 FOR K=1 TO 2
910 U(K)=.5*S*((-X(K)+Y(K))/M+1)
920 U(K)=.5*T*((-X(K)-Y(K)+2*Z(K))/M+1)
930 NEXT K
940 LPRINT "L";0
950 LPRINT "D";U(1);",",U(1);",",U(2);",",U(2)
960 X(1)=X(2):Y(1)=Y(2):Z(1)=Z(2)
970 RETURN

```

図 6 筆順画のプログラム

を余分に引かなければならない。そこで、その本数を勘定して、もともと三角図表のグラフ用紙を構成している線分の本数 m にこれを加えれば、三角図表のグラフ用紙を一筆書きで描くための線分の本数の下限がえられるはずである。ところが、これが筆順画の線分の本数に一致するのである。

次に、各筆順のモジュール化の程度についていえば、質的には筆順(i), (ii), (iii)の順であることは明らかというものの、これはもとより量的比較の困難なことである。駆動プログラムそのものを比較するのも一法ではあるが、プログラムそのものの巧拙があるので必ずしも公平とはいえない。しかし、筆者がみずから試みたかぎりでは、大差はない。

これらの考察からして、筆順画がいろいろな面からすぐれていることがわかる。

実例 Casio PB 700および Casio FA 10からなるプロッタ・プリンタによって作図を試み、その所要時間を測定してみた。結果を図5に示す。なお、三角図表の大きさはどれも、一辺が80mmのものにしてある。

筆順(i)および画の所要時間は格子の数(m)とともに1次的に増加しており、筆順画のそれが最も緩やかである。

プログラム 十分洗練されたものとはいいがたいが、筆順画による作図のプログラムの一例を示しておく。