

指数法について

一森 哲男

1. はじめに

数理計画法の問題の中でも、とりわけ難しいのが、大規模混合整数計画法の問題である。整数変数だけを含む整数計画法の問題でさえもなかなか解けないのに、実数変数をも含むわけであるから、難しいのが当然といえば当然なのかもしれない。しかしながら、実社会で生じている現実的な問題といえば、ほとんどが大規模混合整数計画法の問題である。そういうことは頭ではわかっているけれども、なかなか手が出ないのも事実である。その理由は、頭に浮かんでくる問題解決の手法が、分枝限定法；劣勾配法；動的計画法と、はじめからあまり期待できそうもないものばかりであるからである。

ところが近年、指数法という手法が出てきて、誰もこんなに速く解けそうにもないと思っていたある大規模混合整数計画法の問題が解けるようになったのである。もう少し具体的に言えば、数千のオーダーの0—1変数と数千のオーダーの実数変数を含む、ある混合整数計画法の問題がスーパーミニコン程度のコンピュータで数10分のオーダーで解けるようになったのである。ここでは手法の紹介が目的であるので、その問題が具体的にどのようなものであるかについては何も述べない。興味のある方は、論文〔1〕を読まれることをお勧めいたします。

2. 指数法について

ベクトル変数 $x=(x_1, \dots, x_n)$ をもつ、 m 個の線形関数 $f_1(x), \dots, f_m(x)$ が与えられた時、これらの一番下側からなる関数

$$\min\{f_1(x), \dots, f_m(x)\} \quad (2.1)$$

を考える。この関数は明らかに、区分線形凹関数である。この関数を x に関して最大化するにはどうすれば良いのであろうか。すぐ考えつくのが劣勾配法である。たしかに関数 (2.1) は微分可能な関数ではないので、劣勾配法を用いるのは自然なことであるが、その計算効率はいさぎよいものとは言えない。

指数法では関数 (2.1) を次の関数で近似する。

$$-\frac{1}{d} \log \left\{ \sum_{j=1}^m y_j e^{-df_j(x)} \right\} \quad (2.2)$$

ここで d は正の値の定数で、 y_j は $\sum_{j=1}^m y_j = 1$ となる正の値の定数である。ただ d も各 y_j も常に一定とするのではなく、(2.1) 式をよりよく近似するために時々値を変えてやる。

関数 (2.1) と関数 (2.2) の関係を直観的に把握するために、次のようなきわめて簡単なものを考えてみる。変数 x はスカラーとして

$$\min\{x-1, \frac{1}{2}x, -x+6\} \quad (2.3)$$

を考える。また、これの近似関数として、 $d=1$, $y_1=0.8$, $y_2=0.1$, $y_3=0.1$ とかかってに決めると、(2.2) の関数は

$$-\log\{0.8e^{-(x-1)} + 0.1e^{(-1/2)x} + 0.1e^{-(-x+6)}\} \quad (2.4)$$

となる。関数 (2.3) と (2.4) をグラフで示すと図

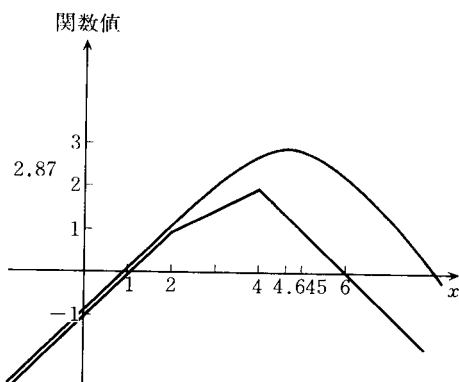


図 2.1 関数(2.3)と(2.4)のグラフ

2.1が得られる。

関数(2.3)の最大値を与える x の値は4で、その時の関数値は2、一方、関数(2.4)の最大値を与える x の値は4.645でその時の関数値は2.87である。 d と y_j の値をかってに決めたが、ある程度関数(2.4)が(2.3)を近似していることがわかる。

さて、理論的に関数(2.2)が関数(2.1)を近似しているかどうかであるが、 $d \rightarrow \infty$ の時、(2.2)式にロピタルの定理を用いれば、(2.2)式は分母分子を d で微分してやると、

$$\lim_{d \rightarrow \infty} \frac{\sum_{j=1}^m y_j f_j(x) \exp\{-df_j(x)\}}{\sum_{j=1}^m y_j \exp\{-df_j(x)\}} \quad (2.5)$$

となる。分母で一番大きな値の項は、 y_j の値などは小さいので無視できるので、 $-f_j(x)$, $j=1, \dots, m$ の一番大きな項、つまり $f_j(x)$, $j=1, \dots, m$ の中で一番小さな項である。他方、分子の方も指数関数に比べて $y_j f_j(x)$ の値などは無視できるので、やはり $\{f_j(x) | 1 \leq j \leq m\}$ の中で最小となる $f_j(x)$ が利いてくる。よって

$$\min\{f_1(x), \dots, f_m(x)\} = f_k(x)$$

とすれば、(2.5)の関数は

$$\lim_{d \rightarrow \infty} \frac{y_k f_k(x) \exp\{-df_k(x)\}}{y_k \exp\{-df_k(x)\}} = f_k(x)$$

となり、 $d \rightarrow \infty$ では、両方の関数(2.1)と(2.2)が一致することがわかる。

ところが實際上、 d の値を無限にしたのでは、

コンピュータでは、オーバーフロー、またはアンダーフローのため、実行することができない。そこで指数法では、 $d \rightarrow \infty$ の代わりに、 y_j , $j=1, \dots, m$ の値を次の公式で改訂する。改訂後の y_j の値を $\bar{y}_j$ と書くと、この公式は

$$\bar{y}_j = \frac{y_j e^{-df_j(x)}}{\sum_{k=1}^m y_k e^{-df_k(x)}} \quad (2.6)$$

$$j=1, \dots, m$$

である。

次に、なぜこのように y_j の値を改訂すれば、関数(2.2)が(2.1)に近づくのかを説明する。

y_j を公式(2.6)でさらに改訂した値を $\bar{y}_j$ とすれば、公式(2.6)を2回用いることにより次式が導かれる。

$$\begin{aligned} \bar{\bar{y}}_j &= \frac{\bar{y}_j e^{-df_j(x)}}{\sum_{k=1}^m \bar{y}_k e^{-df_k(x)}} \\ &= \frac{\{y_j e^{-df_j(x)}\} e^{-df_j(x)}}{\sum_{i=1}^m y_i e^{-df_i(x)}} \\ &= \frac{\sum_{k=1}^m \left\{ \frac{y_k e^{-df_k(x)}}{\sum_{i=1}^m y_i e^{-df_i(x)}} \right\} e^{-df_k(x)}}{\sum_{i=1}^m y_i e^{-df_i(x)}} \\ &= \frac{y_j e^{-2df_j(x)}}{\sum_{k=1}^m y_k e^{-2df_k(x)}} \end{aligned} \quad (2.7)$$

(2.6)式と(2.7)式を比べてみると明らかであるが、何が変わったかという点、 d が $2d$ に変化したことである。つまり公式(2.6)で、 y_j の値を順次改訂していけば、 d の値を大きくしていくことと同じ効果を発揮することになる。ただし、このようにしていけば、 d の値そのものは常に一定であり、 y_j の値も $0 < y_j < 1$ ならば常に $0 < \bar{y}_j < 1$ かつ $\sum_{j=1}^m \bar{y}_j = 1$ となるため、 $d \rightarrow \infty$ とした時のような心配はなく、コンピュータで実行することが可能となる。

以上で関数(2.1)と(2.2)の関係がわかったが、関数(2.2)はどのような形をしているかという点これは凹関数になっている。たとえば図2.1を見てもわかるように、微分可能な凹関数になっている。ただし関数(2.2)が凹関数になっていること

は、あまり自明ではない。要するに、(2.2)のヘッセ行列が、負定値であることを示せば良いだけであるが…。頭の体操にやってみるのも結構面白いものである。

指数法をまとめると次のとおりである。

1. $d, y_j, j=1, \dots, m$ を適当に定める。もちろん $d > 0$ で $0 < y_j < 1$ かつ $\sum_{j=1}^m y_j = 1$ である。
 2. 微分可能な凹関数(2.2)を、 x に関して最大化を行なう。これで一応 x の値は定まったわけである（最大化は非線形計画法の手法を活用する）。
 3. y_j を公式(2.6)を用いて改訂する。この時の(2.6)式の右辺の x の値は、ステップ2で求めた値を用いる。必要ならば d の値をもう少し大きくしてもよい。ステップ2へもどる。
- いつこのアルゴリズムを止めるかは、いろいろ考えられるが、現在得られている x の値で、(2.1)と(2.2)の両関数値の差が、ある範囲内に入れば止める方法が一番良さそうである。

3. 簡単な例題

例題 3.1

$$\min\{1, 2, 3\}$$

を考える。まず、 $d=1, y_1=0.2, y_2=0.3, y_3=0.5$ とすると、公式(2.6)より、新しい y_j は

$$y_1 = \frac{0.2e^{-1}}{0.2e^{-1} + 0.3e^{-2} + 0.5e^{-3}} = 0.529$$

$$y_2 = \frac{0.3e^{-2}}{0.2e^{-1} + 0.3e^{-2} + 0.5e^{-3}} = 0.292$$

$$y_3 = \frac{0.5e^{-3}}{0.2e^{-1} + 0.3e^{-2} + 0.5e^{-3}} = 0.179$$

となる。これをくり返していくと表 3.1 が得られる。

ここでは3回までしか、各 y_j の値を改訂していないが、3回目の数値を見れば、これで十分、 $y_1 \rightarrow 1, y_2, y_3 \rightarrow 0$ に収束することがわかる。

さて、たとえば、3回目の y_1 の値、つまり0.925はいったい何を意味しているのであろうか。その解釈の仕方はいろいろあるであろうが、一般には

表 3.1

	初期値	1 回目	2 回目	3 回目
y_1	0.2	0.529	0.801	0.925
y_2	0.3	0.292	0.163	0.069
y_3	0.5	0.179	0.036	0.006

$\min\{1, 2, 3\} = 1$ となる確率を示していると考えるのが最も自然であろう。同様に、 $y_2=0.069$ は $\min\{1, 2, 3\} = 2$ となる確率で、 $y_3=0.006$ は $\min\{1, 2, 3\} = 3$ となる確率と考える。

さらに各 y_j の収束の速さも、いちじるしいものであることも、なんとなく理解してもらえそうである。

例題 3.2

(2.3)式 $\min\{x-1, \frac{1}{2}x, -x+6\}$ の最大化を考える。(2.4)式で近似して、これを最大化し、その解 $x=4.645$ が得られる。各 y_j の値を(2.6)の公式で改訂すると

$$y_1 = 0.3699$$

$$y_2 = 0.1735$$

$$y_3 = 0.4566$$

となる。次の近似関数は

$$-\log\{0.3699e^{1-x} + 0.1735e^{(-1/2)x} + 0.4566e^{x-6}\} \quad (3.1)$$

となり、これを最大にする x の値は3.605である。各 y_j の値は

$$y_1 = 0.2802$$

$$y_2 = 0.2932$$

$$y_3 = 0.4266$$

となり、ここで $d=2$ とすると、次の近似関数は

$$-\frac{1}{2}\log\{0.2802e^{2(1-x)} + 0.2932e^{-x} + 0.4266e^{2(x-6)}\} \quad (3.2)$$

となる。これを最大にする x の値は3.740となる。同様に

$$y_1 = 0.0915$$

$$y_2 = 0.5450$$

$$y_3 = 0.3635$$

$$d=4$$

表 3.2

	初期値	1 回目	2 回目	3 回目	4 回目
x		4.645	3.605	3.740	3.953
y_1	0.8	0.3699	0.2802	0.0915	
y_2	0.1	0.1735	0.2932	0.5450	
y_3	0.1	0.4566	0.4266	0.3635	
d	1	1	2	4	

で、次の近似関数は

$$-\frac{1}{4}\log\{0.0915e^{4(1-x)}+0.5450e^{-2x}+0.3635e^{4(x-6)}\} \quad (3.3)$$

となり、最大値を与える x は 3.953 となる。

以上の内容をまとめると表 3.2 が得られる。この表より x の値が 4 に近づいていることがわかる。この例では、 d の値を少しずつ大きくしているが、理論的には、先に述べたように d の値を一定のままにしても、 x の値は 4 に収束する。ただ収束を早めるには、 d の値を漸次大きくしていった方がよい。

4. 指数法と線形計画法との関係

先の例 3.1 $\min\{1, 2, 3\}$ をもう一度考えてみる。指数法では、 $y=(y_1, y_2, y_3)$ の値が、表 3.1 より $y^1=(0.529, 0.292, 0.179)$, $y^2=(0.801, 0.163, 0.036)$, $y^3=(0.925, 0.069, 0.006)$ と変化し、その極限は $y^\infty=(1, 0, 0)$ であった。よってこの極限での y^∞ の値を求める問題は、次の線形計画法問題：

$$\begin{aligned} (\text{LP}) \quad & \min_y y_1 + 2y_2 + 3y_3 \\ \text{s.t.} \quad & y_1 + y_2 + y_3 = 1, \\ & y_1, y_2, y_3 \geq 0 \end{aligned}$$

と同値で、 $y^1, y^2, y^3, \dots$ はこの問題の実行可能解となっている。逆の見方をすれば、上記の (LP) が与えられた時、 y_j の改訂公式 (2.6) を用いれば、この (LP) が解けることを意味している。これは今流行りの楕円体法のように、線形計画法の問題を、内点を通して最適解に収束させているところが、なかなか面白い。

5. おわりに

指数法について、きわめて簡単に、またやさしく説明しようとしたために、やや厳密性に欠けるところがあります。またこの手法の解釈は筆者が独自に行なったものであるため、必ずしもこの指数法を考案した人の解釈とは一致するとは限りません。最後に、この指数法の存在および重要性を筆者に直接教えてくださった、広島大学工学部教授青木兼一先生（本学会フェロー）に深く感謝いたします。

参 考 文 献

- [1] D.P. Bertsekas, G.S. Lauer, N.R. Sandell and T.P. Posbergh: Optimal Short-Term Scheduling of Large-Scale Power Systems, IEEE Transactions on Automatic Control, Vol. AC-28, No. 1, pp. 1-11, January 1983

次 号 予 告

特集 鉄鋼と OR

石炭配合計画における混合整数計画法

(MIP)適用について 宮城勇誠, 他

コンピュータによる自動板取りネスティング

吉海達喜, 他

製鋼工場から冷延工場までの一貫

スケジューリング問題 福村 聡

製鋼工場のオンライン物流管制システム

家長吉行, 他

事例研究

原料購買業務への線形計画法の適用

花井宏巳