TTTプロットと理論分布

——パソコン・グラフィックスの活用——

尾崎 俊治・李 新祥

1. はじめに

著者がパソコンを研究室で使うようになって数年になるが，その進歩発展は正に驚異的である．偶然にも，日本と中国で別々に住んでいた著者がはじめて手にしたパソコンはAPPLE II であった．もちろん，現在は8ビットマシンから16ビットマシンに変っている．現在の16ビットのパソコンの能力は10年前の大学の学科共通のミニコンのそれより優れ，オフィスでも自宅でも身近に簡単に使うことができるようになった．

パソコンの計算能力，記憶容量も魅力的であるが，やはりグラフィック機能はそれ以上に魅力的である．ミニコンなどに接続した高価なグラフィック・ディスプレイの代りとして，少々その能力は落ちても数十万円のパソコンのグラフィック・ディスプレイを活用することができるからである．本稿では，パソコンのグラフィック機能を活用した統計解析ソフトウエアを紹介しよう．

統計解析において標本データが与えられているとき，そのデータを理論分布へあてはめる問題は古くから議論されているが，いまだに完全に解決されていない．そこで，本稿では打切りのない完全データに対して，総試験時間統計量（Total Time on Test statistics，以下TTT統計量と略す）をグラフィック画面にプロットして，よく適合した理論分布を決定する方法について論及する．以下では信頼性理論における故障データをもとに話を進めるが，打切りのない完全データならば，どのようなデータでもよい．

2. TTTプロットとTTT変換

寿命分布$F(x)$の完全データのn個の順序統計量を$X_0=0\le X_1\le X_2\le\cdots\le X_n$としよう．平均寿命$\mu=\int_0^\infty \bar{F}(x)dx$が存在すると仮定する．ここで，$\bar{F}(x)=1-F(x)$は信頼度関数である．TTT統計量を

$$T_i=\sum_{j=1}^{i}(n-j+1)(X_j-X_{j-1})\quad(j=1,2,\cdots,n) \tag{1}$$

と定義する．さらに，標準TTT統計量を$U_i=T_i/T_n$ $(i=1,2,\cdots,n)$と定義する．特に，$F(x)$を指数分布と仮定すれば，U_iは一様分布$U(0,1)$にしたがう[2]．縦軸にU_i，横軸に$p_i=i/n$をプロットすれば，これがTTTプロットとよばれる．

さて，$n\to\infty$とすることによって，TTT変換

$$T_i\to H(p)=\int_0^{F^{-1}(p)}\bar{F}(x)dx\quad(0\le p\le 1) \tag{2}$$

が定義される．ここで，$F^{-1}(p)$は逆関数である．さらに，標準TTT変換は

$$\Psi(p)=H(p)/\mu \tag{3}$$

と定義される．明らかに，$F(t)$が指数分布ならば，$\Psi(p)=p$となり，標準TTT変換の曲線は単位正

おさき　しゅんじ，Li Xinxiang　広島大学工学部
〒724　東広島市西条町大字下見

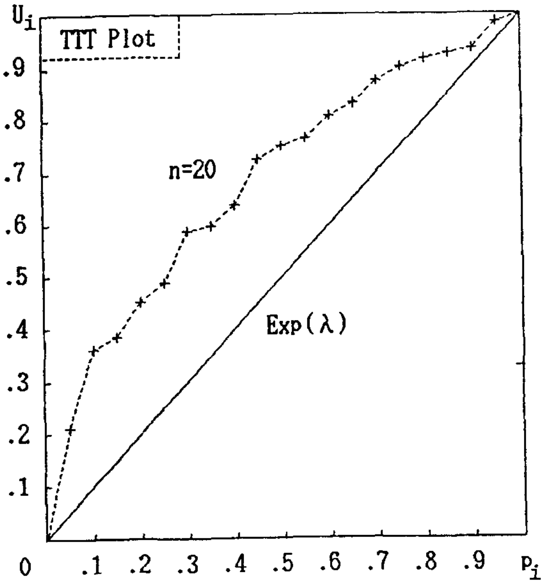

図 1　指数分布の理論的ＴＴＴ曲線と標本の大きさn＝20の標本データのＴＴＴプロット

方形上の対角線である（図１参照）.

エージング[1]と標準TTT変換との関係[2]もよく知られている.

IFR(DFR)$\Leftrightarrow\Psi(p)$は[0, 1]で凸(凹)関数.

IFRA(DFRA)$\Rightarrow\Psi(p)/p$は(0, 1)で減少（増加）関数.

NBUE(NWUE)$\Leftrightarrow\Psi(p)\geq(\leq)p\ (0\leq p\leq 1)$.

上記の関係を用いれば，標準TTT変換を描くことによって，エージングの概念[1]がより理解しやすくなるであろう.

さて，Xをワイブル分布$W(m, \eta)$

$$F(x)=1-\exp\left[-x/\eta)^{m}\right]\ (x\geq 0, \eta\geq 0, m>0) \tag{4}$$

とすれば，

$$\Psi(p)=\frac{1}{\Gamma\left(1+\frac{1}{m}\right)}\int_0^{\left(\ln\frac{1}{1-p}\right)^{1/m}}\bar{F}(y)dy \tag{5}$$

となり，パラメータηと独立である. ここで，$\Gamma(\cdot)$はガンマ関数. 図２はいろいろなmに対するTTTプロットである.

Xを対数正規分布$LN(a, \sigma)$

$$F(x)=\Phi\left(\frac{\ln x-a}{\sigma}\right)\ (x>0, a>0, \sigma>0) \tag{6}$$

とすれば，$y=xe^{-a}$と変換すると，

$$\Psi(p)=e^{-\sigma^2/2}\int_0^{\exp[\Phi^{-1}(p)]}\bar{F}(y)dy \tag{7}$$

（注）I(D) FRA: Increasing (Decreasing) Failure Rate Average
NB(W)UE: New Better (Worse) than Used in Expectation

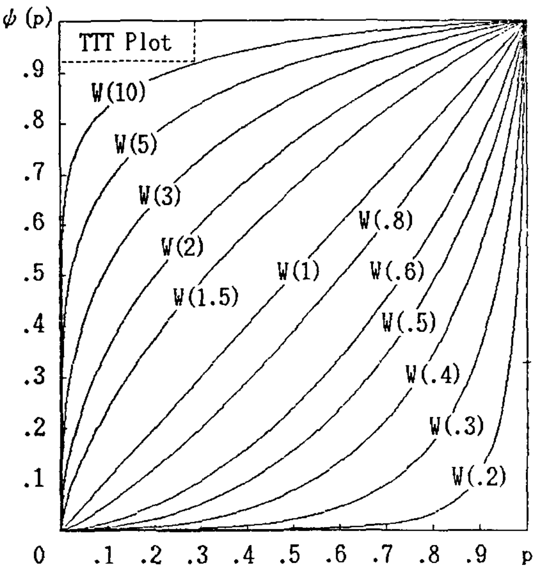

図 2　ワイブル分布$W(m)$の理論的ＴＴＴ曲線

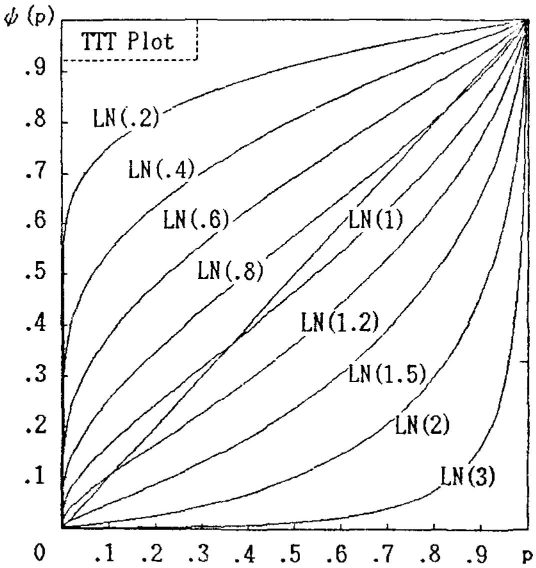

図 3　対数正規分布$LN(\sigma)$の理論的ＴＴＴ曲線

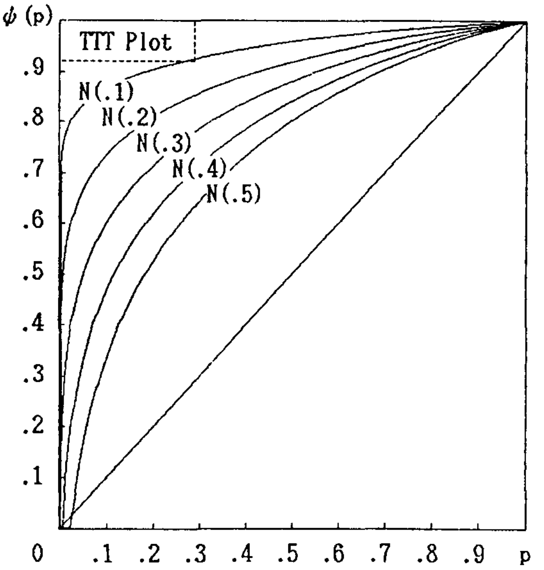

図 4　正規分布$N(\sigma/a)$の理論的ＴＴＴ曲線

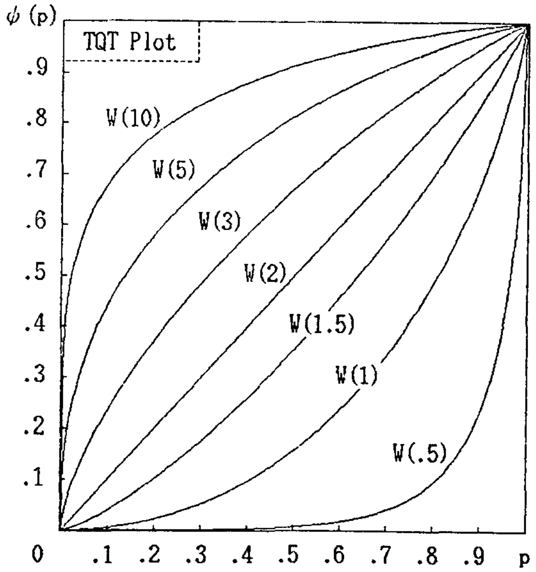

図 5　ワイブル分布 $W(m)$の理論的ＴＱＴ曲線 ($Q=2$)

となり，パラメータ a と独立である．図3はいろいろな σ に対するTTTプロットである．

Xを(片側の切れた)正規分布

$$F(x)=\Phi\left(\frac{x-a}{\sigma}\right) \quad (x\geq 0, a>0, \sigma>0) \qquad (8)$$

とすれば，$y=x/a$ と変換すると，

$$\Psi(p)=\int_0^{1+\frac{\sigma}{a}\Phi^{-1}(p)} \bar{F}(y)dy \qquad (9)$$

となり，a および σ の絶対的な大きさと独立で，相対比率 σ/a の大きさのみの関数となる．図4はいろいろな σ/a に対するTTTプロットである．

これらの事実[3]は理論分布へのあてはめに対して非常に有意義である．すなわち，標本データがどんな理論分布へあてはめるかを考えるとき，適当なm, σ, あるいは σ/a の値だけを定めれば，上記の3理論分布曲線と比較して，どの程度あてはまるかが直観的にわかる．そして，TTTプロットとエージングの関係によって，分布の特徴を直観的にとらえることができる．

経験的に曲線より直線へあてはめて判断するほうが容易である．しかし TTT プロットでは指数分布($m=1$のワイブル分布も含む)を除いて，他の分布は曲線である．たとえばワイブル分布の統計量 $X_i (i=1, 2, \cdots, n)$ について，$Y_i=X_i^Q$ と変換すれば，$Q=m$ のときには指数分布統計量が得られる．Y_iを用いれば目的のワイブル分布は対角線近辺にプロットされる．このようなプロットは TQT(Total Q on Test)プロットとよばれる．図5は $Y=X^2(Q=2)$ の標準TQT変換の曲線である．

3. TTT (TQT) プロットの対話型ソフトウエア

前節で展開したTTT(TQT) プロットおよび変換をグラフィック画面に描くソフトウエアを紹介する．このソフトウエアは IBM 5550 を用いて BASIC で書いたものである．このソフトウエアの流れ図を図6に示す．メニュ方式による対話型ソフトウエアを簡単に紹介する．

a．TTT プロットか TQT プロットを選ぶ．

What kind of plot do you want ?

1. TTT Plot　　2. TQT Plot

Please input the NUMBER ?

b．故障データかワイブル，正規，対数正規分布の乱数データかを選ぶ．

What kind of the input data do you want ?

1. Testing data
2. Simulated Weibull distribution data
3. Simulated Normal distribution data
4. Simulated Lognormal distribution data

Input the NUMBER of the data type which you want ?

c. 故障データの場合，新しいデータか既存データか選ぶ.

Testing Data

* * * * * * * * * * * * * * * * * * * *

1. New Data 2. Existing Data

....

Input the NUMBER of the data type, please.

d. 理論分布の乱数データの場合は，それぞれのパラメータを設定する.

ワイブル分布 $W(m)$ の場合

Input the PARAMETER of the Weibull distribution. $m=?$

正規分布 $N(\sigma/a)$ の場合

Input the RATE of σ/a, please. $\sigma/a=?$

対数正規分布 $LN(\sigma)$ の場合

Input the PARAMETER σ, please. $\sigma=?$

さらに，乱数の大きさ n を設定する.

Input the NUMBER of the data which you want. $n=?$

e. 作成した TTT (TQT) プロットを理論分布曲線へあてはめるときの理論分布を選ぶ.

Which theoretical distribution do you want ?

1. Weibull distribution
2. Normal distribution

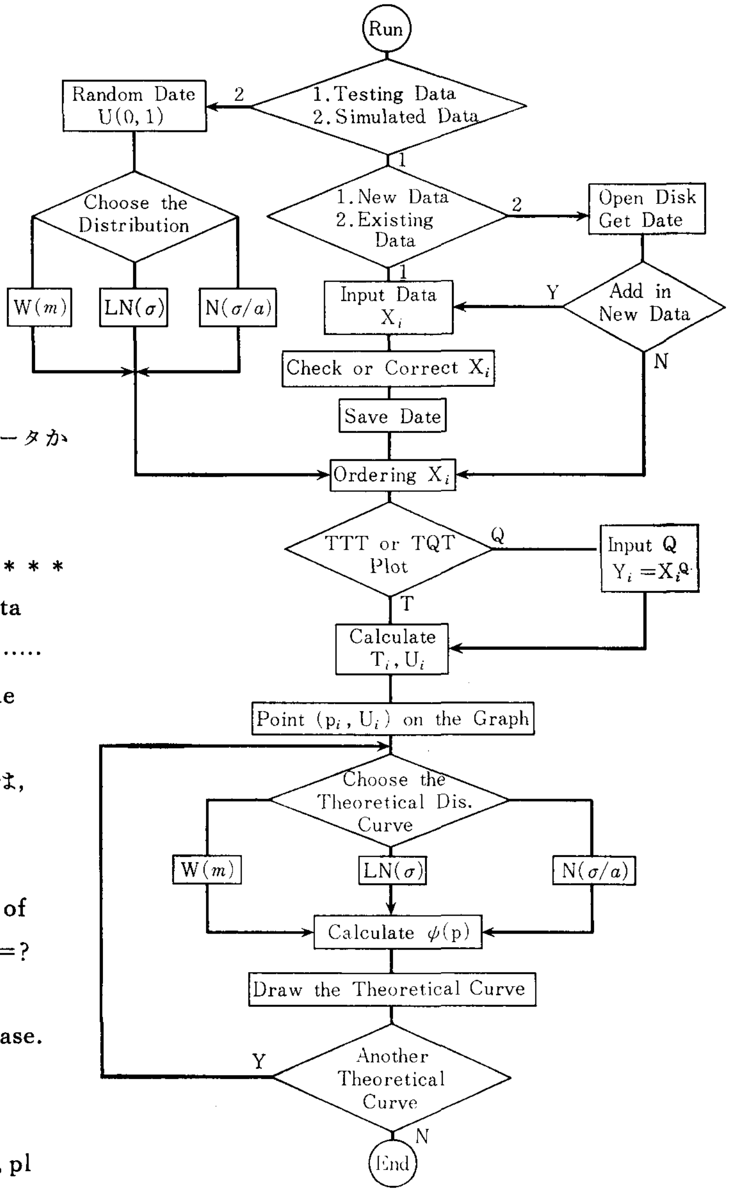

図 6 理論分布へあてはめるプログラムの流れ図

3. Lognormal distribution

Input the NUMBER, please.

さらに，各分布のパラメータを設定する.

ワイブル分布 $W(m)$ の場合

Weibull Distribution

....

The parameter $m=?$

正規分布 $N(\sigma/a)$ の場合

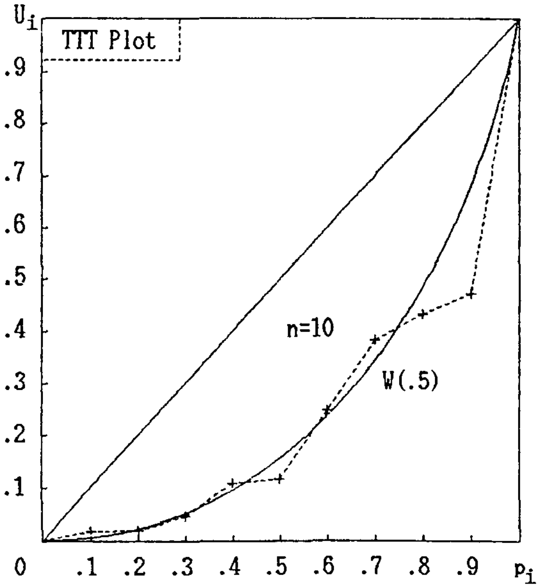

図 7　ＴＴＴプロットを用いた理論分布へあてはめ例

Normal Distribution

....

The rate of σ/a=?

対数正規分布 $LN(\sigma)$の場合

Lognormal Distribution

....

The parameter σ=?

f．理論分布曲線へうまくあてはめるために，別の分布曲線を描く．

Do you try another theoretical curve (y/n) ?

4. 例

表1に示した故障データを理論分布へあてはめよう．前節のソフトウエアを用いると，m=0.5のワイブルであてはめることができる(図7参照)．そこで，$Y_i=X_i^Q$ (Q=0.5) と変換して，TQTプロットを画面に出すと，m=0.5のワイブル分布にしたがうことがよくわかる．

5. むすび

パソコンの対話型ソフトウエアとしては，メニュ方式とコマンド方式に大別することができる．慣れないうちは，メニュ方式が馴染む．しかし，慣れるにしたがって，メニュ方式は少々めんどうになってくる．初心者にはメニュ方式，熟練者にはコマンド方式ということになるが，熟練者もしばらく使わないとコマンドを忘れて困るのも事実である．中年および「実年」にとっては，いろいろ異なるソフトウエアのコマンドをすべて覚えて，それぞれにマニュアルなしに操作するのは至難のわざである(著者(尾崎)は学生に聞くことにしている)．

表 1

i	X_i
1	1.207
2	1.311
3	3.648
4	9.699
5	10.69
6	28.79
7	52.17
8	63.26
9	77.18
10	440.9

本稿で示したソフトウエアについても，いくつかのモジュールはすでにある．他のソフトウエアのモジュールを再使用することが可能と思われる．再使用性(reusability)を含めて，パソコンレベルのソフトウエア工学も大学で教育すべきであると著者は思っている．

本論にもどると，TTT(TQT)プロットはどの分布にあてはまるかを決定するには，大変有効な方法である．しかし，そのパラメータを求めるとなると，必ずしも有効な方法ではない．一度分布を決定したならば，従来からある確率紙[4]を用いてパラメータを推定すればよい．

最後に，TTTプロットの単位正方形は実は正方形でなく長方形になってしまった．これは，グラフィック画面を正方形にしても，そのハードコピーは長方形になるからである．ここではグラフィック画面を優先した．

参考文献

[1] Barlow, R. E. &. Proschan, F. :*Statistical Theory of Reliability and Life Testing-Probability Models*. Holt, Rinehart and Winson, New York, 1975.

[2] Bergman, B. &. Klefsjö, B. :"The Total Time on Test Concept and Its Use in Reliability Theory," *Operations Res.*, Vol.32, pp.596-606 (1984).

[3] 李新祥・尾崎俊治：ＴＴＴプロットを用いて故障データを理論分布へあてはめる方法．未発表論文(1985)．

[4] 塩見・三膋・斎藤・益田：信頼性における確率紙のつかい方．日科技連出版社，1984．