

広告費の最適配分

河原 靖

1. はじめに

企業が、マーケティング活動の一環として、広告活動を実施するに当り、その基準となるべき広告計画の立案にさいして、広告期間、広告予算の決定にひきつづき、広告予算をどのように使っていくかについて、つまり、広告予算の配分について検討しなければならない。この配分を大別すれば、地域別配分、期別(月別)配分、商品別配分、媒体別配分となるであろう。これらの配分を決めるための方法は、企業により異なり、多種多様であるが、それらの狙いとするところはいずれも同じで、限られた広告予算をできるだけ有効に使うために、企業全体からみて、バランスのとれた配分を図ることである。

このような広告費配分問題に対して、広告活動の状況を表わす数学的モデルをもとに、数学的手段を用いて解決するというような数理的方法も種々研究されており(文献[4]参照)、その中に、ゲーム理論を適用した研究がある。すなわち、競合する2つの企業を想定して作られた、

- i) 市場が n カ所の地域に分けられる場合の地域別広告費配分モデル(文献[1], [2])
- ii) 広告期間が n 期に分けられる場合の期別広告費配分モデル(文献[3])

に対して、それぞれゲーム理論的最適解(2つの企業にとって最も妥当と考えられる広告費の配分の仕方)が得られている。これらの解は、広告費配分の実務の上で、少なからず参考になると思われるので、以下これらについて概説する。

2. 地域別配分

同種の商品を販売する2つの競合企業 A , B が n 個の地域に分けられるある市場を占有し、それぞれ A , B の額の広告予算が与えられ、地域別配分を行なおうとしている。そして、第 i 番目の地域における広告によって影響される商品の販売可能量を s_i , 第 i 番目の地域に対する A , B の広告費の配分額を、それぞれ a_i (≥ 0), b_i (≥ 0) とすると、この市場における全販売可能量 S は、

$$(2.1) \quad S = \sum_{i=1}^n s_i$$

であり、また、

$$(2.2) \quad A = \sum_{i=1}^n a_i, \quad B = \sum_{i=1}^n b_i$$

である。いま、 s_i は既知の定数とし、 s_i のうち、どれだけが A の販売量になり、どれだけが B の販売量になるかは、その地域に配分した広告費に比例して定まるものとすれば、第 i 番目の地域における A , B の販売量は、それぞれ $\{a_i/(a_i+b_i)\}s_i$, $\{b_i/(a_i+b_i)\}s_i$ となるから、この市場での A , B の全販売量 S_A, S_B は、

かわら やすし 日本工学院専門学校

〒144 大田区西蒲田 5-23-22

$$(2.3) \quad \begin{cases} S_A = \sum_{i=1}^n \left(\frac{a_i}{a_i + b_i} \right) s_i \\ S_B = \sum_{i=1}^n \left(\frac{b_i}{a_i + b_i} \right) s_i \end{cases}$$

となる。ここで、 A, B の広告費配分をそれぞれ $A=(a_1, a_2, \dots, a_n), B=(b_1, b_2, \dots, b_n)$ とし、 $M(A, B)=S_A-S_B$ とすれば、

$$(2.4) \quad M(A, B) = \sum_{i=1}^n \left(\frac{a_i - b_i}{a_i + b_i} \right) s_i$$

と表わされる。当然 A はこの $M(A, B)$ をできるだけ大きくしようと試みるであろうし、 B は逆にこれをできるだけ小さくするように試みるであろう。そこでこの広告費配分問題をゲーム理論的に表現すれば次のようになる。すなわちこの広告費配分問題は、 $M(A, B)$ を A の利得とし、 $-M(A, B)$ を B の利得として、 A は $M(A, B)$ を最大に、 B はこれを最小にするように試みる 2 人零和ゲーム (両者の利得の和が零) である。

もし、何らかの事情で、 A が B の配分 B を知ることができれば、 A は $M(A, B)$ を最大にする最良の配分 A を求めようとするであろう。このような場合、どんな B に対しても適用できる一般的解法はあるが、特別な B に対しては、ラグランジュの未定乗数法がそのまま適用できる。すなわち、

$$(2.5) \quad F(A, B) = M(A, B) + \lambda \left(\sum_{i=1}^n a_i - A \right) \\ = \sum_{i=1}^n \left(\frac{a_i - b_i}{a_i + b_i} \right) s_i + \lambda \left(\sum_{i=1}^n a_i - A \right)$$

とおき、これを $a_i (i=1, 2, \dots, n)$ と λ でそれぞれ偏微分して得られる連立方程式

$$\begin{cases} \frac{2s_i b_i}{(a_i + b_i)^2} + \lambda = 0 \quad (i=1, 2, \dots, n) \\ \sum_{i=1}^n a_i - A = 0 \end{cases}$$

を解いた解

$$(2.6) \quad a_i = (A+B) \frac{\sqrt{s_i b_i}}{\sum_{i=1}^n \sqrt{s_i b_i}} - b_i \quad (i=1, 2, \dots, n)$$

を、ある B に対して用いたとき、 i のすべてについて、 $a_i \geq 0$ となっていれば、この B に対して最良の配分 A が定まったことになる。

しかし、(2.6)を用いても、 B によっては、最良の配分 A が定まらない場合もあり、このときには、一般的解法によらなければならない (この解法は簡単でないのでここではその説明を省略する)。

ここで、販売可能量に比例させる A, B の配分を、それぞれ $A^*=(a_1^*, a_2^*, \dots, a_n^*) [a_i^*=(s_i/S) A (i=1, 2, \dots, n)], B^*=(b_1^*, b_2^*, \dots, b_n^*) [b_i^*=(s_i/S) B (i=1, 2, \dots, n)]$ と表わしたとき、 B の配分が B^* であって、これを A が知れば、 A は $M(A, B^*)$ を最大にする配分を (2.6) から定めることができて、 A^* をとるようになる。すなわち、

$$(2.7) \quad \max_A M(A, B^*) = M(A^*, B^*) \\ = \{(A-B)/(A+B)\} S$$

であり、この場合の A の利得は、 $\{(A-B)/(A+B)\} S$ となる。これとは異なり、 B が B^* でない B' をとり、それを A が知れば、 A は $M(A, B')$ を最大にする配分 A' を、(2.6) かまたは一般的解法によって定めて、利得を $\{(A-B)/(A+B)\} S$ より大にしてしまう [後出の (2.8) より $M(A', B') \geq M(A^*, B') > M(A^*, B^*)$]。 A の利得の増加は B の利得の減少を意味するから、 B にとっては、 B^* の場合より不利になる。よって、 B の配分が A に知られている場合には、 B はその配分を B^* にして、 A の利得を最大限 $\{(A-B)/(A+B)\} S$ に押さえるのが最良の方策であろう。

実際には B の配分が A に知られることはないであろうから、必ずしも配分を B^* にしなくてもよい。つまり B が配分を B^* にしなくても A が下手な対応をしてくれば A の利得は上で考えたような値 $\{(A-B)/(A+B)\} S$ より小になって B にとって有利なこともある。しかしそれでも A が最良の配分で対応してくると警戒してしまうと、 B^* でない配分では、上で述べたような損が気になってやはり B^* が安全な配分であることになる。

今度は、 A と B の立場を上の場合と逆にして、

同様な過程をたどれば、

$$(2.8) \quad \min_B M(A^*, B) = M(A^*, B^*) \\ = \{(A-B)/(A+B)\}S$$

が得られ、上述と同様な根拠から、 A^* が A にとって安全な配分であることになる。

こうして A, B はそれぞれ A^*, B^* をとろうとするが、このとき A, B のうちどちらか一方が相手のこの配分を見越して、別の配分をとって、得をしようとしても、(2.7), (2.8)によって、それは不可能であることがわかり、結局、この配分でもって、一種の平衡状態に落ちつくことになる。

実はこのように A, B が互いに相手が最良の方策をとってくるものと警戒した上での安全な方策で、しかも相手がその方策をとる限り、どちらもその方策からはずれることができないような平衡状態にある方策を、ゲーム理論ではゲームの解といい、これを最適方策とするのである。そして、このときの A の利得をゲームの値という。

よって、上述の2人零和ゲームに対するゲームの解、すなわち A, B の地域別広告費最適配分はそれぞれを $a_i, b_i (i=1, 2, \dots, n)$ で表わせば、

$$(2.9) \quad \begin{cases} a_i^* = \left(\frac{s_i}{S}\right)A & (i=1, 2, \dots, n) \\ b_i^* = \left(\frac{s_i}{S}\right)B & (i=1, 2, \dots, n) \end{cases}$$

であり、ゲームの値は、これを v で表わせば、

$$(2.10) \quad v = \left(\frac{A-B}{A+B}\right)S \text{ である。}$$

3. 販売力を考慮した地域別配分

仮定および記号は、2.の場合と同じとするが、広告費の配分を考えると、各地域の広告によって影響される商品の販売可能量だけでなく、企業 A, B の各地域での販売力をも考慮に入れる。ここに販売力というのは、具体的には、販売商品が消費者の目にふれるチャンスであると考え、その測定は、販売力=店頭占拠率×扱い店率によって行なうものとする。

さて、この A, B の販売力をそれぞれ $p_i, q_i (i=1, 2, \dots, n; p_i+q_i=1)$ とし、各地域の販売量は、

配分した広告費と販売力の積に比例するとすれば A, B の総販売量 S_A, S_B は、

$$(3.1) \quad \begin{cases} S_A = \sum_{i=1}^n \left(\frac{p_i a_i}{p_i a_i + q_i b_i}\right) s_i \\ S_B = \sum_{i=1}^n \left(\frac{q_i b_i}{p_i a_i + q_i b_i}\right) s_i \end{cases}$$

となり、 $M(A, B) = S_A - S_B$ は、

$$(3.2) \quad M(A, B) = \sum_{i=1}^n \left(\frac{p_i a_i - q_i b_i}{p_i a_i + q_i b_i}\right) s_i$$

と表わされる。よって、この地域別広告費配分問題は、 $M(A, B)$ を A の利得し、 $-M(A, B)$ を B の利得として、 A は $M(A, B)$ を最大に、 B はこれを最小にするように試みる2人零和ゲームであると表現できる。

このゲームの解、すなわち、 A, B の地域別広告費最適配分で、2.で述べたような性格の解 $a_i^*, b_i^* (i=1, 2, \dots, n)$ は、

$$(3.3) \quad \begin{cases} a_i^* = \left\{ \frac{1}{K} \cdot \frac{p_i q_i s_i}{(A p_i + B q_i)^2} \right\} A \\ b_i^* = \left\{ \frac{1}{K} \cdot \frac{p_i q_i s_i}{(A p_i + B q_i)^2} \right\} B \end{cases}$$

である。ただし、

$$(3.4) \quad K = \sum_{i=1}^n \frac{p_i q_i s_i}{(A p_i + B q_i)^2}$$

である。また、このゲームの値 v は、

$$(3.5) \quad v = \sum_{i=1}^n \left(\frac{p_i A - q_i B}{p_i A + q_i B}\right) s_i$$

である。

このゲームの地域別広告費最適配分の性質は次のとおりである。

i) $p_i = p$ (一定), $q_i = q$ (一定) ($i=1, 2, \dots, n$) の場合

最適配分は、

$$\begin{cases} a_i^* = \left(\frac{s_i}{S}\right)A & (i=1, 2, \dots, n) \\ b_i^* = \left(\frac{s_i}{S}\right)B & (i=1, 2, \dots, n) \end{cases}$$

となって、2.の場合と同じ配分となり、販売力の影響を受けないものと考えられる。

表 1 広告予算が 100 の場合の企業 A の販売力を考慮した地域別最適配分

地 域	i	1	2	3	4	5	計
販売可能量	s_i	10	10	10	10	10	50
販売力	p_i	$\frac{1}{6}$	$\frac{2}{6}$	$\frac{3}{6}$	$\frac{4}{6}$	$\frac{5}{6}$	
	q_i	$\frac{5}{6}$	$\frac{4}{6}$	$\frac{3}{6}$	$\frac{2}{6}$	$\frac{1}{6}$	
力を考慮しない場合の最適配分 a_i^*		20	20	20	20	20	100
販売力を考慮した場合の最適配分 a_i^*	$A=B=100$	14.29	22.86	25.71	22.86	14.29	100.01
	$A=100, B=50$	22.21	27.21	24.18	17.41	8.99	100.00
	$A=100, B=200$	8.99	17.41	24.18	27.21	22.21	100.00

(注) 企業 B の最適配分 = 企業 A の最適配分 $\times \frac{B}{A}$

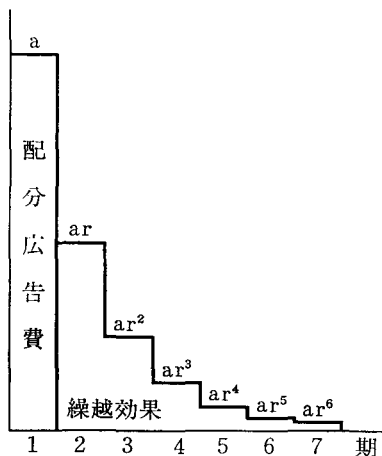


図 1 一定率 r で漸減する繰越効果

ii) $p_i = p, q_i = q (i=1, 2, \dots, n)$ でない場合

$A=B$ の場合には, $p_i = q_i = 1/2$ であるような地域, あるいはそれに近い地域では, 販売可能量に比例させる場合よりも大きい額を, 逆に p_i と q_i の差が大きな地域には小さい額を配分するようになる. また, $A > B$ のときは, $A=B$ の場合に比べて, $p_i < q_i$ の地域への配分を増加する傾向が, したがって, $p_i > q_i$ の地域への配分を減少する傾向がみられる. また, $A < B$ のときは, $A > B$ のときとは逆の傾向がみられる.

この状況が把握できるように, 広告予算が 100 の場合の企業 A の地域別最適配分の数値例を表 1 に示す.

4. 期別配分

同種の商品を販売する 2 つの競合企業 A, B がある市場を占有し, それぞれ A, B の額の広告予算が与えられ, n 期に分けられるある一定の広告期間にわたって, 広告予算の期別配分を行なおうとしている (地域別に配合された広告費を, さらに期別に配分する問題として考えてもよい). いま第 i 期における広告によって影響される商品の販売可能量を s_i , 第 i 期に対する A, B の広告予算の配分額をそれぞれ $a_i (\geq 0), b_i (\geq 0)$ とすると, この広告期間中の全販売可能量 S は,

$$(4.1) \quad S = \sum_{i=1}^n s_i$$

であり, また,

$$(4.2) \quad A = \sum_{i=1}^n a_i, \quad B = \sum_{i=1}^n b_i$$

である.

ところで, 広告費の効果は, 配分した期のみにあらわれるのではなく, その期が過ぎた後の期にも存続する. いわゆる繰越効果が存在するのである. いまこの繰越効果の時間経過に対する形を, 1 期経過するにともなって一定率 $r (0 \leq r \leq 1)$ で漸減するという形, すなわち, ある期に配分した広告費の大きさを a としたとき, その期から 1, 2, ... 期後の期に, $ar, ar^2, \dots$ の大きさの広告費を配分したのと同等の効果が存在するような形を考える (図 1 参照). そして, 第 i 期に配分した広告費と, 第 i 期以前に配分した広告費の第 i 期にあらわれる繰越効果とを合計したものを第 i 期の累積広告資本とよぶことにする. このとき, この A, B の第 i 期の累積広告資本を記号で表わせば, それぞれ, $\sum_{j=1}^i a_j r^{i-j}, \sum_{j=1}^i b_j r^{i-j}$ となる.

いま, 第 i 期の販売量が, その期の累積広告資本に比例するとすれば, 第 i 期における A, B の販売量は, それぞれ, $\{\sum_{j=1}^i a_j r^{i-j} / \sum_{j=1}^i (a_j + b_j) r^{i-j}\} s_i, \{\sum_{j=1}^i b_j r^{i-j} / \sum_{j=1}^i (a_j + b_j) r^{i-j}\} s_i$ と表わされるから, A, B の広告期間中の全販売量 S_A, S_B は,

$$(4.3) \quad \begin{aligned} S_A &= \sum_{i=1}^n \left\{ \frac{\sum_{j=1}^i a_j r^{i-j}}{\sum_{j=1}^i (a_j + b_j) r^{i-j}} \right\} s_i \\ S_B &= \sum_{i=1}^n \left\{ \frac{\sum_{j=1}^i b_j r^{i-j}}{\sum_{j=1}^i (a_j + b_j) r^{i-j}} \right\} s_i \end{aligned}$$

となる。

ここで、 A 、 B の広告期間中の広告予算の期別配分をそれぞれ、 $A=(a_1, a_2, \dots, a_n)$ 、 $B=(b_1, b_2, \dots, b_n)$ とし、 $M(A, B)=S_A-S_B$ とすれば、

$$(4.4) \quad M(A, B) = \sum_{i=1}^n \left\{ \frac{\sum_{j=1}^i (a_j - b_j) r^{i-j}}{\sum_{j=1}^i (a_j + b_j) r^{i-j}} \right\} s_i$$

と表わされる。よってこの期別広告費配分問題は $M(A, B)$ を A の利得とし、 $-M(A, B)$ を B の利得として、 A は $M(A, B)$ を最大に、 B はこれを最小にするように試みる2人零和ゲームであると表現できる。このゲームの解、すなわち、 A 、 B の期別広告費最適配分で、2.で述べたような性格の解 $a_i^*, b_i^* (i=1, 2, \dots, n)$ は、次のようになる。なお、ここでは、広告期間中で最初に販売可能量が正になる期を第1期としている。

I. A の最適広告費配分

次の2つの段階I), II)を経て決定される。

I) 各期に対する広告費の配分の有無の決定
次の手順による。

手順1 $a_1^* > 0$ とする。

手順2 第1期を第 p 期とする。

手順3 第 p 期以降の第 i 期について、 $i=p+1, p+2, \dots$ と順次変化させてすべての l_i について次の関係を満足するかどうかを調べる。

$$\frac{\sum_{j=i}^{i+l_i-1} s_j}{\sum_{j=p}^{i-1} s_j} > \begin{cases} \frac{r^{i-p}(1-r^{l_i})}{1-r^{i-p}} & (l_i=1, 2, \dots, n-i) \\ \frac{r^{i-p}}{1-r^{i-p}} & (l_i=n-i+1) \end{cases}$$

i) 上の関係をすべての l_i について満足する最初の i の値が、 $i=p+k (1 \leq k \leq n-p)$ と表わされるならば、

$$\begin{cases} a_i^* = 0 & (i=p+1, p+2, \dots, p+k-1) \\ a_i^* > 0 & (i=p+k) \end{cases}$$

と決定される。このとき、 $p+k < n$ ならば、第 $(p+k)$ 期を改めて第 p 期において、手順3を最初からくりかえす。また、 $p+k=n$ ならば、I)の段階は終了する。

ii) 上の関係をすべての l_i について満足する i が存在しない場合は、

$$a_i^* = 0 \quad (i=p+1, p+2, \dots, n)$$

と決定され、I)の段階は終了する。

なお、この段階で、広告費の配分が有り決定された期を配分期とよぶことにする。

II) 配分期に対する広告費の配分額の決定

i) 第1期のみが配分期の場合

$$a_1^* = A$$

ii) 第1期以外に配分期がある場合

a) ある配分期第 i 期 ($2 \leq i \leq n$)の後に配分期がない場合

ある配分期第 i 期のすぐ前の配分期を第 $(i-u)$ 期(u は正の整数)とすれば、

$$a_i^* = \left\{ \sum_{j=i}^n s_j - \frac{r^u \sum_{j=i-u}^{i-1} s_j}{1-r^u} \right\} \frac{A}{S}$$

b) ある配分期第 i 期 ($1 \leq i \leq n-1$)の後も配分期がある場合

第1期のすぐ後の配分期を第 $(1+v)$ 期(v は正の整数)とすれば、

$$a_1^* = \frac{\sum_{j=1}^n s_j}{1-r^v} \cdot \frac{A}{S}$$

ある配分期第 i 期 ($2 \leq i \leq n-1$)のすぐ前の配分期を第 $(i-u)$ 期、すぐ後の配分期を第 $(i+v)$ 期とすれば、

$$a_i^* = \left\{ \sum_{j=i}^{i+v-1} s_j - \frac{r^u \sum_{j=i-u}^{i-1} s_j}{1-r^v} \right\} \frac{A}{S}$$

II. B の最適広告費配分

$$b_i^* = \frac{B}{A} a_i^* \quad (i=1, 2, \dots, n)$$

表 2 広告予算が 100 の場合の企業 A の期別最適配分

期	i	1	2	3	4	5	計
販売可能量 s_i		10	20	10	20	20	80
最適配分 a_i^* (r は繰 越効果 率)	$r=0$	$12\frac{1}{2}$	25	$12\frac{1}{2}$	25	25	100
	$r=\frac{1}{4}$	$16\frac{2}{3}$	$29\frac{1}{6}$	$8\frac{1}{3}$	$29\frac{1}{6}$	$16\frac{2}{3}$	100
	$r=\frac{1}{2}$	25	$37\frac{1}{2}$	0	$37\frac{1}{2}$	0	100
	$r=\frac{3}{4}$	50	$48\frac{3}{14}$	0	$1\frac{11}{14}$	0	100
	$r\geq\frac{7}{8}$	100	0	0	0	0	100

(注) 企業 B の最適配分 = 企業 A の最適配分 $\times \frac{B}{A}$

また、このゲームの値 v は、

$$(4.5) \quad v = \left(\frac{A-B}{A+B} \right) S$$

である。このゲームの期別広告費最適配分の性質は次のとおりである。

i) $r=0$ の場合

最適配分は、

$$\begin{cases} a_i^* = \left(\frac{s_i}{S} \right) A & (i=1, 2, \dots, n) \\ b_i^* = \left(\frac{s_i}{S} \right) B & (i=1, 2, \dots, n) \end{cases}$$

となる。

ii) $r \neq 0$ の場合

$r=0$ の場合に比較して、 r が大になるに従い早期に広告費の配分を増加する傾向が強まってくる。そして、 $r \geq r_0 = \max_{2 \leq i \leq n} \frac{i-1}{i} \sqrt{\sum_{j=i}^n s_j / S}$ のときは、第 1 期のみに全広告予算を配分し、第 2 期以降は、その繰越効果のみに期待するのが最適となる。

この状況が把握できるよう $A=100$ の場合の企業 A の期別広告費最適配分の数値例を表 2 に示す。またこの例の配分広告費の累積額のグラフをかくと図 2 のようになる。なお、この例においては $r_0 = \max_{2 \leq i \leq 5} \frac{i-1}{i} \sqrt{\sum_{j=i}^5 s_j / S} = \sum_{j=2}^5 s_j / S = 7/8$ である。

5. おわりに

競合企業間においては、相互に相手企業の経営戦略をたえず監視し、相手企業が将来どんな戦略

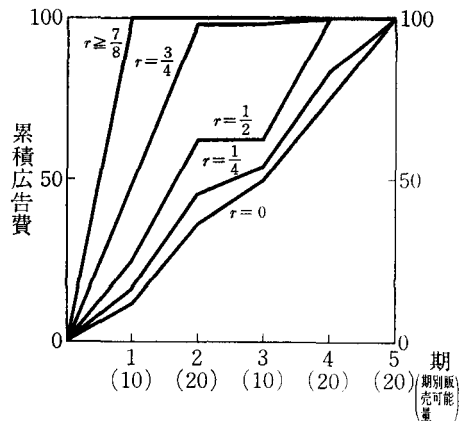


図 2 広告予算が 100 の場合の企業 A の期別最適配分の累積配分

をとってくるかに関心をもっている。したがって、企業が新しい経営戦略の計画を立案するさいに、競合相手企業が、その計画をすばやく察知して、最良の戦略で対応してくると警戒することも必要であろう。そうした意味からも、ゲーム理論的な最適戦略を、あながち消極的すぎて、非現実的な戦略であるとはいいい切れないであろう。

ここでは、競合する 2 つの企業の地域別または期別の広告予算配分モデルをゲーム理論的にとり扱って、その最適解を得ている 3 つの論文を解説して紹介したわけであるが、上述の見地に立てみると、これらの解は広告予算配分の実務の上で参考になるものと思われる。

参考文献

- [1] Friedman, L. : Game Theory Models in the Allocation of Advertising Expenditures. *Operations Research*, Vol. 6, No. 5 (1958), 699-709.
- [2] 門山 允: 販売力を考慮したときの広告費の最適配分. *経営科学* 9, 4 (1966), 238-240.
- [3] 河原 靖: 繰越効果を考慮に入れた広告費の最適配分. *Journal of the Operations Research Society of Japan*, Vol. 25, No.2 (1982), 77-98.
- [4] Montgomery, D. B. and Urban, G. L. : *Management Science in Marketing*. Prentice-Hall, 1969.