最適制御を使った広告予算意思決定

笹井　均

1. はじめに

近年，企業のマーケティング領域における諸々の意思決定を，隣接諸科学の方法論を利用してモデル化し，体系化しようという試みがなされ，多くの成果が得られつつある．これは，マーケティング現象を対象としたマーケティング科学としての方法論の確立を企図する潮流であるといえよう．

大沢氏［10］によれば「マーケティング科学とは，消費者の欲求充足をめざしてなされる企業もしくは，事業体のマーケティング活動を，それによって生成される物の流れ，金の流れ，情報の流れとの関連においてとらえ，その諸環境との交互作用を叙述し，説明し，そこに見いだされるであろう普遍的な法則性を明らかにし，究極的には，これらの流れの効率を高めることを目的とする1つの実質的学問分野である」とあるが，実に明快な概念規定であるといえよう．

本稿では，この精神に立脚して，マーケティング意思決定の適用領域として広告予算を中心にとりあげ，最適制御の理論的手法がいかにその問題の記述と解決に貢献されているかを見てみることにする．この場合の基本的方向は，現実をいかに抽象化し，モデル化するかということになろうが，ある一定の抽象化は，複雑な意思決定の諸側面を分析可能な形で定式化し，解明するための必然的に容認されねばならない第1近次であると考える．

とはいえ，忘れてはならないことは，われわれは常にマーケティング諸手段の統合的管理を軸として企業活動の統合を行なわなければならないという視点である．この視点を銘記することによってのみ，最適制御理論のマーケティング領域への適用を単なる適用に終らせることなく，マーケティング科学全体のフレームワークの中での位置づけを意味あるものとすることができるであろう．

このことを念頭に置きつつ，本稿ではまず，最適制御の概念からはじめて，現在までに提案された代表的な広告予算意思決定モデルについて概観する．しかる後に，これからの展望を視野に置きつつ，マーケティング戦略の統合的モデルへの構築について言及する．

2. 最適制御の概念

最適制御の理論を特徴づける中心的概念は，状態空間（state space）とコントロール（control variable）という考え方である．制御変数としてのコントロール $u(t)$ とその結果として実現する状態 $x(t)$ の関係が微分方程式により記述され，その時間的軌跡が状態空間の中での運動として把握されることになる．微分方程式，

$$\dot{x}(t)=f(x(t),u(t),t),\ x(0)=x_0 \qquad (1)$$

ささい　ひとし　横浜国立大学　経営学部
〒240　横浜市保土ケ谷区常盤台156

© 日本オペレーションズ・リサーチ学会．無断複写・複製・転載を禁ず．

は通常状態方程式(state equation)とよばれ，コントロールは，あるあらかじめ定められた許容範囲Ωに拘束される．このとき，この状態方程式によって記述されるシステムにおいて，目的関数，

$$J=\int_0^T F(x(t),u(t),t)dt+S(x(T)),T>0 \quad (2)$$

を最大にするコントロールはどうあるべきか議論するのが最適制御の理論である．

広告予算意思決定を含むマネジメント・サイエンスの領域において遭遇する問題は経時的プロセスを考慮せざるをえない場合が多く，この時，最適制御の理論が，それらの問題解決のための有力な武器となるであろうとの期待があるわけである．

状態変数 $x(t)$，コントロール $u(t)$ はベクトルとして扱われるべきものであるが，説明を簡単にするためスカラーと考えていただきたい．また，数学的厳密性には立ち入らないこととし，したがって，以下での議論においては解の存在などを保証するために関数に課すべき条件はすべて満足されているものとする．すなわち，問題設定は well posed であると仮定する．

広告予算問題において見てみよう．まず，販売量あるいはそれに結びつく代替変数，たとえば広告ストック(のれん)を状態変数 $x(t)$，広告支出率を $u(t)$ としてとらえ，それらの因果関係が(1)式のような方程式で記述される．企業はある目的，すなわち，(2)式のような目的関数を設定して，その達成のために行動する．通常，目的関数は販売量と広告費，生産コストを考慮にいれた純利益の現在価値となる．したがって，$F(x(t),u(t),t)$ は瞬間利益率 (instantaneous profit rate), $S(x(T))$ は残存価値 (salvage value) と考えることができる．企業の意思決定者にとっては最適な広告戦略をどう行なうべきかが問われる．このような設定のもとで，最適解の導出のため，すなわち，動的最適化の方法として最大原理，数理計画法が用いられる．

最大原理は最適解であるための必要条件を総称する言葉であって Pontryagin [11] による変分法，あるいは，Bellman [2] による D. P. から導出される．

まず，Hamiltonian が次のように定義される．

$$H(x,u,\lambda,t)=F(x,u,t)+\lambda f(x,u,t) \quad (3)$$

$u^*(t)$が最適解であるための必要条件 [1][11] は任意のコントロール $u(t)\in\Omega$ に対して次式が成立することである．

$$\dot{x}^*(t)=f(x^*(t),u^*(t),t),\ x^*(0)=x_0 \quad (4)$$

$$\dot{\lambda}^*(t)=-H_x(x^*(t),u^*(t),\lambda^*(t),t),$$
$$\lambda^*(T)=S_x(x^*(T)) \quad (5)$$

$$H(x^*(t),u^*(t),\lambda^*(t),t)\geq$$
$$H(x^*(t),u(t),\lambda^*(t),t) \quad (6)$$

ただし，$H_x=\partial H/\partial x, S_x=\partial S/\partial x$ である．

最適なコントロールは常に Hamiltonian を最大にしていなければならないという意味で最大原理とよばれている．また(5)式は adjoint 方程式，$\lambda^*(T)$ は横断性条件(transversality condition)とよばれる．

最大原理は一方で経済的な合意をもつ．この場合 $x(t)$を t 時刻における資本ストック，$F(x(t),u(t),t)$ を瞬間利益率と考えればわかりやすい．$\lambda(t)$ は t 時刻における単位資本ストックに対する限界価値すなわち，資本ストック1単位のシャドウ・プライス(shadow price)であることはよく知られた事実である [16]．したがって，(3)式は状態 $x(t)$ において $u(t)$ を用いた場合の瞬間利益率と資本ストックの利益率の和を意味し，これを各 t において最大にする $u(t)$ が最適解となる．

また，(5)式より，

$$F_x+\dot{\lambda}=-\lambda f_x$$

であり，$\dot{\lambda}(t)$はキャピタルゲインを$-\lambda\cdot f_x$は限界機会費用を意味するものと考えられるので，上式は限界収益が限界費用に等しいことを表わす式となる．

さて，原理的には (6) 式は $u^*(t)=u(x^*(t),\lambda^*(t),t)$ と解けて，これを(4)(5)式に代入すれば，(4)式において初期条件が，(5)式において終端条

© 日本オペレーションズ・リサーチ学会．無断複写・複製・転載を禁ず．

件が与えられた，いわゆる2点境界値問題の解によって最適解が完全に求まることになる．

最大原理によって容易に最適解が求まる場合も多くあるが，問題によっては特殊な洞察と技法を必要とするし，ある場合には不可能に近いこともある．このような認識のもとに近似解の収束列として最適解を導入していこうという方法がある[3][13]．これは $x(t), u(t)$ を各々独立変数，(1)式を等式拘束条件と考え，関数空間における数理計画法の援用によってコンピュータを前提として解を求めていく方法である．

以下では最適制御理論の援用を可能にする現在までに提案された代表的な広告予算意思決定モデルの定式化について概観することにしよう．

3. 種々のモデル

3.1 広告資本モデル

(advertising capital model)[9][17]

Nerlove-Arrow[9]は広告をのれん(goodwill)のストックとよばれる広告資本への投資と考えた．すなわち，広告資本は新しい顧客の開発や消費者の嗜好，需要関数の形に変化を与えることによって創造される．広告資本は市場の不完全性を説明するものであり，競争企業の広告投資，新製品や新しいブランドの出現によって経時的に衰退する性質をもつ．Nerlove-Arrowは広告資本を現在と過去の広告支出に依存するのれんのストック $x(t)$ と考え，次の方程式で記述されるものと仮定した．

$$\dot{x}(t)=-ax(t)+u(t) \quad x(0)=x_0 \tag{7}$$

ただし，のれんは1単位の価格が1ドルとして金銭単位に換算されたものとし，$u(t)\geq 0$ は t 時刻における(瞬間)広告費支出率である．(7)式では，のれんに対する純投資は粗投資と衰退分(a は衰退パラメター)の差として与えられる．

独占企業の最適広告政策の定式化においては瞬間販売率 $S(t)$ がのれん $x(t)$ と価格 $p(t)$ に依存して $S=S(p,x)$ と定まると仮定される．S に対する生産コスト(rate of production cost)を $C(S)$ とすると純収益は $R(p,x)=pS(p,x)-C(S)$ であり，広告費も含めた純収益は $R(p,x)-u$ である．$S(p,x)=ap^{-\eta}x^{\beta}$, $C(S)=C\cdot S$ の形のものが分析によく用いられる．さらに企業が利子率 r で割引かれた純収入のフローの現在価値の最大化をはかるものとすれば，広告予算意思決定問題は(7)式のもとでの

$$\max_{u\geq 0 p\geq 0} J=\int_0^{\infty} e^{-rt}\{R(p,x)-u\}dt \tag{8}$$

という最適制御の問題として与えられる．

被積分項を p について微分し，需要の価格弾力性を $\eta=-(\partial S/\partial p)/(S/p)$ と書くと(8)式の最大値を与える価格は $p^*=\eta C'(S)/\eta-1$ と求まる．p^* を $R(p,x)$ に代入し，$\pi(x)=R(p^*,x)$ と置くと(8)式は

$$\max_{u\geq 0} J=\int_0^{\infty} e^{-rt}\{\pi(x)-u\}dt \tag{9}$$

と変形される．一方，$\lambda=e^{-rt}\lambda$ とする変数変換により Hamiltonian と adjoint 方程式は簡単な計算により，

$$H=\pi(x)-u+\lambda(-ax+u)$$
$$\dot{\lambda}=(r+a)\lambda-\partial\pi/\partial x, \lim_{t\to\infty} e^{-rt}\lambda(t)=0$$

となる．この場合には，$\dot{\lambda}(t)=0$, $\partial H/\partial u=0$ を解いてターンパイク(turnpike)，すなわち，定常解を求めることにより最適解を求めることができる[16]．

3.2 広告—売上反応モデル

(sales-advertising response model)[16][20]．

広告資本モデルとは異なって，広告の販売量に対するキャリー・オーバー効果を明示的に示したモデルである．Vidale-Wolfe[20]は広告による製品の販売量の変化分 $\dot{S}(t)$ は市場において実際に実現された販売量 $S(t)$ に対して販売量の衰退分として働く効果によるものと未実現の潜在販売量に対して販売反応分として働く効果によるものとから次のように得られると主張した．

$$\dot{S}(t)=au(1-S/M)-bS \tag{10}$$

© 日本オペレーションズ・リサーチ学会．無断複写・複製・転載を禁ず．

ここで，Mは販売量の飽和水準，aは販売反応定数，bは販売衰退定数を表わす．したがって，Mが十分大きければ(10)式は(7)式のモデルと類似のものとなる．Vidale-Wolfeのモデルは，古くから多くの実証研究によってその妥当性の認められたものであり，この種の研究に方向づけと有用な概念を提供したという意味において画期的な成果であるといえよう．

いま，$x=S/M, \rho=a/M, \delta=b+\dot{M}/M$ の変数変換を行なうと(10)式は

$$\dot{x}(t)=\rho u(t)(1-x(t))-\delta x(t), x(0)=x_0 \quad (11)$$

となる．最終時刻$T>0$における目標マーケットシェアおよびコントロールの制約条件を各々$x(T)=x_T, 0\leq u\leq U$としπを$x=1$に対する最大販売利益（したがって$\pi\cdot x$が販売利益関数となる）とすると，広告予算意思決定問題は(11)式といま述べた拘束条件のもとで純利益

$$\max_{0\leq u\leq U} J=\int_0^T e^{-rt}\{\pi\cdot x-u\}dt \quad (12)$$

を最大化する最適制御問題として定式化できる．この問題の最適解は最大原理によって求めることができるが，Greenの定理を用いた解法もSethi［16］によって与えられている．

3.3 需要成長モデル (demand growth model)［5］［18］

これは先に述べたものより精緻なモデルでありdiffusion process［6］によって新製品の需要の成長を説明したBass［4］のモデルと経験曲線にしたがう生産関数に基盤を置いたものである．この種のモデルについて概観することにする．

簡単のため，各時刻における販売量と生産量は一致しているものとする．t期における1単位当りの生産コスト$C(t)$は累積生産量$Q(t)$に依存して経験曲線$C(t)=C(0)[Q(0)/Q(t)]^e$にしたがって減少していくことが経験的に知られている．$C(0)$, $Q(0)$は各々初期コスト，初期生産量であり，eは学習パラメター (learning parameter) である．そのとき，BassはA, Bをパラメターとした次の関係式の実証的妥当性を検証した．

$$\dot{Q}=A(Q_M-Q)+B(Q_M-Q)Q$$

$Q(t)$は新製品の潜在的販売量Q_Mのうちでt期に消費者によって実際に購買される量である．

$A(Q_M-Q)$は革新的消費者(innovator)による効果であり，$B(Q_M-Q)Q$は模倣的消費者 (imitator)による効果である，A, Bは広告，価格，販売促進努力などによって定まるパラメターであるが，ここでは広告努力のみの関数であるものとする．Teng and Thompson［18］はA, Bが広告支出率について線形関数で広告コストが$au+b$ $(a, b\geq 0), 0\leq u\leq U$となる場合の定式化を行なっている．このとき，広告予算意思決定問題は

$$\dot{Q}=(\gamma_1+\gamma_2 u)(Q_M-Q)+(\gamma_3'+\gamma_4' u)(Q_M-Q)Q$$
$$\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3', \gamma_4'\geq 0,\ 0\leq u\leq U \quad (13)$$

の拘束のもとで純利益

$$\max J=\int_0^T e^{-rt}[(p-c)\dot{Q}-(au+b)]dt \quad (14)$$

を最大化する問題となる．

$$x=Q/Q_M, \gamma_3=\gamma_3' Q_M, \gamma_4=\gamma_4' Q_M, \alpha=a/Q_M,$$
$$\beta=b/Q_M$$

の変数変換を行なえば，(13)式(14)式は

$$\dot{x}(t)=(\gamma_1+\gamma_2 u(t))(1-x(t))+$$
$$(\gamma_3+\gamma_4 u(t))(1-x(t))x(t) \quad (15)$$

$$\max_{0\leq u\leq U} J=\int_0^T e^{-rt}[(p-c_0(x_0/x(t))^e)\dot{x}(t)-$$
$$(\alpha u(t)+\beta)]dt \quad (16)$$

となり，最適制御の問題の定式化が得られる．

$\gamma_2=\gamma_4=0$の場合はBassのモデル，$\gamma_1=\gamma_3=\gamma_4=0$の場合にはVidale-Wolfのモデルとなることに注意されたい．

(15)および(16)式で与えられる最適制御の問題を最大原理によって解くことはコンピュータの利用を前提にするのでなければきわめて困難である．Teng and Thompson［18］は(15)式と(16)式がuについて線形であることに着目し，Greenの定理を用いることによって解を求めている．

3.4 寡占企業の広告モデル［18］［19］

これまで述べてきたモデルには他企業との競争的状態というものが明示的にとり入れられていな

© 日本オペレーションズ・リサーチ学会．無断複写・複製・転載を禁ず．

いことに注意が必要である．従来の研究は主として独占企業を対象としたモデル構築とその定性的分析に力点が置かれてきた．しかし現実の企業において要求されるものは寡占を前提としたモデルである．にもかかわらず経済学の分野においてもなお寡占の理論は十分であるとはいい難い．このことは説得力のある寡占企業の広告戦略の理論化がいかに困難であるかを物語るものであろう．

このことに挑戦する1つの方向は微分ゲームの理論［7］［8］のマーケティング戦略への導入であろうと思われる．微分ゲームとは，異なった微分方程式で記述されるシステム相互間での各々にとっての最適戦略はどうあるべきかを議論する問題である．この時の最適のためのよく使われる尺度はいわゆるナッシュ均衡である．したがって，寡占企業によってもたらせる競争市場の最適広告戦略をナッシュ均衡を目安として求めていこうという視点が導入される．ナッシュ均衡とは簡単にいえば，他人の戦略を所与とし自己の最適化を図ることと考えればよい．

Teng and Thompson［18］は独占企業における広告モデルを微分ゲームの定式化によって寡占企業のモデルに拡張している．たとえば，$n \geq 1$ の企業の状態が，それぞれ(15)式と類似の微分方程式，

$$\dot{x}_i(t)=(\gamma_{i1}+\gamma_{i2}u_i(t))(1-x(t)) + (\gamma_{i3}+\gamma_{i4}u_i(t))(1-x(t))x_i(t) \quad (17)$$

$$x_i(0)=x_{i0}, i=1,2,\cdots\cdots,n, x(t)=\sum x_i(t)$$

で記述されるものとする．各企業は次の目的関数をナッシュ均衡の意味で最適にするコントロール $u_i(t)$ を求める．

$$J_i=W_ie^{-rT}x_i(T)+\int_0^T e^{-r_it}\{[p_i-c_{i0}(x_{i0}/x_i(t))^{e_i}(\dot{x}_i(t))]-(\alpha_iu_i(t)+\beta_i)\}dt \quad (18)$$

このとき，微分ゲームに最大原理を適用するとHamiltonian および adjoint 方程式は簡単な計算により

$$H_i=[p_i-c_{i0}(x_{i0}/x_i)^{e_i}]\dot{x}_i - (\alpha_iu_i+\beta_i)+\sum_{j=1}^{n}\lambda_{ij}\dot{x}_j$$

$$\dot{\lambda}_{ij}=\gamma_i\lambda_{ij}-(\partial H_i/\partial x_j) \quad (19)$$

$$i,j=1,2,\cdots,n$$

$$\lambda_{ij}(T)=\begin{cases}W_i : j=i\\ 0 \ : \ j\neq i\end{cases}$$

となる．寡占企業においては残存価値も重要な意味をもつという理由により，目的関数に $W_ie^{-rT}x_i(T)$ がつけ加えられている．(17)式と(19)式による最大原理を用いた最適解は容易に想像されるように $2n$ 点境界値問題の解として求めなければならない．したがって，もはやコンピュータを利用して計算する以外に道はないことになる．

4. 統合的マーケティング戦略モデルに向けて

広告意思決定は企業によって達成されるマーケット・シェアを決定づける大きな要因であり，マーケティング領域における重要な課題の1つであることはいうまでもない．しかしながら，マーケティング諸手段の統合的管理を意図するマーケティング科学においては，製品開発，価格設定，広告戦略，流通販売戦略という目的・手段の連鎖の体系をモデル化することが究極的な課題であることは明らかであろう．

経験効果を前提にした新製品導入期の独占あるいは寡占企業における広告予算意思決定モデルについては今まで見てきたとおりである．Thompson and Teng［19］によってそれらのモデルの広告予算意思決定と同時に価格決定も含めた統合的モデルへの拡張が試みられている．価格決定それ自体に関する研究としては多くの成果が得られているものの[12]，広告決定も統合したという意味においてそれは興味ある成果であろう．

彼らは3つの異なった価格戦略を提案し，それらに付随した広告戦略を考慮することによって，各々の相互比較を行なっている．まず，p を製品価格とし，経験的事実により $\dot{x}$ が e^{-gp} に比例す

© 日本オペレーションズ・リサーチ学会．無断複写・複製・転載を禁ず．

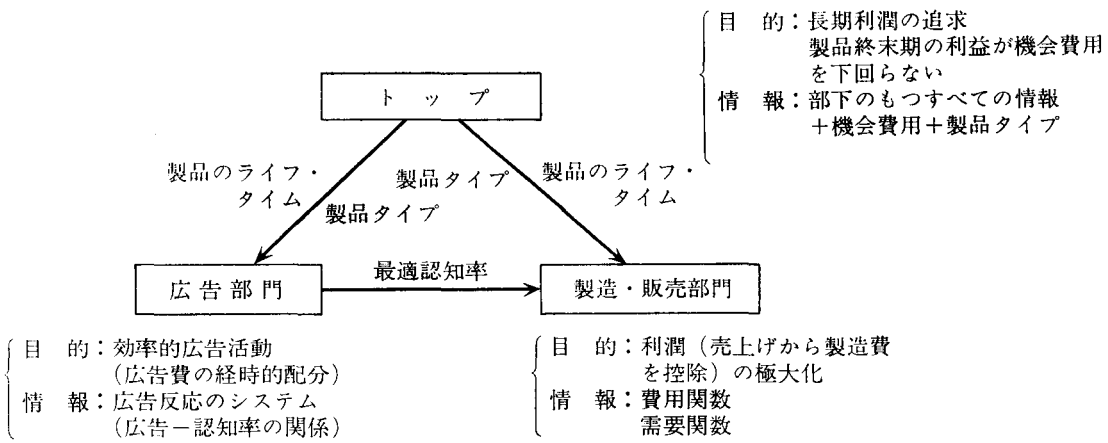

図 1

ると仮定される．したがって，(15)式は，

$$\dot{x}(t)=[(\gamma_1+\gamma_2 u(t))(1-x(t))+(\gamma_3+\gamma_4 u(t)(1-x(t))x(t)]e^{-gp} \quad (20)$$

と書き改められる．(16) 式と (20) 式を使った Hamiltonian は

$$H=(p-c)\dot{x}-(\alpha u+\beta)+\lambda\dot{x}$$
$$=[(p-c+\lambda)(\gamma_2+\gamma_4 x)(1-x)e^{-gp}-\alpha]u+(p-c+\lambda)(\gamma_1+\gamma_3 x)(1-x)e^{-gp}-\beta$$

となる．ただし，$c(t)=c_0(x_0/x(t))^e$ と置いた．

彼らの提案した3つの価格戦略は

(i) optimal variable pricing rule :

$$\partial H/\partial p=0 \quad \Rightarrow p^*=c+1/g-\lambda$$

(ii) instantaneous marginal pricing rule :

$$\partial(p\dot{x})/\partial\dot{x}=\partial(c\dot{x})/\partial\dot{x}\Rightarrow p^+=c+1/g$$

(iii) optimal constant pricing rule :

$$\partial J/\partial p=0\Rightarrow\bar{p}=\int_0^T e^{-rt}(c+1/g)\dot{x}dt\Big/\int_0^T e^{-rt}\dot{x}dt$$

である．純利益最大の意味では p^* が，最終的マケット・シェアの意味では p^+ がすぐれているという結論が得られている．さらに，最適広告戦略を求める過程において，市場が飽和状態にある時には最適広告支出率はゼロであり，高い値の学習パラメターあるいは低い値の価格弾力性のもとでは広告支出率は高くなり，高い値の学習パラメターあるいは高い値の価格弾力性のもとでは最適価格は低くなるという興味深い結果が示される．また1歩進んで，市場にプライス・リーダーが存在する場合に，寡占企業における価格—広告意思決定モデルの構築を試み，その最適戦略導出のためのコンピュータ・アルゴリズムを提案している．総合的戦略モデルに向けての示唆に富んだ成果といえよう．

最後に筆者は，いま1つのマーケティング戦略の統合を意図したモデルについての見解を述べてみたい．

マーケティング・ミックスに関する従来の議論では，今まで見てきたように，意思決定主体として集権的な経営者を想定し，利潤最大化の行動原理のもとに，全社的な意味でのマーケティング戦略を構成する個々の戦略を調整し，かつ実行するというフレームワークが採用されるのが通常であった．しかし現実の企業組織においては，個々のマーケティング活動に関する意思決定は異なった目的を有する下位部門に多かれ少なかれ権限委譲されているのが普通であるから，それぞれの部門の意思決定者にある裁量幅内で決定権がまかされた形で意思決定問題を構造化し，モデル化するほうがより有意味な現実的インプリケーションが導かれることになろう．筆者ら［14］［15］は，このような観点に立ち，マーケティング活動を企業活動の中でどうとらえるべきかという視点を明らかにしつつ，マーケティング意思決定過程の動的モデルを図1［15］のように構築した．

© 日本オペレーションズ・リサーチ学会．無断複写・複製・転載を禁ず．

そこではマーケティング戦略の2つの大きな柱である広告意思決定と価格意思決定を異なった目的と情報を有する下位部門にゆだね，トップ・マネジメントは全社的な調整を行なう．下位部門に委譲された戦略は広告と価格であり，彼らは互いに他の決定に関与することなく，彼ら固有の目的関数と情報にもとづいて各々マーケティング戦略を実行する．一方，下位部門から正確な情報を受けたトップ・マネジメントは，全社的観点から新製品計画を行なう．すなわち，分権的形態にのっとってマーケティング活動が構造化され，広告意思決定と価格意思決定のメカニズムが定式化されるわけである．筆者は，このようにして有機的に結びついたそれぞれの決定主体の行動を最適制御の考え方を用いて定式化し，分析することにより，新製品導入に関する決定をトップ・マネジメントの立場からみてどう行なうのが適切かという問題，および，このような一連の決定によって製品ライフ・サイクルをどのように説明するかという問題に対して1つの考え方を提示した[15]．そこでは，伝統的な製品ライフ・サイクルについての仮説を部分的に説明するための1つの分析方法が提案され，適切な計画期間決定のためのアルゴリズムが示されている．ここにおいても最適制御の理論と方法が有力な武器となっている．

さて，本稿でとりあげたモデルは，複雑なマーケティング意思決定を構造化し，理論化するための考え方を提供するという意味において，今後の研究展開への有用な分析視角を示唆するものであろうが，モデルとしてはきわめてプリミティブなものであるといわざるを得ない．たとえば，環境要因の不確実性といったものは明示的にとり扱われていないからである．分権的形態にしろ集権的形態にしろ，意思決定者は，環境要因の不確実性の存在のゆえにこそ情報収集活動を展開し，収集された情報にもとづいて適切な意思決定を行なうべく行動しているのである．またそこでは，意思決定者にとっての効率的なマーケティング意思決定とは何であるかが問われねばならないであろう．いわば情報とかコミュニケーションの意思決定におよぼす役割というものを明示的に包摂したモデル構築が今後の課題であろう．

横浜国立大学阿部周造助教授には，折にふれ有益な助言をいただいた．ここに感謝の意を表したい．

参考文献

[1] Athans, M. and Falb, P. L. : *Optimal Control*, McGraw-Hill, New York, 1964

[2] Bellman, R. : *Dynamic Programming*, Princeton Univ. Press, N. J., 1957

[3] Balakrishnan, A. V. : On a new computing method in optimal control. *SIAM J. on Control*, Vol. 6(1968), 149-173

[4] Bass, F. M. : A new product growth model for consumer durables. *Management Sci.*, Vol. 15(1969), 215-227

[5] Bass, F. M. : The relationship between diffusion rates, experience curves, and demand elasticities for consumer durable technological innovations, *The Journal of Business*, Vol. 53(1980), 551-567

[6] Dodson, G. A. and Muller, E. : Models of new product diffusion through advertising and word-of-mouth. *Management Sci.*, Vol. 24(1978), 1568-1578

[7] ガブリロフ，ポントリヤーギン(坂本実訳)：競争の場の最適過程，東京図書，1971

[8] Isaacs, R. : *Differential Games*, Wiley, New York, 1965

[9] Nerlove, M. and Arrow, K. J. : Optimal advertising policy under dynamic conditions. *Economica*, No. 39(1962), 129-142

[10] 大沢豊：マーケティング科学と意思決定，中央経済社，1981

[11] Pontryagin, L. S., et al. : *The Mathematical Theory of Optimal Process*. J. Wiley, New York, 1962

[12] Rao, V. R. : Pricing research in marketing:

© 日本オペレーションズ・リサーチ学会．無断複写・複製・転載を禁ず．

The State of the Art. *Journal of Business*, Vol. 57(1984), 39-60

[13] Sasai, H.: A note on the penalty method for distributed parameter optimal control problems. *SIAM J. on Control*, Vol. 10 (1972), 730-736

[14] 笹井均：広告—価格設定に関する動的モデル．マーケティング・サイエンス，No. 24(1984), 29-39

[15] 笹井均，東田啓：企業組織の中での新製品開発戦略．*Computer Report*, 10月号—12月号(1985)

[16] Sethi, S. P. and Thompson, G. L.: *Optimal Control Theory*. Martinus Nijhoff Publishing Co., Boston, 1981

[17] Sethi, S. P.: Dynamic optimal control models in advertising. *SIAM Review*, Vol. 19(1977), 685-725

[18] Teng, J. T. and Thompson, G. L.: Oligopoly models for optimal advertising when production costs obey a learning curve. *Management Sci.*, Vol. 30(1983), 1087-1101

[19] Thompson, G. L. and Teng, J. T.: Optimal pricing and advertising policies for new product oligopoly models. *Marketing Sci.*, Vol. 3(1984), 148-168

[20] Vidale, M. L. and Wolfe, H. B.: An operations research study of sales response to advertising, *Operations Research*, Vol. 5 (1957), 370-381

●ミニミニ●OR●

ORを越える

「徒競走」は本来7～8人1組で，前の組のゴール完了後に次の組がスタートするべきだろうが，時間との戦いから，現在の徒競走では常時走路の中を3組（前の組がゴール付近．次の組が走路中央．そしてその次の組がスタートするといった状態で）走っており，観ている方も目が回りそうでした．

これを演出しているスターター役は2人の男子生徒で，交互に「走路を観る役」「スタート合図(ピストル)役」を流れるように，1つのテンポを保ちながらこなしていた．10組目くらいのところで，体に障害があって，一生懸命走っても友達からどんどん遅れる1人の生徒がいた．当然彼は，次の組の一団にもあっという間に追い抜かれた．スターター役の子も後続の同級生たちもほとんど無表情に「彼」を無視して競技は続行されているように見えた．

5～6組の後続の一団に追い抜かれながらも，一生懸命走った「彼」はやっとゴール前20mくらいの所に達した．「待った」と突然走路を観る役の子から声が発せられ，スタート合図のテンポが乱れた．中央付近を走っていた一団が「彼」を追い抜き，ゴールしてしまうと，グランドで競技しているのは「彼」1人だけになった．ほんの一時であるが運動会の主役が「彼」になったのである．ゴール役の子も彼のために特別白テープを用意し，彼のゴールを迎えた．さきほど「彼」を追い抜いていった友人たちも，ゴール付近で彼の努力を拍手でたたえていた．そしてまた，スタートの合図が前のテンポに戻った．

ORにたずさわる者として，能率・効率一辺倒ではなく，多少のロスを覚悟してでも「人の心」をつかむ術を持ち合わせたいもの，と思ったしだいです．（I）

© 日本オペレーションズ・リサーチ学会．無断複写・複製・転載を禁ず．