

株式投資と残差分析

斎藤 進

はじめに

他の人々のリスクを負担する代償として保険会社は保険料を徴収する。同じように資本市場にあってもリスク負担に対してプレミアムが支払われる。いわゆる資本資産評価モデル (CAPM) において、各株式銘柄のリスクに対して支払うべきプレミアムを定める条件式が証券市場線 (security market line, SML) である。SML によれば、株式投資の期待収益率と当該銘柄のリスクとは線形関係にあり、リスクの増大にともない期待収益率は増大する。

いま、ある株式への投資から得られた平均収益率が CAPM の推定する SML から乖離をもたらしたとしよう。これはどのような意味をもつのだろうか。正の乖離が生じたとすれば、当該株式の保有者に理論もしくは市場が妥当と認めた以上のリスク・プレミアムが支払われたと考えられ、乖離分だけ超過収益を得たことになる。このような超過収益は、投資家が他の多数の人々と異なる収益機会の発見能力・技法を有しているか、あるいは他の人々のもたない重要な情報をもっており、それを有効に利用するなどによって生ずる。そうだとすれば、SML からの乖離、すなわち超過収益の測定は、(i)証券投資、特に証券投資の専門家

であるポートフォリオ・マネジャーの業績評価、(ii)情報の証券価格に対する効果の分析などに利用できることになる。そこで、このような分析手法を SML 分析もしくは残差分析という。

ところで、SML 分析による株価に対する情報効果の測定は、特殊な情報をもつ投資家と、このような情報をもたない多数の投資家、といった情報の非対称性を前提としなければならない。CAPM と情報の非対称性とは両立するのか、両立するとすれば、どのような条件を満たさなければならないのか、等の問題はたいへん興味深いものであるが、これらに関しては他稿で扱ったので、本稿では SML 分析による業績評価を問題としよう。

さて、SML 分析によってポートフォリオ・マネジャーの業績評価を行なうことができるのであろうか。できるとすれば、どのような状況で可能なのであろうか。さらに、ここでの業績評価とはどのような意味での評価なのであろうか。これらの問題を提示する理由は以下から知れよう。CAPM における結論によれば、すべての株式およびポートフォリオの期待収益率は投資決定時には SML 直線上にある。その後、収益確定時に SML から乖離があったとしても、それは統計的な測定誤差によるものであるから、偶然による測定誤差をもってポートフォリオ・マネジャーの業績評価とすることはできない。業績評価として意味ある測定は、少なくとも卓越したポートフォリオ構成

能力ないし技法は市場がそれに対する十分な対抗策を形成しないかぎり優秀と識別するものでなければならない。偶然によって優劣が変化するものであってはならない。それゆえ、SML 分析によって本来の意味での業績評価が可能であるとすれば、それはどのような条件を満足する必要があるのか、さらにそこでの業績評価は何を意味するのか、などに答える必要がある。以下これらの点に関して Dybvig-Ross [2],[3] の最近の論文に依拠しながら述べることにする。

1. SML 分析と Sharp 尺度

われわれは次のような状況を想定する。ポートフォリオ・マネジャーとその業績を評価する観測者がいるとする。\$n\$ 個の証券が存在し、そのうち 1 つは元金の支払が確実な無危険証券であり、収益率を \$r_f\$ で表わす。\$n-1\$ 個の危険証券の収益率 \$\mathbf{E}\$ (\$n-1\$ 次ベクトル)、収益率の分散・共分散 \$\mathbf{V}\$ (\$n-1\$ 次正方行列) に関してマネジャーと観測者ともに同一の情報をもっている。通常の CAPM と同様に収益率の共分散行列 \$\mathbf{V}\$ は非特異かつ正定符号、期待収益率ベクトル \$\mathbf{E}\$ はその要素がすべて同じ値とはならないと仮定する。ところで観測者は業績評価の規準として非効率ポートフォリオを使用するとする。したがって、観測者はみずからの指標として用いたポートフォリオが効率的であるか否か知る位置にない。他方、ポートフォリオ・マネジャーは効率的ポートフォリオを発見する能力を有しており、この能力によって業績が評価されると考える。

ここで効率的ポートフォリオとは、言うまでもなく期待収益率を一定としたとき分散の最小となるポートフォリオのことであり、また分散を一定としたとき期待収益率が最大となるポートフォリオを正の効率的ポートフォリオなどという。

またポートフォリオ・マネジャーが株式投資の専門家として長期にわたり活躍できるためには、資金提供をする顧客に損失を被らせないか、ある

いはこの確率を最小にすることが肝要であろう。これは、同一水準の期待収益率が得られる複数のポートフォリオが存在する場合、ポートフォリオ・マネジャーは分散の最も小さなポートフォリオを選択することにより達成される。このような意味でマネジャーにとって効率的ポートフォリオを発見する能力は、専門家として最も重要な要素と思われる。したがって、この能力によって業績を評価することは正に適切なものといえよう。

いま \$\mathbf{a}_p\$ を危険証券のみから構成される非効率な指標ポートフォリオの投資ベクトルとする²⁾。\$\mathbf{a}_p\$ は \$n-1\$ 次ベクトルでその第 \$i\$ 要素は第 \$i\$ 株式銘柄への投資比率を示しており、制約条件 \$\mathbf{a}_p' \mathbf{e} = 1\$、\$\mathbf{e}' = (1, \dots, 1)\$ を満たす。指標 \$\mathbf{a}_p\$ に対応する SML を \$\text{SML}_p\$ と記すことにすれば、\$\text{SML}_p\$ は

$$\mathbf{E} = r_f \mathbf{e} + \frac{\mathbf{V} \mathbf{a}_p}{\mathbf{a}_p' \mathbf{V} \mathbf{a}_p} (\mathbf{a}_p' \mathbf{E} - r_f) \quad (1)$$

であり³⁾、\$\text{SML}_p\$ の残差ベクトルは

$$\boldsymbol{\delta} \equiv \mathbf{E} - r_f \mathbf{e} - (\mathbf{a}_p' \mathbf{E} - r_f) \frac{\mathbf{V} \mathbf{a}_p}{\mathbf{a}_p' \mathbf{V} \mathbf{a}_p} \quad (2)$$

で定義される。あるポートフォリオ \$\mathbf{a}\$ に対して、

$$\mathbf{a}' \boldsymbol{\delta} = 0$$

であれば、\$\mathbf{a}\$ は \$\text{SML}_p\$ 直線上に、また \$\mathbf{a}' \boldsymbol{\delta} > 0\$ (\$< 0\$) ならば \$\text{SML}_p\$ の上 (下) 側に位置することになる。なお指標 \$\mathbf{a}_p\$ が効率的フォリオであれば、すべての \$\mathbf{a}\$ に対して \$\mathbf{a}' \boldsymbol{\delta} = 0\$ になること、すなわち (1) 式が成立することは言うまでもない。

マネジャーの業績評価をする場合、この \$\mathbf{a}' \boldsymbol{\delta}\$ を用いる方法が唯一ではない。よく知られた他の業績評価の尺度として以下がある。すなわち、あるポートフォリオ \$\mathbf{a}\$ に対して

$$\frac{\mathbf{a}' \mathbf{E} - r_f}{\sqrt{\mathbf{a}' \mathbf{V} \mathbf{a}}}$$

である。この尺度は Sharp [5] により最初に導入されたので Sharp の尺度とよぶことにすれば、指標ポートフォリオ \$\mathbf{a}_p\$ についても Sharp の尺度を求め、この尺度の大小によってポートフォリオ \$\mathbf{a}\$ の業績評価をする。そこで以下の定理は、これら 2 つの評価尺度に関して Sharp の意味で優れた

業績は SML 分析においても優れた業績となることを示すものである。

〔定理 1〕 α が Sharp の意味で α_p を優越する、すなわち、

$$\frac{\alpha' E - r_f}{\sqrt{\alpha' V \alpha}} > \frac{\alpha_p' E - r_f}{\sqrt{\alpha_p' V \alpha_p}} > 0 \quad (3)$$

が成立するとすれば、 α は SML_p の上側に位置し、 $\alpha' \delta > 0$ となる。上の不等式の不等号が逆転した場合には、 $\alpha' \delta < 0$ となる。

この定理の証明は以下となる。残差ベクトルの定義式(2)より

$$\begin{aligned} \alpha' \delta &= \alpha' E - r_f - \frac{\alpha' V \alpha_p}{\alpha_p' V \alpha_p} (\alpha_p' E - r_f) \\ &= (\alpha' E - r_f) \left[1 - \rho \frac{\sqrt{\alpha' V \alpha}}{\sqrt{\alpha_p' V \alpha_p}} \frac{\alpha_p' E - r_f}{\alpha' E - r_f} \right] \end{aligned}$$

ここで

$$\rho = \frac{\alpha' V \alpha_p}{\sqrt{\alpha' V \alpha} \sqrt{\alpha_p' V \alpha_p}}$$

ρ は α_p と α との相関係数であるから $|\rho| \leq 1$ である。さらに定理の条件(3)より

$$0 < \frac{\sqrt{\alpha' V \alpha}}{\sqrt{\alpha_p' V \alpha_p}} \frac{\alpha_p' E - r_f}{\alpha' E - r_f} < 1$$

したがって、 $\alpha_p' E - r_f > 0$ ならば $\alpha' \delta > 0$ である。また $\alpha_p' E - r_f < 0$ ならば $\alpha' \delta < 0$ となる。

この定理によれば、リスク・ポートフォリオの期待収益率が安全利子率 r_f を超過した分、いわゆる期待リスク・プレミアム ($\alpha' E - r_f$) とリスク測定である標準偏差 $\sqrt{\alpha' V \alpha}$ の比率、すなわちリスクの価格が指標ポートフォリオのリスクの価格よりも大きくなるポートフォリオ(ただし $\alpha_p' E - r_f > 0$ のとき)を構成した場合、マネジャーは SML 分析の残差規準において高い評価が与えられることになる。では、この結果は効率的ポートフォリオを発見するマネジャーの能力とどのように関係しているのだろうか。

2. 残差規準による評価の曖昧性

まず定理 1 の意味をグラフを用いて考えよう。

先の $n-1$ 次のリスク・ポートフォリオに無危険証券を第 n 要素として加えた n 次ベクトルを α

とするとき、ポートフォリオ空間 S は

$$S \equiv \{\alpha | \alpha' e = 1\}$$

である。したがって、すべての実行可能なポートフォリオは R^n における $n-1$ 次元の超平面となる。さらに、すべての証券から構成される効率的なポートフォリオ集合 G は

$$G \equiv \{\alpha | \alpha \in S, \alpha \text{ は効率的}\}$$

ここで証券を危険証券のみに限定した、いわゆるリスク・ポートフォリオの場合は標準偏差一期待値平面(以降 $\sigma-\mu$ 平面と記す)で双曲線となり、危険証券に無危険証券を加えた場合、安全利子率 r_f を通りこの双曲線に接する直線となることが知られている。次に、 SML_p 直線上に存在するポートフォリオで、期待値を一定とすると分散の最小となるポートフォリオの集合を考える。

$$F \equiv \{\alpha | \alpha \in S, \alpha_{n-1}' \delta = 0, \alpha \text{ は効率的}\}^{4)}$$

ここで F は 2 つの制約条件をもつので、 S の $n-2$ 次元の部分空間である。グラフにおいて定理 1 の意味を知るためには次の定理が重要である。

第 n 要素がゼロとなる n 次ベクトル α を $n-1$ 次ベクトルと考えることにする。

〔定理 2〕 α_p を $\alpha_p' E \neq r_f$ となる $n-1$ 次の非効率的なリスク・ポートフォリオとする。そのとき、 F のリスク・ポートフォリオの集合は $\sigma-\mu$ 平面で双曲線となり、さらに G に属するリスク・ポートフォリオのうち分散の最小なポートフォリオ点で G のリスク・ポートフォリオ集合に接する。

Roll[4]によって G のリスク・ポートフォリオのうち最小分散ポートフォリオの期待収益率および分散は、 $E' V^{-1} e / e' V^{-1} e$ ならびに $1 / e' V^{-1} e$ となることが知られている。

定理 2 の証明は以下となる。 $R = \alpha' E$ が一定、 λ_1 と λ_2 をラグランジュ乗数とすると、次の L を最小化する。

$$\begin{aligned} L &= \alpha' V \alpha + \lambda_1 \left\{ R - r_f - \frac{\alpha' V \alpha_p}{\alpha_p' V \alpha_p} (\alpha_p' E - r_f) \right\} \\ &\quad + \lambda_2 (1 - \alpha' e) \end{aligned} \quad (43)$$

L の最小化の必要条件式を展開して F に属するポートフォリオ α が

$$\alpha = V^{-1}(E - r_f e, e) A^{-1} \begin{pmatrix} R - r_f \\ 1 \end{pmatrix}$$

を満たすことを得る⁵⁾。ここで $(E - r_f e, e)$ は $n \times 2$ の行列、さらに A は

$$A \equiv (E - r_f e, e)' V^{-1} (E - r_f e, e) = \begin{pmatrix} a & b \\ b & c \end{pmatrix}$$

ここで、 $a \equiv (E - r_f e)' V^{-1} (E - r_f e)$ 、 $b \equiv (E - r_f e)' V^{-1} e$ 、 $c \equiv e' V^{-1} e$ である。 V が正定符号行列、 E はその要素の値が少なくとも1つ他の要素と異なるベクトルであったから、 $(E - r_f e, e)$ のランクは2となる。したがって、 A は非特異で正定符号行列である。先のポートフォリオの $(\sigma - \mu)$ 平面における軌跡は

$$\begin{aligned} (\sqrt{\alpha' V \alpha})^2 &= (R - r_f) A^{-1} \begin{pmatrix} R - r_f \\ 1 \end{pmatrix} \\ &= \frac{c(R - r_f)^2 - 2b(R - r_f) + a}{ac - b^2} \end{aligned}$$

A が正定値行列から $a > 0$ 、 $ac - b^2 > 0$ 、したがって $c > 0$ であるから、 $(\sigma - \mu)$ 平面上の軌跡は双曲線となる。定理の後半の証明は上の双曲線を R について微分することによって、 $d(\sqrt{\alpha' V \alpha})/dR = 0$ として b 、 c の定義式を代入すれば、直接的に得られる。

かくて、 F および G に属するリスク・ポートフォリオの軌跡は図1のそれぞれ曲線 G_1 、 F_1 となる。無危険資産を含めた G は直線 G_2 、 F の場合は直線 F_2 となる。図1の直線 F_2 と曲線 F_1 はポートフォリオ α_p に対応する点で接する。ここで比率 $(\alpha_p' E - r_f) / \sqrt{\alpha_p' V \alpha_p}$ は、直線 F_2 の傾きそのものであるので、定理1によって $\alpha' \delta > 0$ となる範囲は、直線 F_2 の傾きよりも大きな傾きとなる図1でプラスを付した領域であり、同様に図1でマイナスを付した領域では $\alpha' \delta < 0$ となる。

以降、プラスを付した領域に話しを限定しよう。

効率的ポートフォリオ、すなわち直線 G_2 上のポートフォリオを発見するマネジャーは常にプラスに評価される。しかし、正の残差となるポートフォリオを構成したからといって、そのことは直

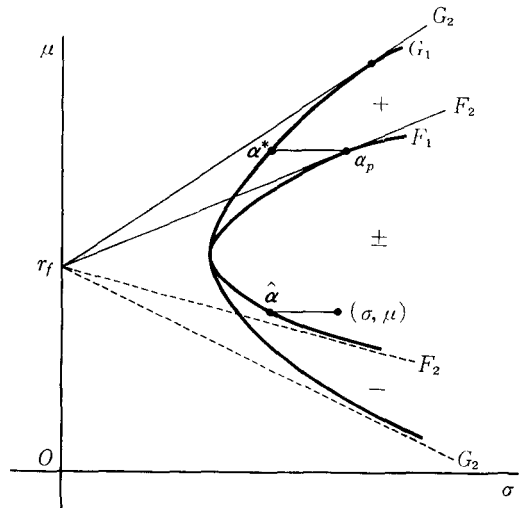


図 1

線 G_2 上のポートフォリオを発見したとはかぎらない。それでは、SML 分析の正の残差は、少なくとも直線 F_2 よりも効率的ポートフォリオに近い、図1における F_2 の上側のポートフォリオを発見したことを意味するのであろうか。この問題に対して以下の定理が解答を与えてくれる。

〔定理3〕 α_p を非効率的な指標ポートフォリオとし、 F に関して非効率的ポートフォリオに対して、あるものは SML_p すなわち直線 F_2 の上側（すなわち $\alpha^0 \delta > 0$ ）、他のあるものは SML_p の下側（ $\alpha^1 \delta < 0$ ）に位置すると判定されてしまう。

集合 F に関して非効率的なポートフォリオとは、期待値を同一とすると、 F よりも標準偏差の大きなポートフォリオであるから、図1の直線 F_2 の内側のたとえば点 (σ, μ) に対流するポートフォリオである。

定理3の証明をしておく。図1を参照しよう。 α^* を α_p と同一の期待値をもつ G に属するポートフォリオとする。定理1によって $\alpha^* \delta \neq 0$ である。 $\hat{\alpha}$ を期待値が μ である F に属するポートフォリオであるとしたとき、 $\hat{\alpha} + \lambda(\alpha^* - \alpha_p)$ は任意の実数 λ に対して μ に等しい期待値をもつポートフォリオである。ある $\lambda > 0$ に対してこのポートフォリオ

の分散 σ^2 となり、 $\{\hat{\alpha} + \lambda(\alpha^* - \alpha_p)\}'\delta = \lambda\alpha^*\delta > 0$ (なぜなら曲線 F_1 上のポートフォリオは $\alpha'\delta = 0$ であるから)。またある $\lambda < 0$ に対して、それは分散 σ^2 をもち $\lambda\alpha^*\delta < 0$ となる。

かくて、図1の土を付した領域に属するポートフォリオに対しても、SML分析によれば残差を正とする場合が存在する。したがって、SML分析における正の残差は、かならずしも効率的ポートフォリオ G か、それに近いポートフォリオの構成を意味しない。換言すれば、SML分析の残差が正になったとしても、それは定理1の条件式(3)の成立を保証しないということである。Sharpの尺度で指標ポートフォリオを優越するポートフォリオは、SML分析の残差においてもプラスとなるが、その逆は成立しない。そのことはSML分析の正の残差を用いて効率的ポートフォリオの発見能力を近似的にも判定することができないことを意味している。

反対に以上の議論からSML分析が積極的に主張しうるのは以下の点であろう。すなわち、SML分析における残差の負となるポートフォリオは図1のプラスを付した領域に属することは決してなく、したがって、かかるポートフォリオを構成するマネジャーに高い評価を与えることができない、といったことである。われわれが議論してきた諸前提のなかで、マネジャーの効率的ポートフォリオ発見能力を近似的に測定する尺度としてはSML分析の残差よりもSharpの尺度のほうが優れている。

おわりに

これまでの分析から容易に推察しうらうと思うがSML分析が成立する条件は、(i)無危険証券が存在すること、(ii)観察者が非効率的な指標ポートフォリオを用いること、さらに(iii)ポートフォリオ・マネジャーが効率的ポートフォリオで証券投資をすることの3条件であった。本稿での主な論議は、条件(i)および(ii)が成立し、さらにSML分析の残

差が正となることが、(iii)の成立を保証するか否かであった。答は否定的であったし、近似的ではあるが、ポートフォリオ・マネジャーの効率的ポートフォリオ発見能力を測度する尺度としては、Sharpの尺度のほうが優れているとの結論を得た。

では他の条件、とりわけ条件(i)を緩和したとしてもSharp尺度の有効性は維持されるのであろうか。無危険証券が存在しない場合には、もはや先の定理2は成立しないし、SMLを表わす(i)式の r_f は、Black[1]のゼロ・ポートフォリオの期待収益率 r_0 に変更されなければならない。さらに、厄介なことには、 r_0 は選択される指標ポートフォリオ α_p とともに変化する。このような状況においては、Sharp尺度は、かならずしも正しい尺度となりえない、という結果が得られている。すでに許された紙幅に達しているので、この点に関して他には機会があれば論ずることにしよう。

(注)

- 1) 拙稿(6)参照
- 2) $\alpha_p = (\alpha_{p1}, \dots, \alpha_{pn-1})'$. 無危険証券証券の投資比率が含まれる場合は第 n 要素となる。以降、特に断らないかぎりベクトルは列ベクトルであるとする。
- 3) 無危険証券についてのSMLは、(1)式の右辺第2項、リスク・プレミアムに相当する項がゼロとなるので、 $r_f = r_f$ となり残差が発生しない。それゆえ、ここでは無危険証券を除外したリスク・ポートフォリオのみを考えている。
- 4) α_{n-1} は第 n 要素を除外した $n-1$ 次ベクトルを意味する。
- 5) L 最小化の必要条件から次の式が導出される

$$\alpha = \frac{1}{2} V^{-1} (E - r_f e, e) \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \end{pmatrix}$$

この式をベクトル $(\lambda_1, \lambda_2)'$ について解くと

$$\frac{1}{2} \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \end{pmatrix} = A^{-1} \begin{pmatrix} R - r_f \\ 1 \end{pmatrix}$$

となるので、定理の証明で用いた式を得る。

参考文献

- [1] Black, F.,: Capital Market Equilibrium

with Restricted Borrowing. *Journal of Business*, Vol. 45 (1972)

[2] Dybvig, P. H. and Ross, S. A., : Differential Information and Performance Measurement Using a Security Market Line. *Journal of Finance*, Vol. 60, No. 2 (1985)

[3] ——— : The Analytics of Performance Measurement Using a Security Market Line. *Journal of Finance* Vol. 60, No. 2 (1985)

[4] Roll, R. : A Critique of the Assets Pricing Theories Tests—Part I : On Past and Potential Testability of the Theory, *Journal of Financial Theory*, Vol. 4 (1977)

[5] Sharp, W., : *Portfolio Theory and Capital Market*. New York : McGraw-Hill (1970)

[6] 斎藤 進 : 会計情報の情報効果テストの成立条件. 茨城大学政経学会雑誌. 第51号 (1986)

●ミニミニ●OR●

封筒のつかいみち

そもそも封筒というのは、書状を入れて郵送することを本来の用途とする。しかし応用自在。別の用途にかぎりは無い。特に、洋式の長辺の方にフタのついた封筒より、和式の短辺の方にフタがついているものの方が他の応用には都合がよいようだ。

手紙をもらったら、封筒を切りひらいて裏がわに返事の下書きをするのは序の口、図のように封筒の角を切りとって、読みかけの書物のしおりにすることもできる。ページのすみを‘袋’の中にさしこんでしまうのだ。

小型の計算機が複写機、ワープロ、カメラ等OR屋が部署で管理しなければならない、ちょっと高価な小道具類も、このごろでは数が多くなってきた。その1つ1つに保証書だの領収書だの使用説明書だのがついている。一応とっておかなければならない。

こんなとき、長型3号つまり120×235mmの茶封

筒に入れて、へりに内容を記して図書カードのように立てて箱にいれておけば、紛失しない上にいつでも必要なものがとり出せる。箱といっても、市販のビスケットやクッキーの缶には、この封筒をたてて入れるのにちょうどよい大きさのものがある。なかにはフタが缶の底にピッタリとはめられるものもある(例: ヨック・モック・チョコレート・シーガル)。

これなら、引き出しの底に缶のフタを逆さにして両面接着テープではりつけ、これに箱をはめておけば引き出しの中でガタつくこともない。一時箱をとり出すのも容易だ。試みられよ。(からくり堂主人)

