権利，契約の財務理論と情報

久保田　敬一

1. 概　説

証券とは，リスクをもつ流通する権利（または義務）証であると大まかに言えよう．また，財務におけるほとんどの契約は，当事者間の，リスク配分についての事前契約であると見なせる．さらに，リスクが確率分布により知られている完全情報の場合と，そうでない不完全情報の場合とでは最適な所有証券の組合せ（ポートフォリオ）や契約の形態も異なる．

証券は，ポートフォリオ理論により分散化投資することにより，そのリスクを軽減することができる．たとえば，契約などについても，これをポートフォリオの一部として組み込むことができれば，ポートフォリオ全体としてのリスク軽減問題にこれを単純化することができる．ただし，この契約の問題について本稿でとりあげるエージェンシーの理論では，通常2者間のリスク配分の問題としてこれが定式化される．また，本稿ではリスクをもつ証券の代表例として，取引者間のリスク配分が特にこの場合問題となるオプション証券をその代表的なものとしてとりあげ，さらにはその資本市場での評価の問題をもとりあげよう．

くぼた　けいいち　武蔵大学　経済学部
〒176　練馬区豊玉上1—26

2. リスクとエージェンシー契約

典型的な1期間1エージェントのエージェンシー契約とは，次のようなものである．まず，エージェント（agent）は，不確実性をともなう仕事を，プリンシプル（principal）から請け負おうとする．プリンシプルは，給与プランをエージェントに提示する．エージェントは，この契約に参加すればアクション（労働）の見返りとして生み出したペイオフのアウトカムの一部をプリンシプルから受けとり，正の効用を得る．そして，このような契約を両者が結ぼうとするとき，これをエージェンシー契約の問題とよぶのである．

経済，財務の現象でわれわれが目にするこのようなエージェンシー契約には，たとえば次のようなものがある．まず，経営者は，企業の持主であるプリンシプルたる株主にとってのエージェントとしてこのような契約を結んでいると考えられる．さらには，労働者は，経営者というプリンシプルにとってのエージェントである．また，政治家とは，有権者にとってのエージェントである．投資信託のファンド・マネージャーは，信託を購入する者にとってのエージェントであるなど，実例はいくらでも見られる．

また，保険契約も，損失を負のペイオフと考えれば，エージェンシー契約とも見ることができるが，これについては3章で検討するオプション契約とも関連するので，そこで検討する．

© 日本オペレーションズ・リサーチ学会．無断複写・複製・転載を禁ず．

いま，典型的なエージェンシー契約とは，次のように定式化される．ただし，ここではプリンシプルとエージェントが，不確実性についての真の確率分布の見積りを同じように有していると仮定される場合，すなわち完全情報のケースの場合を扱う．また，プリンシプルは，エージェントの効用関数を知っていると仮定され，さらに，エージェントはこの事前契約をエージェントにとっての最適契約として結んだ後は，この契約を経済合理的な意味で履行すると仮定される．

いま，エージェントのアクションを$a\epsilon A$，状態変数を$\theta\epsilon\Omega$とし，これらの関数としてペイオフが$\omega(a,\ \theta)$と表わされるとする．さらに，プリンシプルの効用関数(フォン-ノイマン型)を$U(\cdot)$，エージェントの効用関数を$V(\cdot)$，エージェントへの報酬(給与)支出額を$s(\cdot)$とし，支出額は，ペイオフのみによって決められるとしよう[1]．

すると，プリンシプルの効用は，$U(\omega(a,\ \theta)-s(\omega(a,\ \theta);\ \theta))$で与えられ，エージェントの効用は，$V(s(\omega(a,\ \theta);\ \theta)$となる．

このとき，両者にとってのパレート最適[2]な契約とは，次の最適化問題の最適条件を満たす支払関数$s^*(\cdot)$にもとづいた契約である．ただし，$\overline{K}$はエージェントを契約に引きつけるに足る，期待効用のレベルである．これは，たとえば経営者にとって同じような条件でオファーされる他社からの勧誘条件と考えればよい．

すると，エージェンシー問題は，

$$\max_{s(\cdot)} \quad E_\theta\,[U\,(\omega-s)] \tag{1}$$

$$\text{s.t.} \quad E_\theta\ V(s)\geq\overline{K} \tag{2}$$

$$E_\theta\ V'(s)\ s'\omega_a=0 \tag{3}$$

を解けばよい．この解については，3章の保険の例で検討するが，ここでの経済的意味は，不確実なペイオフをどのように，エージェント，プリンシプル間で最適に配分するかにある．そして，この配分は両者の危険回避度に依存することになるのである．

3. オプション契約と保険契約

不確実なペイオフがあるとき，それを元にその上にさらに書かれた契約のことを，contingent claim (条件付請求権)とよぶ．次に見るオプション契約は，その典型的なものである．さらには，日常観察できる保険契約も，このような contingent claim であり，かつオプション契約，保険契約とも一般的には，2章におけるエージェンシー契約の最適リスク配分契約のフレームワークでとらえられるものである．

オプションとは，ある期日(内)に，ある財または証券を一定の価格で買う(売る)ことのできる権利である．したがって，この契約の購入者は，この権利を行使するかしないかの自由度を有していることになる．米国においては，たとえば株式について，十分に発達したオプションの取引(流通)市場がある．また，後半で見るように保険もオプション契約と考えることができる．また，転換社債やワラント債も，同様にオプション証券の一種である．

オプションは，権利ではあるが，経済合理的な人間は，利益を生むときにのみこれを行使するであろうから，権利が行使されるかどうかは，そのペイオフを見ることによって完全にわかる．たとえば，ある期日に株式を一定の価格で買う権利のオプション（これをヨーロピアン・コール・オプションとよぶ）を考えてみよう．Sを株価（確率変数），Eを一定の取引約束価格(これを権利行使価格とよぶ)とすれば，このオプションをPの値段で今日買った人の期限日（満期）におけるペイオフは，

$$x=\begin{cases} S-E & ,\ \text{if}\ S\geq E \\ 0 & ,\ \text{if}\ S<E \end{cases}$$

で表わされる．そして，このオプションの当初の購入価格Pが，彼の最初における支払額であるから，これをxから差し引けば，オプション購入からのネットの利益は計算できる．そして，株価が

© 日本オペレーションズ・リサーチ学会．無断複写・複製・転載を禁ず．

権利行使価格を上回るときのみ，このオプションは行使され，行使されないときには，損失は，最初における購入価格に限定されることになる．

次に，保険契約のペイオフはどのように表わされるであろうか．いま，xを不確実な損失額($x\in[0,\ T]$, $T<\infty$)としよう．そして，$I(x)$を保険支払額，Pを与えられた保険料(プレミアム)とする．また，W_1を保険加入者の資産額，W_2を保険会社の資産額としよう．すると，保険加入者のペイオフは，$W_1-x+I(x)-P$，保険会社のペイオフは，$W_2-I(x)+P$で表わされる．

ここで便宜上，保険加入者をプリンシプル（不確実なペイオフの持主)，保険会社をエージェント($P-I(x)$の給与を受け取る)と見なせば(ただし，$x\in[0,\ T]$, $f(x)>0$ と仮定)，パレート最適な保険支払関数$I^*(\cdot)$ は，次の問題の最適解により与えられる[3]．

$$\max_{I(x)}\int_0^T U(W_1-x-(P-I(x)))f(x)dx \quad (4)$$

$$\text{s.t.}\ \int_0^T V(W_2+(P-I(x)))f(x)dx\geq\bar{K} \quad (5)$$

ただしこの場合，損失xが大きいとき，エージェントである保険会社はペナルティー（$P-I(x)<0$)を支払うことになるであろう．

この問題の解は，

$$L=U(\cdot)+\lambda V(\cdot) \quad (6)$$

より，

$$\begin{cases} U'-\lambda V'=0 & (7)\\ U''(I'-1)+\lambda V''I'=0 & (8)\end{cases},\quad \forall x$$

で表わされる．すなわち，

$$I^{*\prime}(x)=\frac{U''}{U''+\lambda V''}=\frac{\dfrac{U''}{U'}}{\dfrac{U''}{U'}+\dfrac{V''}{V'}} \quad (9)$$

となり，$U'>0$, $U''<0$, $V'>0$, $V''<0$を仮定すれば，$0<I^{*\prime}(x)<1$であり，損失xは，部分的にのみカバーされることが最適なリスク配分の契約であり，このとき両者がリスクを受けもつことになる．また，保険会社がリスク中立ならば，当然ながらすべてのリスクを保険会社が請け負うことになる（$V''=0\Rightarrow I^{*\prime}(x)=1\Rightarrow I^*(x)=x$)．

そして，この完全なカバー（full coverage)のときのペイオフは，保険加入者が$-x+(x-P)$で保険会社が$(-x+P)$であるので，これは前述のオプション契約でもある．すなわち，これはある一定の価格(ここでは権利行使価格ゼロ)でxを買うコール・オプションをPの購入価格で買ったペイオフになる(常に行使される)．さらには，より一般的な免責額を含む[4]保険契約では，この免責額が権利行使価格となるのである．

このように，オプション契約，保険契約に見られるようにプリンシプル，エージェント間の最適なリスク配分では，両者の危険回避度が最適契約の形に影響を与える．さらに，オプションの契約については，保険の full coverage のケースであるので，2者間の契約問題としてとらえれば，たとえばライター（売り手）が危険中立なときには，これはパレート最適な契約となる．しかし4章で述べるように，オプション証券は，市場（たとえば米国）で流通している証券であるので，これは2者の契約としてとらえるのではなく，各証券，銘柄に分散化投資をすることによりリスクを減らされるポートフォリオ資産の一部を構成すると見なすべきである．すなわち，このようなポートフォリオ・ミックスにより，資本市場という証券の流通市場を通して，個人の最適なリスクの減少は行なわれるのであり，この分散化原理を通じて投資家は最適リスク・レベルを達成できるのである．保険についても，やはりこれもポートフォリオの一部と考えられる．しかし，経営者と株主，また労働者と経営者などの契約においては，その給与受取のリスクは他とのミックスによっては分散しきれないような大きさであると考えられるので，契約自体の最適リスク配分がこのときにはより問題となる．

© 日本オペレーションズ・リサーチ学会．無断複写・複製・転載を禁ず．

4. 資本市場とブラック・ショールズ (Black and Scholes) のオプション評価モデル (Option Pricing Model: OPM)

オプションの価格を資本市場理論の中で明らかにしたのは，ブラックとショールズである([1])．かれらの用いた方法は，裁定(arbitrage) 条件というもので，株式とオプションをある比率で組み合わせれば，リスクのないポートフォリオを組めかつそのポートフォリオは，市場で流通しているリスクのない証券(たとえば，定期預金)の金利と等しくならなければならない（さもなければ，裁定がおこり，市場で価格調整が行なわれる）という性質を利用したものである．

いま，連続時間モデルにおいての与えられた金利を r[5]，株価を x，コール・オプションの価格を ω としよう．さらに，株価の変化は連続拡散過程にしたがうとしよう．ここで，μ，σ は，株式の変化率の期待値と標準偏差であり，W はウイナー過程である．

$$dx=x\mu dt+x\sigma dW \tag{10}$$

ここで，オプション価格は，株価と満期日（権利行使の日)のみの関数と通常は考えてよいので，$\omega(x,t)$ とし，満期日を T，今日を t としよう．すると，満期日におけるオプションの境界値条件は，E を権利行使価格とすれば，

$$\omega(x,T)=\max[x(T)-E,O] \tag{11}$$

により表わされる．

$\omega(x,t)$ を伊藤の定理を用いて展開すると，

$$d\omega=(\omega_t+\frac{1}{2}\sigma^2 x^2\omega_{xx}+\omega_x\mu x)dt+\omega_x\sigma x dW \tag{12}$$

を得る．

ここで，リスクのないポートフォリオを作るためには，dW の項を消去すればよい．投資額にその利回りを掛けたものが利益であるから，株式を x 額購入し，オプションを ω/ω_x 額，空売りしたポジションは，$x(dx/x)-(\omega/\omega_x)(d\omega/\omega)$ だけの利益を生む．すると，(10)式，(12)式よりこのようなポジションの利益額は，dW の項が消去され，$(\mu x-(\omega_t+\frac{1}{2}\sigma^2 x^2\omega_{xx}+\omega_x\mu x)/\omega_x)dt$ により表わされる．このとき，μx の項は消去される．そして，裁定条件よりこのポジションは安全な収益を生むので，この利益は安全な金利を用いて表現すれば，$(x-\omega/\omega_x)rdt$ とも表わせる．つまり，

$$-(\omega_t+\frac{1}{2}\sigma^2 x^2\omega_{xx})/\omega_x=(x-\omega/\omega_x)r \tag{13}$$

より，

$$-\frac{1}{2}\sigma^2 x^2\omega_{xx}-r\omega_x x-\omega_t+r\omega=O \tag{14}$$

が求める $\omega(x,t)$ についての偏微分方程式なので，(11)式の境界条件を用いてこれを解けば([1])，

$$\omega(x,t)=x\,N(d_1)-E\exp[-r(T-t)]N(d_2) \tag{15}$$

$$d_1=\frac{\ln x/E+(r+\frac{1}{2}\sigma^2)(T-t)}{\sigma(T-t)} \tag{16}$$

$$d_2=\frac{\ln x/E+(r-\frac{1}{2}\sigma^2)(T-t)}{\sigma(T-t)} \tag{17}$$

となる．ただし，$N(\cdot)$ は標準正規分布の累積密度である．

これが，資本市場で流通するオプション証券を評価する，有名なブラック・ショールズの式(OPM)であり，(15)式はオプションの期待終値価値の現在価値と考えてよい．ここで，この式の重要な性質とは，価格を決めるのは，株価の変動リスク σ であり，平均的な値上り率 μ は関係しないという点と，証券を売買する投資家の効用関数 ($U(\cdot)$) のパラメーターが入らない2点である．これはリスクのないヘッジ・ポートフォリオを組んだことから生じてきたのであり，特に後者の点は，このモデルによるデータ分析（効用関数は測定できない）を容易にしており，CAPM (Capital Asset Pricing Model)，APT (Arbitrage Pricing Theory) と並んで OPM が普及している大きな原因であると言える．

© 日本オペレーションズ・リサーチ学会．無断複写・複製・転載を禁ず．

5. 不完全情報におけるエージェンシー契約と資本市場

3章までは，プリンシプルにとって，エージェントの行動やペイオフのアウトカムは完全に観察できるという仮定の場合を述べてきた．したがって，不確実性は，ペイオフを支配する確率法則のみであり，これは，完全に知られているものとされた．しかし通常，エージェントは現場をよりよく知る立場にいるのであるから，より多くの内部情報をもっている場合もあるであろうし，さらにプリンシプルがエージェントが怠慢に行動しなかったかどうかを知ることができないような場合も多くあろう．これらは，不完全情報のケースであり，3章までとは異なる最適契約が結ばれなければならないし，多くの場合，この契約も完全情報の場合に比して second best のものとなる．しかしながら，その中でも，観察可能な追加情報(シグナル）が存在するときには，その情報にもとづく新たな契約が，その情報を用いない契約よりもパレートの意味で改善されたものとなり得ることを示すことができる．

たとえば，[3]では，エージェントのアクションをプリンシプルは知ることができないが，ペイオフのアウトカムについては両者ともに観察できる場合について分析がされている．通常，アクションが観察できない場合においては，エージェントの側にモラル・ハザードがおこり，セカンド・ベストの解しか得られないのであるが，アクションについての情報をある程度伝えることのできるようなシグナルが存在すれば，これを少なくとも改善(セカンド・ベストに変りはない)できるのであり，[3]ではこのための条件が示されている．

すなわち，いま y をシグナル，W をエージェントのアクション(労働)からの負の効用(加法的)とすれば，このエージェンシー契約問題は，次のように書ける．

$$\max_{s(x)\in[c,d+x],\,a} \int U(x-s(x,y))\,f(x,y,a)\,dx\,dy \tag{18}$$

s. t.

$$\int (V(s(x,y)-W(a))f(x,y,a)dxdy \geq \overline{K} \tag{19}$$

$$\int V(s(x,y))f_a(x,y,a)dx\,dy = W'(a) \tag{20}$$

このラグランジュ乗数をおのおの λ, μ とすれば，最適配分ルール $s(x,y)$ は，

$$\frac{V'(x-s(x,y))}{U'(s(x,y))} = \lambda + \mu\frac{f_a(x,y,a)}{f(x,y,a)} \tag{21}$$

により与えられる．ここに，$\mu>0$は，アクションについての制約条件(20)式の付加的貢献度を表わすが，その係数 f_a/fは，定数ではなく，(21)式の配分がセカンド・ベストであることを示している([3] p.78)．しかし，f_a/fは，アウトカム x とシグナル y，そして観察され得ないアクション a との関数なので，ここに注目すれば，$f_a/f=g(x,a)$ と書くことのできない場合にのみ，実はシグナルは有用であり得る．すなわち，シグナル y を用いないとき(f_a/f が x のみにもとづいている場合)に導びかれる最適契約 $s^*(x)$ ((21)式で y がなく，退化した場合）よりも，セカンド・ベスト解の中でシグナルを用いたより良い契約 $s^*(x,y)$ が存在することが証明できる([3]，Proposition 3)．

ただし，上では，シグナルは両者ともに観察できるのであったが，通常の場合，エージェントのみが内部情報をもつと考えられるので，エージェントによるプリンシプルへの内部情報の報告の真偽性，有用性がこのときには問題となる．[2]においては，このような場合に，エージェントがシグナルについての真の報告を行ない，かつそのようなコミュニケーションにもとづいた契約がそれを用いない契約よりもベターであり得るための条件が示されているがここでは省略する．

最後に，資本市場において，投資家である株主（プリンシプル）と経営者（エージェント）とが会計情報のような報告制度を通して内部情報を受け渡しする状況は，この不完全情報のケースであ

© 日本オペレーションズ・リサーチ学会．無断複写・複製・転載を禁ず．

ることに注意しておこう．すなわち，xは企業のキャッシュ・フロー，yは会計報告利益，aは業績責任を負う経営者のアクションと見なせる．そして，このような資本市場での情報(シグナル)の伝達問題とは，セカンド・ベストの中で，より改善される契約を生み出すためのモニターとして会計情報が機能しているかどうかに帰結すると言えよう．特に，十分なポートフォリオ的リスク分散を給与受取については行なえない経営者，またその企業に多額の投資を行なっているそのリスクのポートフォリオにおけるウェイトの高い株主にとっては，このようなリスク配分と情報伝達の問題のエージェンシー理論からのアプローチは，かれらの最適行動にとって欠くことができない．

〔注〕

1) θ，あるいはaを含めた契約は，この定式化では，$f(\omega(\cdot))$のみの契約と同じことである（すなわち，同等なforcing contractが作れる）．

2) ただし，この契約がパレート効率的であるとは限らない([5])．

3) Pをも含めた最適条件については，[4]を見よ．

4) 免責契約がパレート最適となるための条件についても[4]を見よ．

5) 連続時間モデルにおける安全な利子率が資本市場均衡において時間とともに一定（$r(t)=r$）であるための条件については，[6]，第3章を見よ．

参考文献

[1] Black, F. and Scholes, M.: The Pricing of Options and Corporate Liabilities. *Journal of Political Economy*, Vol.81, No.3(1973), 637-659

[2] Dye, R.: Communication and Post-Decision Information. *Journal of Accounting Research*, Vol. 21, No.2(1983), 514-533

[3] Holmstrom, B.: Moral Hazard and Observability. *Bell Journal of Economics*, Vol. 10, No.1(1979), 74-91

[4] Raviv, A.: The Design of an Optimal Insurance Policy. *The American Economic Review*, Vol.69, No.1(1979), 84-96.

[5] Ross, S.: The Economic Theory of Agency: The Principal's Problem. *The American Economic Review*, Vol.63(1973), 134-139

[6] 諸井，若杉編「現代経営財務論」東大出版会(1984年3月)

●ミニミニ●OR●

砂利運搬笊（ざる）

朝夕の通勤電車の中から，ときおり「線路工事」の現場が見えるときがある．線路には通常，枕木が横たわっており，その間に砂利が敷いてある．工事のはじめに，まずこの砂利を取り除き，工事の終了時に再びこの砂利を敷き戻さなければならない．そして，この砂利の運搬はもっぱら人力にたよらねばならず，大変のようである．どんな道具を用いて，いちどにどれほどの量を運搬したら効率的か．ORの1つの教材になりそうな問題です．

丈夫な入れ物は一般的にそれ自身重いだろうし，軽い入れ物では，砂利の重量に耐えられるかどうか，強度の心配をしなくてはならないだろう．また「数人共同でいちどに多量」に運搬するのか，「各人1人ずつ少量」にするか，「リレー式」に運搬するのか，難題のように思います．

実際の工事現場では，誰が考えついたか「両手でかかえられるほど」のプラスチック（青色）の笊が使われていました．この笊に砂利を満載しても1人でかかえられる重量であり，またプラスチックの強度の限度内のようです．この笊をもう少し大きくし，強度を強くしたとしても，満載した砂利を1人で運搬するのに苦痛になるだろうし，小さくては効率的に不都合のようです．さらにこのプラスチックの笊は，安価に作られている物のようで，まさに最適な道具のようです．

年末や年度末になると，このような線路工事や道路工事が頻繁に見られるようです．（I）

© 日本オペレーションズ・リサーチ学会．無断複写・複製・転載を禁ず．