情報および期待と証券価格

仁科　一彦

本稿の目的は将来の予想もしくは期待にもとづいて形成される証券価格について，現在の資本市場理論がどのように接近しているかを簡単に紹介するものである．本来，将来に関する約束事を記した一片の契約を，市場に参加する多くの取引主体がそれぞれの期待にもとづいて価格を決定するのが証券価格の特性である．予想や期待の形成は別の表現をすれば情報の処理であり，証券の価格は数多くの取引主体による情報処理の結果を反映したものであるといってよい．

資本市場の理論は情報の取り扱いについて多くの工夫や貢献を提供してきた．市場の参加者の処理する情報はそれぞれの経済意思決定において，期待や予想という形をもって影響を与えるものである．そこで証券価格の形成における情報の問題は，取引主体の側からみれば，期待や予想の問題とみることができる．経済学における期待や予想の役割は証券価格の理論をまつまでもなく，古くからの重要なテーマであった．投資や貯蓄あるいは消費といった経済意思決定の中心的な問題がすべて期待や予想となった要因を含んでいることはいうまでもないことであろう．

以下では証券価格の形成に関して，期待や予想を明示的に扱った理論を紹介する．すでに述べたとおり，価格の形成において期待や予想の与える影響が圧倒的に大きいということは，理論の帰結が期待や予想に関する仮定に依存する可能性が強いことを示唆する．期待や予想についてどのような把握をするかやどのような仮定を設けるかが理論の導く結果を左右するのである．その意味で，提供された理論の本質を理解するためには，置かれた前提を正確に理解することが不可欠な条件となる．

本稿の性格から判断して，期待や予想の仮定に関する学説史的な特徴や詳細な考察よりも，それらの仮定を理論がどのように利用しているかを紹介することが望ましいと考えられる．そこで以下で紹介する理論は，期待や予想に関する仮定を明示的に扱ったモデルとして代表的なものを選ぶことにしたい．

Samuelsonによる株価のマーティンゲイルモデル

ここでは上記の性質を備えた理論の代表として，サムエルソン(P. A. Samuelson)による株価のマーティンゲイル・モデルを紹介することにしたい．

そのための準備として，マーティンゲイル(Martingale)とよばれる重要な確率過程について簡単に説明する．

$X_1, X_2, \cdots$ を一般の確率空間 $(\Omega, \mathscr{F}, P)$ において定義される確率変数の集合とし，$\mathscr{F}_1, \mathscr{F}_2, \cdots$ を $\mathscr{F}$ に属するシグマ族の集合とする．この時，

にしな　かずひこ　大阪大学　経済学部
〒560 豊中市待兼山町1－1

© 日本オペレーションズ・リサーチ学会．無断複写・複製・転載を禁ず．

もしすべてのnについて事象列$\{X_n, \mathscr{F}_n), n=1, 2, \cdots\}$が次の4つの条件を満たす場合に，この事象列はマーティンゲイルとよばれる．

条件(1)　$\mathscr{F}_n \subset \mathscr{F}_{n+1}$

条件(2)　X_nは可測(measurable)である．

条件(3)　$E[|X_n|]<\infty$

条件(4)　$E[X_{n+1}|\mathscr{F}_n]=X_n$. $w.p.1$.

条件(1)は，事象列$\{\mathscr{F}_n\}, n=1, 2, \cdots$が$\mathscr{F}$に含まれるシグマ族の単調増加列であることを意味する．すなわち，シグマ族$\{\mathscr{F}_n\}$の列に含まれる情報の量は単調に増加する性質をもつ．この性質は証券市場における価格形成に関与する情報の集合列を表現するために非常に有効であることが知られている．市場の参加者が保有する情報量は，過去のある時点からt期までより，$t+1$期までの方が多くなるというものである．$t+1$期までの経過期間には，t期までの経過期間よりも多くの事象や情報あるいは歴史が含まれるともいえよう．単調増加のシグマ族$\{\mathscr{F}_n\}$によって表わされる情報構造は learning without forgetting という性質を備えているものでもある．

次に，$\{\mathscr{F}_n\}$が$X_1, X_2, \cdots, X_n$から作られたシグマ族であれば条件(2)は一般的に成立しているといってよい．Yが$X_1, X_2, \cdots$と同じ標本空間に定義される確率変数の時，$Y, X_1, X_2, \cdots, X_n$からなるシグマ族を$\sigma(Y, X_1, \cdots, X_n)$で表わすと，

$$\sigma(X_1, \cdots, X_n) \subset \sigma(Y, X_1, \cdots, X_n)$$

であり，$X_1, \cdots, X_n$は$\sigma(Y, X_1, \cdots, X_n)$においても可測である．Famaがいわゆる効率的市場仮説において情報集合の特性を表現するためにこのようなシグマ族を用いたことは容易に理解できることであろう．

条件(3)は有限な期待値の存在を要求するものにほかならない．

条件(4)は

$$\int_A E[X_{n+1}|\mathscr{F}_n]dp=\int_A X_n dp, \quad A\in\mathscr{F}_n, \quad n=1, 2, \cdots$$

と同値である．一方，シグマ族の条件は期待値に関する性質から，

$$\int_A E[X_{n+1}|\mathscr{F}_n]dp=\int_A X_{n+1}dp, \quad A\in\mathscr{F}_n$$

である．これらを用いると，

$$\int_A X_{n+1}dp=\int_A X_n dp, \quad A\in\mathscr{F}_n$$

を得る．これは条件(4)にほかならない．同様に，

$$\int_A X_n dp=\int_A X_{n+1}dp=\cdots=\int_A X_{n+k}dp,$$
$$A\in\mathscr{F}_n\subset\mathscr{F}_{n+1}\subset\cdots\subset\mathscr{F}_{n+k}, k\geq 1$$

である．

そこで条件(4)は

$$E[X_{n+k}|\mathscr{F}_n]=X_n$$

とも表わせる．

マーティンゲイルの例として独立な確率変数の和と分散を考えてみる．

$Y_0=0$で$Y_1, Y_2, \cdots$を独立な確率変数とする．この時$E[|Y_n|]<\infty$，かつ$E[Y_n]=0$ for all nとする．もし$X_0=0$で$n\geq 1$なるnに対して$X_n=Y_1+Y_2+\cdots+Y_n$とすれば，確率過程$\{X_n\}$はマーティンゲイルになる．

（証明）

$$E[|X_n|]\leq E[|Y_1|]+\cdots+E[|Y_n|]<\infty$$

$$\begin{aligned}
&E[X_{n+1}|Y_0, \cdots, Y_n]\\
&\quad=E[X_n+Y_{n+1}|Y_0, \cdots, Y_n]\\
&\quad=E[X_n|Y_0, \cdots, Y_n]+E[Y_{n+1}|Y_0, \cdots, Y_n]\\
&\quad=X_n+E[Y_{n+1}]\\
&\quad=X_n
\end{aligned}$$

次に，$Y_1, Y_2, \cdots$が前と同様に独立であり，かつ同一の確率分布にしたがう確率変数であるとしよう．また$E[Y_k]=0$かつ$E[Y_k^2]=\sigma^2$ for all kとする．この時

$X_0=0$および

$$X_n=\left(\sum_{k=1}^{n} Y_k\right)^2-n\sigma^2$$

とすると，

$$E[|X_n|]\leq 2n\sigma^2<\infty$$

$$\begin{aligned}
&E[X_{n+1}|Y_0, \cdots, Y_n]\\
&\quad=E\left[\left(Y_{n+1}+\sum_{k=1}^{n} Y_k\right)^2-(n+1)\sigma^2|Y_0, \cdots, Y_n\right]
\end{aligned}$$

© 日本オペレーションズ・リサーチ学会．無断複写・複製・転載を禁ず．

$$=E\Big[Y_{n+1}{}^2+2Y_{n+1}\sum_{k=1}^{n}Y_k+\Big(\sum_{k=1}^{n}Y_k\Big)^2$$
$$-(n+1)\sigma^2|Y_0,\cdots,Y_n\Big]$$
$$=X_n+E[Y_{n+1}{}^2|Y_0,\cdots,Y_n]$$
$$+2E[Y_{n+1}|Y_0,\cdots,Y_n]\Big(\sum_{k=1}^{n}Y_k\Big)-\sigma^2$$
$$=X_n$$

以上より，確率過程 $\{X_n\}$ はマーティンゲイルにしたがうことが証明された．

次にマーティンゲイルの性質を証券価格（株式価格）に反映させた代表的な例として，Samuelson, P. A のモデルを紹介することにしたい．なおこのモデルは Samuelson P. A., "Proof that Properly Discounted Present Value of Assets Vibrate Randomly, Bell Journal of Economics and Management Science (1973), pp. 369～374 に発表され，Malliaris A. G. が解説したものである．

ある株式に対して t から $t+T$ までの期間に払うことが予想されている配当の流列を

$$x_t,\cdots,x_{t+T}$$

とする．割引率は r で一定とする．ここで x_{t+i} の流列に不確実性を与える前に，将来価値の割引きという概念を導入する．$x_t,\cdots,x_{t+T}$ が確実な値の流列であれば，将来価値の割引現在価値として当該株式の t 期における値 V_t を次のように求めることができる．

$$V_t=\sum_{T=1}^{\infty}\frac{x_{t+T}}{(1+r)^T} \tag{1}$$

同様に

$$V_{t+1}=\sum_{T=1}^{\infty}\frac{x_{t+1+T}}{(1+r)^T}=\sum_{T=2}^{\infty}\frac{x_{t+T}}{(1+r)^{T-1}} \tag{2}$$

である．これらより

$$V_t-\frac{V_{t+1}}{1+r}=\frac{x_{t+1}}{1+r}$$

を得るが，これは次のようにも表現できる．

$$V_{t+1}=(1+r)V_t-x_{t+1} \tag{3}$$

t 期における次期の価格 V_{t+1} は，利子率と t 期の価格および次期に支払われる配当の関数として表現されるのである．もし割引率が配当利まわりに等しければ（${}_rV_t=x_{t+1}$ なら），$V_{t+1}=V_t$ となり，株価は一定となることは明らかであろう．

次に配当流列が不確実な場合を検討する．$(\Omega,\mathscr{F},P)$ を確率空間とし，$x_t,\cdots,x_{t+T}$ を不確実な配当を表わす確率変数の列とする．すべての確率変数 x_{t+T}, $T=1,2,\cdots$ は有限な条件付期待値をもつものとする．$\mathscr{F}$ に含まれるシグマ族の列は $\mathscr{F}_{t+T}$ で表わし，それらは少なくとも

$$\sigma(x_t,\cdots,x_{t+T})\subset\mathscr{F}_{t+T}$$

という性質をもつものとする．この性質は株式市場に参加する投資家が少なくとも当該株式に支払われた過去の配当については知っていることを意味する．まず(1)式を一般化して

$$v_t\equiv E[V_t|\mathscr{F}_t]$$
$$=E\Big[\sum_{T=1}^{\infty}\frac{x_{t+T}}{(1+r)^T}\Big|\mathscr{F}_t\Big]$$
$$=\sum_{T=1}^{\infty}\Big(E\Big[\frac{x_{t+T}}{(1+r)^T}\Big|\mathscr{F}_t\Big]\Big) \tag{4}$$

同様に(3)式についても一般化する．

$$v_{t+1}\equiv E[V_{t+1}|\mathscr{F}_{t+1}]$$
$$=E\Big[\sum_{T=2}^{\infty}\frac{x_{t+T}}{(1+r)^{T-1}}\Big|\mathscr{F}_{t+1}\Big] \tag{5}$$

ここでシグマ族の条件付期待値に関する定理

$$E[XY|\mathscr{F}_k]=XE[Y|\mathscr{F}_k]\quad w.p.1$$

を用いて，(4), (5)より

$$E[v_{t+1}|\mathscr{F}_k]$$
$$=E\Big[E\Big[\sum_{T=2}^{\infty}\frac{x_{t+T}}{(1+r)^{T-1}}\Big|\mathscr{F}_{t+1}\Big]\Big|\mathscr{F}_t\Big]$$
$$=E\Big[\sum_{T=2}^{\infty}\frac{x_{t+T}}{(1+r)^{T-1}}\Big|\mathscr{F}_t\Big]$$
$$=E\Big[\Big(\pm x_{t+1}+\sum_{T=2}^{\infty}\frac{x_{t+T}}{(1+r)^{T-1}}\Big)\Big|\mathscr{F}_t\Big] \tag{6}$$

を得る．さらに，両辺に $\frac{1}{(1+r)}$ を乗じ，(4)式の v_t を代入すると

$$E[v_{t+1}|\mathscr{F}_t]=(1+r)E\Big[\sum_{T=1}^{\infty}\frac{x_{t+T}}{(1+r)^T}\Big|\mathscr{F}_t\Big]$$
$$-E[x_{t+1}|\mathscr{F}_t]$$

© 日本オペレーションズ・リサーチ学会．無断複写・複製・転載を禁ず．

$$=(1+r)v_t-E[x_{t+1}|\mathscr{F}_t] \qquad (7)$$

となる．(7)式は(5)式の確率的一般化である．

もし，

$$rv_t=E[x_{t+1}|\mathscr{F}_t]$$

であれば，

$$E[v_{t+1}|\mathscr{F}_t]=v_t$$

であるから，$v_t,\cdots,v_{t+T}$ はマーティンゲイルであることがわかる．すなわち，割引率が株式の期待収益率に等しい場合に株式価格はマーティンゲイルにしたがうのである．株式市場における投資率の期待が，過去の事象についての情報を蓄積したうえで，株式の期待収益率で将来配当を割引く形で作用すれば株式価格はマーティンゲイルにしたがう過程として表現されるのである．

以上をまとめると，一定の割引率が

$$r=E[x_{t+1+T}|\mathscr{F}_{t+T}]/v_{t+T} \qquad (8)$$

の時に株式価格 v_{t+T}, $T=1,2,\cdots$ はマーティンゲイルにしたがう．

(8)式において等号が不等号（≧）に変われば v_{t+T}, $T=1,2,\cdots$ はサブマーティンゲイル（sub-martingale）であることは容易に判明する．すなわち，

$$E[v_{t+1+T}|\mathscr{F}_{t+T}]=v_{t+T}+\left(r-\frac{E[x_{t+1+T}|\mathscr{F}_{t+T}]}{v_{t+T}}\right)v_{t+T}\geqq v_{t+T}$$

である．サブマーティンゲイルの場合には，次期に予想される株価の条件付期待値は，現在(今期)の株価より小さくはならない．なぜなら，株式の条件付期待収益率が割引率よりも大きくならないからである．

最後に，株式市場に参加する投資家の期待形成について，より立ちいって検討しておく必要がある．というのは，これまでの展開において配当の流列 $x_t,\cdots,x_{t+T}$ に条件付期待値が存在することを暗黙に前提してきたが，この確率過程の形成，いいかえれば投資家による情報の処理とそれにもとづく予想の形成については外生的に与えてきたのである．

たとえば，ある投資家が与えられた情報のもとで確率変数の列 $y_t,\cdots,y_{t+T}$ として表現される主観的な予想を形成したとする．y_{t+T}, $T=1,2,\cdots$ は彼の予想する T 期後の収益率である．このような想定では，y_{t+T} と x_{t+T} の間に何らかの関係を与えなくてはならない．期待形成に関する代表的なアイデアとしては，ミュース(Muth)による「合理的期待形成仮説」(Rational expectation hypothesis)や，サムエルソンの「期待形成の公準」(Axiom of expectation formation)がある．これらにしたがえば，

$$y_{t+T}=E[x_{t+T}|\mathscr{F}_t]$$

という関係を導くことも可能である．この関係にしたがえば，個々の投資家の主観的な予想形成を株式市場における客観的な予想形成に結びつけることが可能になるのである．このような手続きによって，個人の予想を市場における価格形成に関与する期待形成にまで発展させ，株式価格の経路を導出するひとつの方法論が提供されることも考えられるのである．

以上は確率過程をマーティンゲイルに限定して，情報とそれにもとづく期待の形成，さらには予想される（導出された）株式価格の経路を検討した例である．株式市場に参加する投資家の予想がどのようなものであり，それをいかなる確率過程で表現するのが適切であるかという問題は決して容易に解の得られるものではない．あるいは，予想や期待がそもそも外生的に与えられていいものか否かも多くの問題を提供するテーマである．たしかにこれまでわずかではあるが期待に関して成功したアイデアも提供されている．しかし，本稿で紹介したモデルも含めて，期待に関する議論や研究は未だ発展段階にあると断定してもよい状況である．

© 日本オペレーションズ・リサーチ学会．無断複写・複製・転載を禁ず．