

パラメトリック・モデリング

——NLP ソフト: GINO を汎用経営計算プログラムに利用する——

青沼 龍雄

1. コンピュータのために能率が下がる

「計算したいことがあったらプログラムを書けばよい」と言われても面倒だったり、かえって能率が下がるためにコンピュータの利用を放棄してしまった経験がありませんか？ パソコンの対話機能と対話型ソフトGINO (General Interactive Optimizer) を利用して、経営計画に出てくる計算問題を、いわゆる能率の下がるプログラミング作業をせずに計算したい「せっかち症横着族」向けのお話をしたい。

学生に意思決定論演習をさせていて、よく「これがちょっと…変ったときに結果は、いったいど

あおぬま たつお 神戸商科大学管理科学科
〒655 神戸市垂水区星陵台4-3-3

うなるの？」といった What-if 型分析の質問をしても、なかなかコンピュータに向かって分析する者はいない。Basic, Fortran, PL/I は使いこなせるし、暇も充分もち合わせている。理由は、やはり面倒くさくて能率が悪い、である。What-if 型の分析では計算ロジックは簡単でも、与えられるもの、求めたいものが多様になりうるので、教師にはめられるプログラムを用意するには、ちょっと身構えてシステム設計などをしなくてはならない。分析結果を知る主目的が、つい1回きりしか使用しないプログラム作りに精を出しすぎて、ふりかえてみると時間的損失が大きかったということだろう。オフィス内のパソコンも、あんがいこんな理由で身近の簡単な分析問題への適用から敬遠されることはないでしょうか？

連載に当って

パソコン (パーソナル・コンピュータ) の最近の普及はめざましく、すでに、そろばんやタイプライタのように、パソコンを使いこなしておられるORワーカーも多いことであろうし、近いうちに導入しようと考えておられる方も少なくないことであろう。そこで、本号より6回に分けて、ORのためのパソコン用のプログラムの紹介やパソコンを用いたOR活動の報告など、パソコンを利用するORワーカーに役立つ話題を連載する。

古林 隆 (埼玉大学)

計算プログラム作成作業の面倒くささは、①入出力変数の特定、②変数間の計算順序の設定、が大きなウェイトを占める。非線形計画プログラムGINOをこの面倒くささから解放されるために利用してみたい。GINOでは変数間の関係式を計算順序を無理して思いつくまに記述し、また変数に既知データがあれば、これを関係式の一部として記述する。標準的な確率分布表などの数値表からもデータがとり出せるので、身近にあるたいいていの What-if 型分析問題はプログラムの作成なしに計算できる。

2. 対話機能を生かすためのパラ メトリックモデリングのすすめ

自分の計算したい関係を算術式で記述するモデリングの段階では、関係項目はできるだけ変数として記述する。どの変数の値が後から与えられ、どの変数値が最終的に求めるものかはあまり考えない。これで対象の中の各項目間の関係構造が変数記号として記述される。たとえば、単純化した企業の会計計算の構造を書いてみよう。

$$[\text{変動費}] = [\text{生産高}] \times [\text{変動比率}] \quad (1)$$

$$[\text{労務費}] = [\text{人数}] \times [\text{賃金水準}] \quad (2)$$

$$[\text{その他経費}] = [\text{売上高}] \times [\text{経費率}] \quad (3)$$

$$[\text{売上原価}] = [\text{変動費}] + [\text{労務費}] + [\text{その他経費}] \quad (4)$$

$$[\text{営業利益}] = [\text{売上高}] - [\text{売上原価}] \quad (5)$$

ここで [] で表わされている部分は、対象項目であると同時にこの段階ではどれが先にわかっているかなどは考えずにすべ

て変数と見做している。しかし、ある種の計算の目的をもっている人にとっては、どの項目が既知かはわかっているはずで、後にその目的に応じて値を指定する。すなわち、**対話モデリング**を行なうのである。

たとえば、式(1)で、[変動費]と[生産高]の値をもっている人にとっては、変動比率を計算したいことを意味するであろう。将来の企業収益をみるシミュレーションや予測モデルとしての利用目的では変動比率に標準値が設定されることになる。どれかは「当座の変数」であって後に目的に応じて値が設定されるこの種のモデルを**パラメータ・モデル**と呼ぼう。

変動比率 $VCR = 20\%$ 、その他経費率 $MCR = 10\%$ 、賃金水準 $WAGE = 10$ 、人数 $MAN = 300$ で、生産高 $= 5000$ 、売上高 $= 5500$ のときの他の項目を計算してみよう。対応する変数を英文字で表わした GINO モデルは図2.1に示される。1)~5)

```
MODEL:
1) VCONST = PRD * VCR ;
2) LCONST = MAN * WAGE ;
3) MCONST = SALE * MCR ;
4) TCONST = VCONST + LCONST + MCONST ;
5) PROFIT = SALE - TCONST ;
6) VCR = 0.2 ;
7) MCR = 0.1 ;
8) WAGE = 10 ;
9) MAN = 300 ;
10) PRD = 5000 ;
11) SALE = 5500 ;
END
```

図 2.1(i) パラメータ・モデル

SOLUTION STATUS: FEASIBLE TO TOLERANCES.

VARIABLE	VALUE
VCONST	1000.000015
PRD	5000.000000
VCR	.200000
LCONST	3000.000000
MAN	300.000000
WAGE	10.000000
MCONST	550.000008
SALE	5500.000000
MCR	.100000
TCONST	4550.000023
PROFIT	949.999977

図 2.1(ii) 計算結果

は上の式(1)~(5)に対応していて、モデルの中の①**定義式**と呼ぶ。6)~11)は変数に既知の値を設定する式で、②**パラメータ設定式**と呼び、上の定義式とは区別しておこう。この部分は計算の目的に応じて変更されることが多い。このほかに、たとえば[生産高]は生産能力を越えることができないといった制約を記述するときには

$$[\text{生産高}] \leq [\text{生産能力}] \times [\text{製品価格}]$$

なる③**不等式制約式**、また、営業利益を最大化したいときは右辺の最大化を意味する、

$$\text{MAX} = [\text{営業利益}] ;$$

なる④**最適化式**(MAXまたはMIN)が必要になる。このように計算したい対象は、①~④の4つの型の式としてモデル化され、このようにモデル化することを**パラメトリック・モデリング**と呼ぶ。

なお、③の不等式制約の特別な場合として、変数の非負条件のような下限値の制約や上限値を規

定する制約は、⑤有界度数制約式として GINO では一般のモデリングの段階の外側で扱うことができる。これを利用すると、⑤の型の制約式は GINO のとり扱える制約式の最大数(30)の数の中に入らないのでより大きい問題を対象にすることができる。

上の例の計算結果は(iv)に示される。どの変数の値が先に計算されて、その結果が次にどの式に代入されるかといった計算の順序を決めてプログラムを作るのとはちがって、ただ関係を記述するだけで必要な変数の値は計算される。この例では非線形といっても双線形の簡単な場合であったが、たとえば式(1)のVCRが生産高に応じて通減する $VCR \times (5000/PRD)^r$ といった形であっても一向に構わない。この同一モデルでパラメータ式の設定の仕方を変えれば、まったく別な状況や、別の変数の計算もまた対象にすることができる。

3. GINO のモデル記述法

GINO/PC (住商コンピュータで取扱) はシカゴ大学の Schrage 教授らが Lasdon & Waren の非線形計画用 GRG2 アルゴリズムを中核に据えて開発した対話型 NLP プログラムである。MS/DOS のもとでの大概のパソコンで稼動する。いくつかの簡単なコマンドで、モデルの入力、改訂、表示、計算、ファイルへの入出力の各モードに移行することができる。

GINO は3つの主要な機能：(1)非線形式の計算および非線形連立方程式の解法、(2)最適化、(3)確率分布などの主要な数値表の参照、をもつ対話モデリングシステムと見ることもできる。

モデルの記述は対話形式で行ない、記述法の要点は次のとおりである：

- (i) 四則演算は Fortran と同じく、 $+$ $-$ $*$ $/$ 、また、べき乗の記号は \wedge 、三角・指数・対数・絶対値の各関数が利用可能
- (ii) 式間の分離記号はセミコロン；で行なう
- (iii) 最適化記号は最大化が MAX=、最小化は

MIN=

- (iv) 財務計算用数値表関数： n = 期間， i = 利子率

FPA(i, n) = $\{1 - (1+i)^{-n}\}/i$: 年金現価係数関数

FPL(i, n) = $(1+i)^{-n}$: 現価係数関数

- (v) 確率分布表

PSN(X) : 正規分布 $N(0, 1)$ の X 以下の確率

PPS(A, X) : 平均 A のポアソン分布の X 以下の確率

- (vi) 待ち行列数値表： A = 負荷量 (\equiv 入力/能力)

PEL(A, X) : 窓口数 X で待ちが許されないときのアーランの損失式 ($M/M/X$)

PEB(A, X) : 待ちが許されるときにの窓口数 X のシステムの繁忙確率 ($M/M/X$)

コマンド MODEL で入力モードへ移行し、モデルの定義式、制約式、パラメータ設定式、最適化式などの入力をして、コマンド END で終了する。有界変数制約は有界変数設定コマンド SLB (下限値)、SUB (上限値) で入力する。GO コマンドを出すと計算の実行をして結果を出力する (図 2.1(v) 参照)。この結果が利用可能か否かは、第1行目の「解の状態」表示を見て判定する。「実行可能」であれば、この出力から必要な変数の値を読みとればよい。もしモデルの中に最適化式があれば、変数値のほかに目的関数値、制約式のシャドウ・プライスや変数のレデュースド・コストなどの価値分析情報が一緒に出力される (例 4.2 参照)。

4. 簡単な関数式の計算モデル例

GINO を使ったパラメトリック・モデリングの実際をいくつかの例で説明しよう。

4.1 人口予測式の計算

たとえば、ゴンベルツ曲線 $\log y = a - br^t$ で表わされたある都市の t 年後の人口予測 y について実際にはいろいろな計算の要望が持ち上がる。与えられた \hat{y} に到達する年 t 、係数の推定値 a, b ,

r の予測値への影響、予測人口の信頼区間の上下限値、予測誤差分布の結果への影響など…。これらの要望には対話機能を利用するとごく簡単に応じることができる。正規分布関数 $PSN(Z)$ による信頼度 CR に対する y の上下限値を UY , LY , 誤差分布の標準偏差 SD とすれば, Y , UY , LY を求めるパラメータ・モデルは図 4.1(i) のように作られる。パラメータを目的に応じて適宜設定し, 各変数の計算(ii)が得られる。

パラメータ値の変更: GINO は起動時に必ず AUTOGN というファイルの入力を試み, もしここにコマンド系列が書かれていればそれを実行する。また GINO を QS (Quit and Save) コマンドで終了させると現在のモデルを GINO QS ファイルに保管してから停止する機能がある。

このことを利用して, GINO の QS 終了と同時に DOS のテキスト編集機能 EDLIN に移行させ, モデルの改訂後直ちに GINO にもどるループを記述した MS/DOS のバッチファイル, たとえば GINOB をあらかじめ定義しておく。そしてこの GINOB で開始すれば, モデルの変更・計算・変更といった手順を何回も反復実施することができる。いわゆる GINO を利用した計算シミュレーションができる。

非線形計算のトラブル回避と GUESS 機能の適用: ご存知のように非線形計算では, いつも可能解や真の最適解が見つけれられるとは限らない (たとえ存在しても)。また, 複数個の解があるときにユーザーの好みの解のほうが選ばれてくる保証もない。出力結果の「解の状態」に infeasible の表示がでたり, 自分の考えに似つかない予想外な結果がでたときは, ユーザーの予備的な考察を GUESS 機能を使って与える必要がある。GINO に与えられている非線形計算の出発点のデフォ

(イ)	
MODEL:	
1)	LOG(Y) = A - B * R ^ T ;
2)	PSN(Z) = (1 + CR) / 2 ;
3)	UY = Y + SD * Z ;
4)	LY = Y - SD * Z ;
5)	SD = 10 ;
6)	A = 7.6376 ;
7)	B = 0.89372 ;
8)	R = 0.964365 ;
9)	CR = 0.75 ;
10)	T = 10 ;
END	
(ロ)	
:go	
SOLUTION STATUS: FEASIBLE TO TOLERANCES.	
VARIABLE	VALUE
Y	1114.197601
A	7.637600
B	.893720
R	.964365
T	10.000000
Z	1.150350
CR	.750000
UY	1125.701098
SD	10.000000
LY	1102.694105

図 4.1 人口予測式の計算

ト値を問題に適切な値に変更してやらなくてはならない。GUESS 機能は, 変数の一部にユーザーの“予想値”を与えるためのもので, 計算に入る GO コマンドの前に利用する。問題を分析するときは, コンピュータとの対話もさることながら, ユーザーのインテリジェンスや“常識”との対話活動も忘れてはならない。なお, 予想値だけでなく, 変数のとり得る常識的な値の範囲, たとえば上のモデルで \hat{Y} を与えたときの T の値として $T > 5$ であると予想できれば, モデルの中にこの制約を付け加えるのも一方法である。そしてこの明示的な T の範囲の中から予想値を T に GUESS 機能で与えてやると複数個の解があるとき好みのものにうまくたどりつく。

4.2 財務計算用関数を用いた経済性分析モデル

プロジェクトの選択や設備購入の経済性分析では, 一定期間にわたってのキャッシュ・フローの総現価額を比較検討することがよく行なわれる。

この分析では年金現価係数関数などローンの支払計算でおなじみの非線形式の計算が必要になる。この種の計算のパラメータ・モデルの例をGINOにそなえつ

けの関数、FPAとFPLの2つを利用して作ってみる。たとえば、表1の2つの機械A、Bを15年を対象に、内部収益率INT=15%/年や維持費の変動を想定した経済性分析モデルは図4.2(イ)のように表わされる。ここでPA、PB_iはA、Bを採用したときの年間支払額(i=1:5年まで、i=2:6~10年、i=3:10~15年)。VA、VBはA、Bのキャッシュ・フローの総現価額、両方の小さいほうをCMINで表わす。この問題では変数VA、VBの値を調べるだけで機械A、Bの経済性の比較は可能であるが、式(13)―(15)のように最適化機能を利用して、min(VA, VB)=CMIN

を求めるように定式化した。その結果、経済性分析のためのより多くの情報が(ロ)に得られている。

表1 機械A、Bの価格と支払条件

機械	価格 (万円)	寿命 (年)	維持費 (万円/年)	(イ)銀行融資* 年利AI=10%	(ロ)特別ローン* 年利BI=5%
A	100 (5年ごと買換)	5	OCA=5	返済期間:5年 全額	なし
B	400	15	OCB=1	返済期間:5年 150万円	10年 250万円

*借入金は各年度末均等払で返済するものとする。

(イ) MODEL:

```

1) 100 = XA * FPA( AI , 5 ) ;
2) 250 = XB1 * FPA( BI , 10 ) ;
3) 150 = XB2 * FPA( AI , 5 ) ;
4) PA = XA + OCA ;
5) PB1 = XB1 + XB2 + OCB ;
6) PB2 = XB1 + OCB ;
7) PB3 = OCB ;
8) VA = PA * FPA( INT , 15 ) ;
9) VB1 = PB1 * FPA( INT , 5 ) ;
10) VB2 = PB2 * FPA( INT , 5 ) * FPL( INT , 5 ) ;
11) VB3 = PB3 * FPA( INT , 5 ) * FPL( INT , 10 ) ;
12) VB = VB1 + VB2 + VB3 ;
13) CMIN < VA ;
14) CMIN < VB ;
15) MAX= CMIN ;
16) AI = 0.1 ;
17) BI = 0.05 ;
18) OCA = 5 ;
19) OCB = 1 ;
20) INT = 0.15 ;
END

```

(ロ) SOLUTION STATUS: OPTIMAL

	OBJECTIVE FUNCTION	ROW	PRICE
		1)	-1.542522
		2)	.000000
15)	183.489150	3)	.000000
		4)	5.847370
VARIABLE	VALUE	5)	.000000
XA	26.379775	6)	.000000
AI	.100000	7)	.000000
XB1	32.376157	8)	1.000000
BI	.050000	9)	.000000
XB2	39.569649	10)	.000000
PA	31.379775	11)	.000000
OCA	5.000000	12)	.000000
PB1	72.945805	13)	1.000000
OCB	1.000000	14)	.000000
PB2	33.376157	16)	394.062192
PB3	1.000000	17)	.000000
VA	183.489150	18)	5.847370
INT	.150000	19)	.000000
VB1	244.525650	20)	-887.921758
VB2	55.625152		
VB3	.828601		
VB	300.979404		
CMIN	183.489150		

図4.2 経済性分析のモデル

計算問題にもシャドウ・プライス情報が使える:

結果(ロ)の中で式(20)のシャドウ・プライスは内部収益率1%の変更で現価評価額に8,879万円(減小)の影響をもたらすことを示す。また維持費の影響は式(18―19)、金利のそれは式(16―17)の値でわかる。一般に選択の自由度のない計算問題であっても、その変数にMAXやMINの最適化機能をつけるとパラメータ値の変動のその変数値に対する影響度(劣勾配)をシャドウ・プライスとして出力できる。このモデルで式(13―15)を単に

MODEL:

```

1) Y1 = 0.25 * X - 371.5 ;
2) Y2 = 0.3 * X - 671.5 ;
3) Y3 = 0.35 * X - 1071.5 ;
4) Y4 = 0.40 * X - 1571.5 ;
5) Y1 < TAX ;
6) Y2 < TAX ;
7) Y3 < TAX ;
8) Y4 < TAX ;
9) MIN= TAX ;
10) X = 6000 ;
END

```

図 4.3 所得税の計算モデル

表 2 所得に対する課税率 (昭和59年度)

所得額(千円)	税率	控除額(千円)
4000— 6000	0.25	371.5
6000— 8000	0.30	671.5
8000—10000	0.35	1071.5
10000—12000	0.40	1571.5

MAX=VB (値不変) にすれば、機械Bの支払額に対する各パラメータの影響度を出力することができる。対話モデリングは係数の変更だけでなく、より多くの分析情報収集のために最適化機能についても対象にするとよい。

4.3 累進課税率の下での所得税の計算

表2は昭和59年度の所得税率表の一部である。所得額Xに対する税額は凸型折線1次式で与えられ、 $X=6000$ に対する計算モデルは図4.3になる。簡略のために式にはそのままの係数値を代入したが、これらの係数や所得額の範囲もパラメータにしておくと税体系の変更の分析をするのに便利である。

4.4 多期間計画での最終目標を達成させる満足解

上で述べてきた計算例は、NLPパッケージがある種の条件を満たす可能解の探索に用いたといえよう。これは「満足解を求める数理計画モデル」に一般化される。経営計画の中では、いろいろパラメータの設定値を変えながら何期間か先の目標値を達成するための各期の施策を分析する問題が多い。たとえば、第2節の会計計算例に繰越在庫

量のバランス式、各期別の生産能力や需要量、累積利益額(資産の変動)などの式を追加して多期間計画のモデルにすることができる。その結果、各期別の生産販売計画に対する期ごとの損益計算や、逆に特定期のある項目に対して設定された目標額を達成するための可能な生産計画を算出するという使い方も、この1つのモデルを対話的に操作することで可能になる。

5. 最適解を求める計算例

パラメトリック・モデリングができると身近にある小型の最適化問題がごく普通の計算問題として簡単に実施できる例を示そう。

5.1 住宅ローンの最適選択モデル

本誌1984年12月号の「暮しのOR」特集で大村氏[2]が住宅ローンの最適選択を複雑な数値計算の後、LPモデルにして解かれている。この中の「モデルC」が最も一般的なのでGINOのパラメータ・モデルにすると、図5.1のようになる。[2]の表2の複雑な経理計算を経ずして、表1の原始データだけで計算モデルの定式化が可能である。図5.1のモデルでは変数 x_i に非負条件を付していないが、結果をみて必要があれば“対話的”にこの条件を付していくことで十分である。他のA、Bモデルもこのモデルを中核にしてごく簡単に計算(対話モデリング)できることを注意しておこう。

5.2 リスクの小さい資産投資の最適選択

資産選択モデルの解法に2次計画法のパッケージがよく利用されるが、パラメトリック・モデリングでGINOを適用すると、共分散値の計算を実データとして得やすい相関係数 R_{ij} で入力して、

表 3 投資項目当りの収益性

投資対象(番号)	$i=1$	2	3	収益率間の相関係数
平均収益率(E_i): 30%	20%	8%		$R_{12}=0.40$
収益率の分散(V_i): 3	2	1		$R_{13}=-0.30$
投資の割合:	x_1	x_2	x_3	$R_{23}=-0.28$
対総投資額の割合:	どれも75%以下とする。			

平均収益 E_i , 分散 V_i や R_{ij} の投資パターンへの影響分析が簡単にこなえる。たとえば, 表3の3つの投資項目で目標収益率 RGOAL を 10%~25% としてリスク最小の投資パターン分析のモデルは図5.2 (RGOAL = 15%にセット) になる。

いろいろな非線形最適化モデルと計算のむずかしさ: 非線形最適化のパラメータ・モデルにすると有効な分析ができる事例は, 経営環境や経営科学教育の環境に非常に多くみられる[3]。スケールメリット型の費用曲線をもつ設備計画問題, 分数関数最適化の投資選択問題, 確率制約のある生産計画問題 (PSN/PPS関数の利用), 最適窓口(設備・在庫)数決定の待ち行列問題 (PEL/PEB 関数の適用) など……, GINOを利用すると多様で有用な分析が可能となる。

すでに注意したように非線形最適化では, 1回の計算では精精局所最適性の保証しか得られない。明らかに存在がわかっていても可能解さえ求められない場合も往々にしてでてくる。別にイラダってはならない。そんな時, 対象に関する緻密な考察が大変役に立つ。

対話機能や推定 (GUESS) 機能はこんなときにこそ有効に利用すべきである。1回きりの計算で済ますなどと横着せずに多面的に**対話計算**を心がける必要がある。それでこそ役に立つ真の What-if 型分析ができる。

```

MODEL:
1) A1 * X1 + A2 * X2 + A3 * X3 < 90 ;
2) X1 + X2 + X3 = 10000 ;
3) P = N1 * A1 * X1 + N2 * A2 * X2 + N3 * A3 * X3 ;
4) MIN= P ;
5) A1 = FPA( INT1 / 12 , N1 ) ^ - 1 ;
6) A2 = FPA( INT2 / 12 , N2 ) ^ - 1 ;
7) A3 = FPA( INT3 / 12 , N3 ) ^ - 1 ;
8) N1 = 180 ;
9) N2 = 240 ;
10) N3 = 420 ;
11) INT1 = 0.054 ;
12) INT2 = 0.084 ;
13) INT3 = 0.09 ;
END

SUB      X1      4000.000000
SUB      X2      3000.000000
SUB      X3      7000.000000

```

図 5.1 住宅ローンの最適選択モデル

```

MODEL:
1) X1 + X2 + X3 < 1 ;
2) RK1 = V1 * X1 ^ 2 + V2 * X2 ^ 2 + V3 * X3 ^ 2 ;
3) RK2 = R12 * ( V1 * V2 ) ^ .5 * X1 * X2 + R13 *
   ( V1 * V3 ) ^ .5 * X1 * X3 ;
4) RK3 = R23 * ( V2 * V3 ) ^ .5 * X2 * X3 ;
5) RISK = RK1 + 2 * ( RK2 + RK3 ) ;
6) RTN = E1 * X1 + E2 * X2 + E3 * X3 ;
7) RTN > RGOAL ;
8) MIN= RISK ;
9) V1 = 3 ;
10) V2 = 2 ;
11) V3 = 1 ;
12) R12 = 0.4 ;

13) R13 = - 0.3 ;
14) R23 = - 0.28 ;
15) E1 = 1.3 ;
16) E2 = 1.2 ;
17) E3 = 1.08 ;
18) RGOAL = 1.15 ;
END

SLB      X1      .000000
SUB      X1      .750000
SLB      X2      .000000
SUB      X2      .750000
SLB      X3      .000000
SUB      X3      .750000

```

図 5.2 資産選択モデル

参 考 文 献

- [1] Schrage, L. ほか (青沼・新村共訳): GINOによるモデリングと最適化, 住商コンピュータ(株), 1985
- [2] 大村雄史: 住宅ローンは利率の低いものから借りるのがいいのか, 本誌29, 12 (1984), 733-735
- [3] 日科技連 OR演習小委員会編: ORワークブック, 日科技連出版, 1984