機械・資源・労務ピークの最小化

石堂　一成

1. はじめに

企業における現実の最適化問題のうちで，組合せ最適化問題となるものは少なくない．たとえば筆者がすでに本誌で紹介した土建工事における建設機械の組合せ問題や，ポンプ・ステーションにおけるポンプ仕様決定問題もその例である（[4]，[7]）．本稿では，多くの現実の組合せ最適化問題のうちから，特に一般性が高く，かつ最適化による効果の大きな代表例について紹介する．

以下，まず組合せ最適化問題としての機械・資源・労務ピークの重み和最小化問題の概要を説明し，つづいてその解法を述べ，最後に現実の問題への適用効果の数値例を示す．

2. 問題の概要

2.1 問題の重要性・困難性・一般性

(1) 重要性

機械・資源・労務ピークの最小化問題は，たとえばプラント建設プロジェクトにおける建設機械のピーク能力，1日当りの所要諸資源量のピーク値，および作業員のピーク人数などのような各種ピーク値を下げることによって，コスト最小化を図るものである．

この例でプラント建設地が中近東の砂漠地帯にあるような場合，作業員のピーク人数や，1日当りの水の所要量のピーク値などは，必要な仮設宿舎や諸設備の規模に直接関係し，工事費を大きく左右する．現実に，数百億円の工事費のうち，このようなピーク値に直接的に依存する部分が何割かを占めるというような例もある．このような場合，工程を調整してピーク値をできるだけ低くして費用の最小化を図ることは，きわめて重要である．

(2) 困難性

しかしながら，この種の現実の問題は，その重要性にもかかわらず，解くことがなかなか困難である．すなわち，各作業の開始可能時期，完了期限，実施期間の上限・下限，割付け可能な機械・資源・作業員の数量の上限・下限などの多様な条件が課せられているため，比較的簡単なモデルを扱ってきた従来からのスケジュール理論の研究成果をそのまま活用することはほとんど不可能である．しかも，作業項目数，機械・資源の種類数および作業員の職種数が増えて，問題が大規模・複雑になるにつれ，これを解くことは飛躍的にむずかしくなってくる．

(3) 一般性

本稿でとり扱う最適化問題は，かなり一般性の高いものである．一般的にコストは，機械・設備費，材料費，労務費などから成るが，各作業の所要材料の量や作業量自体は個々の作業の特殊性に依存するものであるから工程最適化段階では所与と考えるべきである．すなわち，一般的に工程最適化によるコスト最小化では，上述のような各種

いしどう　かずしげ　三菱重工業㈱ 技術本部技術計算センター　〒652 神戸市兵庫区和田崎町1－1－1

© 日本オペレーションズ・リサーチ学会．無断複写・複製・転載を禁ず．

のピーク値の重み和最小化が主要な問題となる．さらにピーク値という観点からは機械・資源・労務を区別する必要がないので，本稿では以下，用語を労務の用語に統一して述べるが，このことは問題の一般性を奪うものではない．

2.2 最適化の入出力・原始ネットワーク

(1) 最適化の入出力

最適化の主要な入力・出力は次のとおりである．

入力1：工事の着工時期・竣工時期

入力2：各作業項目ごとの職種別作業量

入力3：各作業項目の実施順序に関する制約

出力1：各作業項目の開始時期・終了時期

出力2：各作業項目ごとの職種別投入人数

(入力2)は延べ人数(人・日)で与え，(入力3)はPERT形式のネットワークで与える．当然ながらこの段階ではすべての作業項目が順序づけられているわけではない．蛇足になるが各作業項目の実施時間をPERTでは入力しなくてはならないが本稿の方法では(出力1)として求められるのでその必要がない．なお，必要に応じて次のような各種の制約条件を付加入力として与える．

付加入力1：各作業項目の開始・終了時期に関する制約

付加入力2：各作業項目の実施時間の上限・下限に関する制約

付加入力3：任意の2つの作業項目の開始・終了時期に関する制約

付加入力4：工事全体での職種ごとのピーク値，あるいはそれらの部分和などの上限・下限に関する制約

付加入力5：各作業項目の職種別投入人数，あるいはそれらの部分和などの上限・下限に関する制約

(2) 原始ネットワーク

(入力3)のPERT形式のネットワークに，(入力2)のデータを記入したものを原始ネットワークと呼ぶことにする．原始ネットワークには順序関係を示すためのダミーの弧や節の存在を許すが，ダミーの弧もすべて実線で表わす．図1に原始ネットワークの例を示すが，図中のQ_j^kは作業項目jの職種kの作業量を示す．

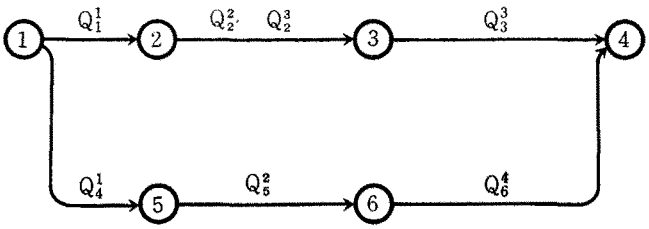


図1 原始ネットワークの例

2.3 計画変数・目的関数・制約条件

(1) 計画変数

本質的には上述の(出力1)および(出力2)が計画変数であり，次のように表わす．

t_n：原始ネットワークの節nの時刻

m_j^k：作業項目jに従事する職種kの人数

(2) 目的関数

目的関数fは，次の(式—1)で表わせる．

$$f=\sum_k W_k \cdot P_k \qquad \text{(式—1)}$$

W_k：職種kのピーク値に関する費用係数

P_k：職種kのピーク値．これは本質的にt_nとm_j^kの関数であり，後述の(式—4)で表わせる．

(3) 制約条件

次の(式—2)に示す作業遂行に関する制約条件以外のすべての制約条件は，上述の(付加入力1～5)も含めて，t_n，m_j^kおよびP_kに関する1次式で表わせる．

$$m_j^k \cdot (t_{n2}-t_{n1}) \geq Q_j^k \qquad \text{(式—2)}$$

t_{n1}：作業項目jの開始時期

t_{n2}：作業項目jの終了時期

2.4 ネットワーク・フローとしてのピーク値

(1) ピーク値の意味

通常，職種別の作業従事人数の和の時間的変化は図2のようになる．図中のt_{ns}，t_{nf}は，それぞれ工事の着工時期，竣工時期を示している．この図によれば職種kのピーク値P_kは簡単に得られ

© 日本オペレーションズ・リサーチ学会．無断複写・複製・転載を禁ず．

るように見えるが，これを実際にt_nやm_j^kの関数として数式で表現することは簡単ではない．一般的に原始ネットワーク上では一部の節しか時間的に順序づけられていないし，各m_j^kの値も未知であるから，t_{ns}からt_{nf}までのどの時期に実際の作業従事人数の和がピークとなるかをあらかじめ知ることはできない．図2で確定的なことは，各作業項目の作業量Q_j^kに対応する各多角形の面積が工程にかかわらず一定であることだけである．

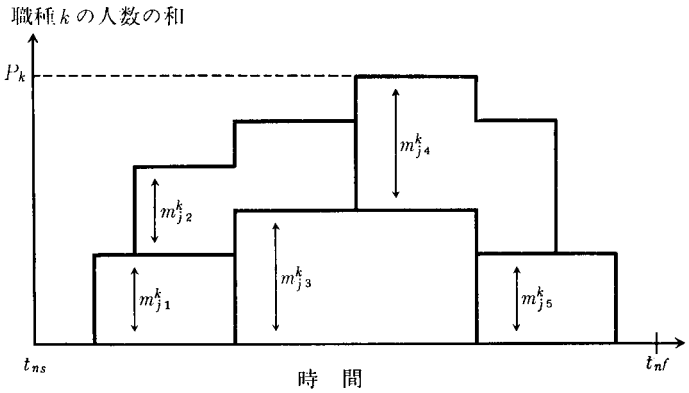


図 2　実際に作業に従事する人数の和の変化

(2) 付加弧

さて，ピーク値を低くするためには，同一の作業員にいくつかの作業項目中の作業を実施させることが考えられる．たとえば，図1中の作業項目2の職種2の作業Q_2^2と作業項目5の職種2の作業Q_5^2だけに着目すると，時期的に重複さえしなければ同一の作業員が実施することができる．いま仮に作業項目2の終了時期t_3が作業項目5の開始時期t_5より早いとすれば，

$$t_3 \leq t_5 \qquad \text{(式—3)}$$

であり，図3に示すように点線の弧を付加して表わすことにする．このような点線の弧は，原始ネットワークでは順序づけられていなかった節を順序づけて作業員の流用の道筋を示すもので，付加弧と呼ぶことにする．

(3) 最小フローとしてのピーク値

付加弧によって流用の道筋が決められると，ピーク値は付加弧を記入したネットワーク上の最小フローとして把握することができ，たとえば職種kのピーク値P_kは次の式で表わすことができる．

$$P_k = \sum_{s+} (m_{s+}^k + l_{s+}^k) \qquad \text{(式—4)}$$

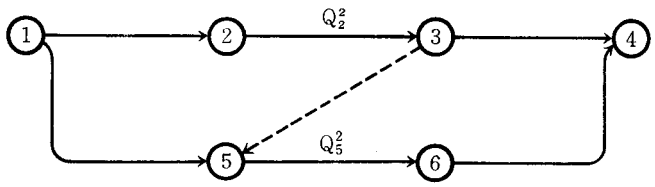


図 3　付加弧の例

m_{s+}^k：工事の開始節Sの直後の作業項目に従事する人数

l_{s+}^k：フロー・バランスのための非負数で開始節Sから流出すると考えられる人数

ただし，m，lは制約条件（式—2）および，ネットワーク上の任意の節nにおける次のフロー・バランス式を満たすものである．

$$\sum_{n-} (m_{n-}^k + l_{n-}^k) = \sum_{n+} (m_{n+}^k + l_{n+}^k) \qquad \text{(式—5)}$$

m_{n-}^k：節nの直前の作業項目に従事する人数

m_{n+}^k：節nの直後の作業項目に従事する人数

l_{n-}^k：節nへの流入人数．非負数

l_{n+}^k：節nからの流出人数．非負数

以上のように，ピーク値をある種のネットワーク上の最小フローとして表わせるが，複雑な制約条件が課せられているので，通常の最小フロー問題のための各種の効率的な解法をそのまま活用することはできない．

2.5　組合せ最適化

(1) 拡張ネットワーク

さて，作業員の流用可能性を付加弧で表わすことにしたのであるから，このような付加弧は数多く存在しうる．たとえば，図1の原始ネットワークに対し，一部ダミーの追加も行なって，すべての付加弧を記入すると図4のようになる．このように原始ネットワークにすべての付加弧，および節の順序に影響を与えない・ダミーの弧・節

© 日本オペレーションズ・リサーチ学会．無断複写・複製・転載を禁ず．

を追加したものを拡張ネットワークと呼ぶことにする．

(2) 実行可能局所拡張ネットワーク

図4からも明らかなように，拡張ネットワーク上にはサイクルが存在しうる．弧および付加弧は時間的な順序関係を規定するものであるから，サイクルを含むような順序での作業処理は実行不可能である．

そこで，拡張ネットワークからサイクルを生じないように一部の付加弧を削除したものを実行可能局所拡張ネットワークと呼ぶことにする．一般的に1つの原始ネットワークに対して多数の実行可能局所拡張ネットワークが存在する．たとえば図1のような簡単な原始ネットワークに対しても図5に示す6つの実行可能局所拡張ネットワークが存在する．

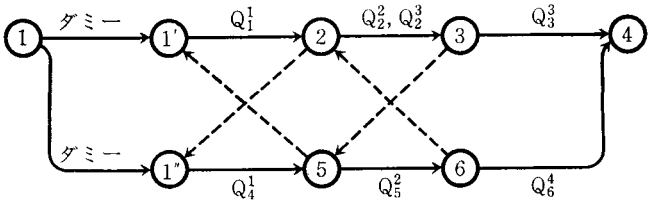


図 4 拡張ネットワークの例

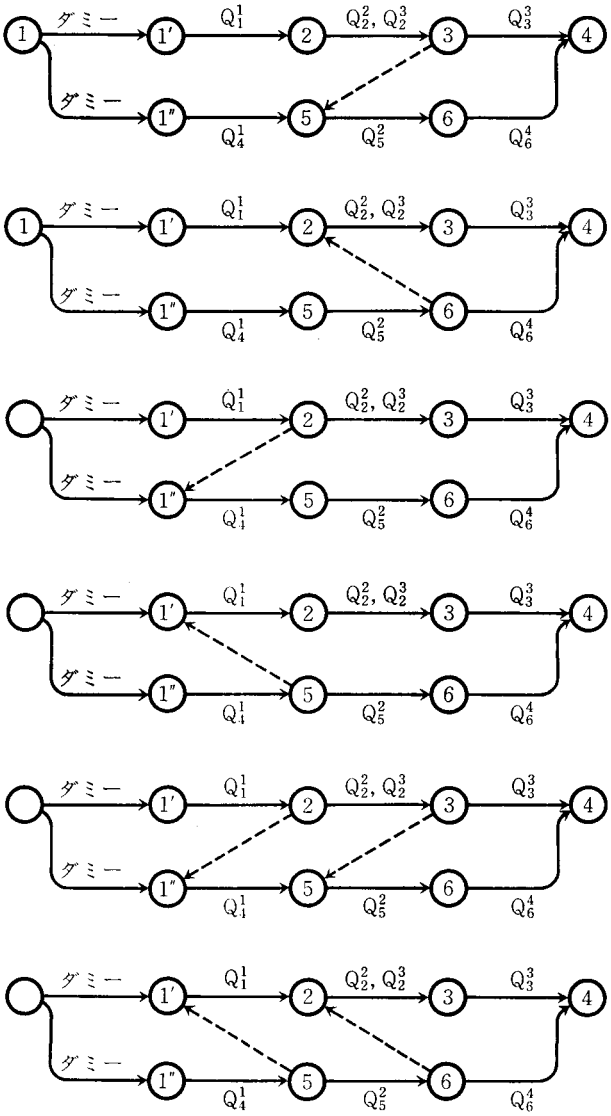


図 5 実行可能局所拡張ネットワークの例

(3) 付加弧の冗長性・既約性

上述のように付加弧は，作業員の流用の道筋を与えるが，その組合せによっては冗長となる場合がある．たとえば図6の例では，n_1からn_3への付加弧は冗長であり，それを除去してもピーク値の重み和最小化に何ら影響のないことは，直観的にも明らかである．冗長な付加弧を含む組合せから冗長なものを除去することを既約化と呼び，冗長なものを含まない組合せを既約であると言うことにする．

以上述べてきたように，本稿のピーク最小化の問題は，結局，サイクルを生じないような既約な付加弧の組合せのうちから，ピーク値の重み和が最小となるものを探すという組合せ最適化の問題となる．

3. 解 法

3.1 分枝限定法による大域的最適解の探索

上述の問題は，多くの組合せ最適化問題がそうであるように，混合0—1整数計画問題として定式化できる．本稿の問題の場合，各付加弧を採用するかどうかに0—1変数を割付ければ，すでに述べた実行可能性や既約性などもこれらの変数の1次不等式として表現

© 日本オペレーションズ・リサーチ学会．無断複写・複製・転載を禁ず．

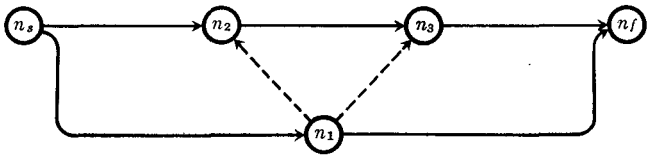


図 6 既約でない付加弧の組合せの例

できるので前章の制約条件式に追加することにより，定式化できる．しかしながら，いくら形の上で定式化できても，多くの組合せ最適化問題で少し規模が大きくなると実用的には解けなくなるように，本稿の問題も実用的には解けない．そこで，以下に述べるような分枝限定法を採用する．

(1) 探索木の根の部分に原始ネットワークを対応させ，前章で述べた数理計画問題を解く．この問題で（式—2）は非線形であるが，図7に示すように区分線形近似できるので，線形計画問題を解けばよい．この解を大域的最適解の暫定解とする．また同時に，この問題のフロー・バランスに関する制約（式—5）をゆるめた緩和問題を解くことにより，下界値も求める．

(2) 次に，探索木の根元側の節点に対応するネットワークにある基準で選出した付加弧をつけ加えるかどうかで分枝操作を行なう．（詳細後述）

(3) 分枝操作で作られた実行可能局所拡張ネットワークに対応する線形計画問題を解く．このとき，探索木の根元側の問題のすでに得られている最適解の情報はできるだけ利用する．この解がすでに得られている暫定解より良ければ，暫定解を更新する．また同時に，緩和問題も解いて，この実行可能局所拡張ネットワークにさらに付加弧を加えて得られる目的関数値の下界も求める．

(4) 以上のようにして求めた探索木の各節点の下界値と暫定解を比較し，活性節点の限定操作を行なう．また，すべての付加弧について含めるかどうかが確定した節点も終端させる．

(5) 最後に探索終了の判定を行なう．すなわち次の条件のどれかを満たせば探索を終了し，そうでなければ(2)にもどり探索を継続する．

条件1：大域的最適解が得られた．

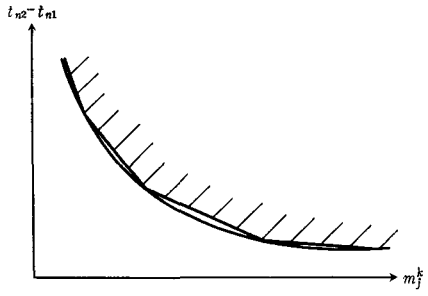


図 7 作業遂行制約の区分線形近似

条件2：暫定解と活性節点の下界値のうちの最小のものとの差が許容誤差以内となった．

以上述べた方法は，見方を変えれば上述の混合0—1整数計画問題を解く分枝限定法に問題固有の特性を最大限組込んで実用的にしたものといえる．なお，長所としては次の点がある．

長所1：どの時点で探索を中止しても実行可能解が得られる．

長所2：分枝変数の選出基準に人間の経験・勘を活かせる．

3.2 分枝操作の方法

分枝限定法では，良い暫定解を早く得るように活性節点を選ぶことが大切である．また本章の方法では部分問題の解法として線形計画法の再最適化や感度分析の方法も用いるために先に求めた最適基底形式の情報についても保存しておく必要がある．そこで所要計算時間と所要データ記憶容量も考慮に入れて次のような方法を採用している．

(1) 活性節点の選択および新節点の生成の方法

探索の各段階ごとに次のような方式をとる．ただし，実際には中期段階までで計算が終了する場合がほとんどである．

初期段階：あまり的を絞らずに問題を大まかに分割することに重点を置いて一定数の活性節点をつくる．

中期段階：暫定解の改良に重点を置いて，良い暫定解を与える部分問題を生成する可能性の大きい活性節点を選ぶ．

末期段階：活性節点の個数の増大を防ぐような方式をとる．

© 日本オペレーションズ・リサーチ学会．無断複写・複製・転載を禁ず．

(2) 分枝変数の決定方法

分枝変数の決定とは，分枝によって生成する新しい節点のあいだの本質的な相違点として何を採用するかを決定することである．すでに述べたように，ここではある基準で選出した付加弧を付け加えることによって1つの新しい節点を生成し，同時にその付加弧を付け加えないことを確定することによってもう1つの新しい節点を生成する．これら2つの節点のうちの後者では，該当する実行可能局所拡張ネットワークがその親の節点とまったく同一となるので，実際には数理計画問題を解く必要がない．ただ，親の節点では付け加えるかどうかが未定であった付加弧を付け加えないと確定したのであるから，探索上は意味がある．

さて，検討対象とする付加弧として，親の節点では付け加えるかどうかが未定の付加弧のうちから，次のようにして算出した重要度指数の最も大きいものを選出する．

$$i=(f+r)/(\max f+\max r)+e \quad (式—6)$$

i：ある付加弧の重要度指数．

f：その付加弧が実行可能性におよぼす影響の大きさ．具体的には，拡張ネットワーク上でその付加弧を含むとサイクルをつくる付加弧の組合せの個数．$\max f$はすべての付加弧のfの最大値．

r：その付加弧が既約性におよぼす影響の大きさ．具体的には，その付加弧を任意の実行可能局所拡張ネットワークに追加した場合に既約化によって除去される付加弧の個数の最大値．$\max r$はすべての付加弧のrの最大値．

e：工事計画策定者が経験にもとづいて与えるその付加弧の重要度．

このような重要度指数を用いれば，重要な付加弧からその採否を検討していくことができるので比較的速く良い暫定解を得ることができる．

4. 適用効果

本稿で述べてきた機械・資源・労務ピークの重み和最小化の方法は，すでに実際のプロジェクトに適用して大きな成果をあげているものである．

図8のネットワークは，実際のあるプロジェクトを示すもので，300日間かけて72の作業項目を4つの職種の組合せによって遂行したものである．このプロジェクトの各作業項目の開始時期・終了時期および作業員の投入の計画を旧来の方法で作成したところ，図9(a)に示すように職種別のピーク人数の和は280人となった．一方，本稿で述べた方法を適用した結果，図9(b)に示すように164人となった．これは約40%の改善に相当するもので，かなり極端な数値例である．しかしながら，図9(b)に示す最適計画に近いものを旧来の方法で作成することは非常に困難な作業であり，問題の規模が大きくなればなるほど，それが顕著となってくるのが現実である．

5. おわりに

本稿では実際のスケジューリングの分野において一般性の高い機械・資源・労務ピークの最小化の問題のための実用的な解法を紹介した．この解法の成功の要因は次の諸点にあると考えられる．

(1) 実行可能局所拡張ネットワークなどの新しい概念により，ピーク値をある種のネットワーク上のフローとして把握できたこと．

(2) 大規模・複雑な組合せ最適化問題をそのまま汎用的な方法で解くのではなく，問題の特性を活かした分枝限定法のアルゴリズムを開発できたこと．

(3) 計画策定者の経験・勘・判断を探索の過程に活かせるような仕組みにしたこと．

(4) 高度に使いやすいマン・マシン・インターフェイスを開発できたこと．

今後の本稿の方法の拡張としては，コストをピーク値に関する非線形関数とすることや，コストあるいはピーク値等を制約として工期の最短化を図るように目的関数を変更することなどが考えられる．

© 日本オペレーションズ・リサーチ学会．無断複写・複製・転載を禁ず．

なお，本稿の解法に関してご指導いただいた京都大学三根久名誉教授，茨木俊秀教授，福島雅夫助教授ならびに神戸商大加藤直樹助教授に感謝の意を表します．

参考文献

[1] Balas, E.: Machine sequencing via disjunctive graphs-An inplicit enumeration algorithm. Operations Research, 17, (1969), 941-957

[2] Ford, L.R. and D.R. Fulkerson: Flows in Networks. Princeton Univ. Press, (1962)

[3] 茨木俊秀：組合せ最適化―分枝限定法を中心として，産業図書，(1983)

[4] 石堂一成：プロジェクト計画の最適化システム，オペレーションズ・リサーチ，27，(1982)，339-343

[5] 石堂一成他：土建工事における施工計画立案システム．三菱重工技報，20，6，(1983)，70-76

[6] Ishido, K. et al: Optimization of resource allocation for large-scale projects. Proc. of 11th IFIP Conference on System Modelling and Optimization, Springer Verlag, (1983), 881-890

[7] 石堂一成他：ポンプ・ステーションの最適計画．オペレーションズ・リサーチ，30,6，(1985)，19-23

[8] Ishido, K. et al: Construction planning and scheduling system for civil engineering works. Mitsubishi Technical Review, 21, (1984), 107-112

[9] Lawler, E.L. and D.E. Wood: Branch and Bound Method-A survey. Operations Research 14, (1966), 699-719

[10] 三根久他：ある種のスケジューリング問題に対するアルゴリズム．経営科学，18，(1974)，23-37

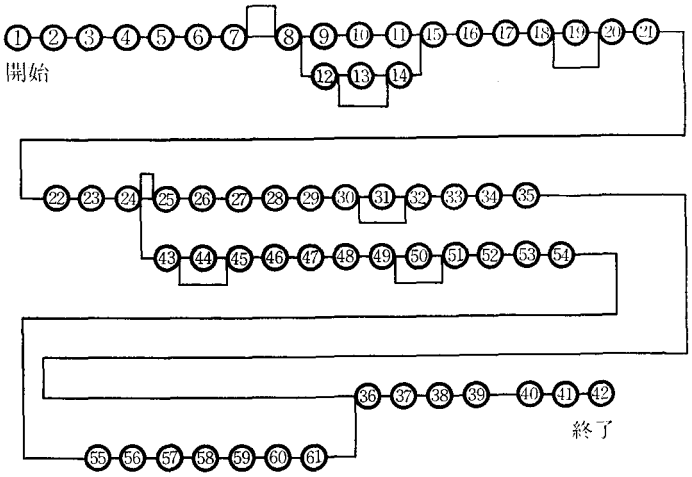
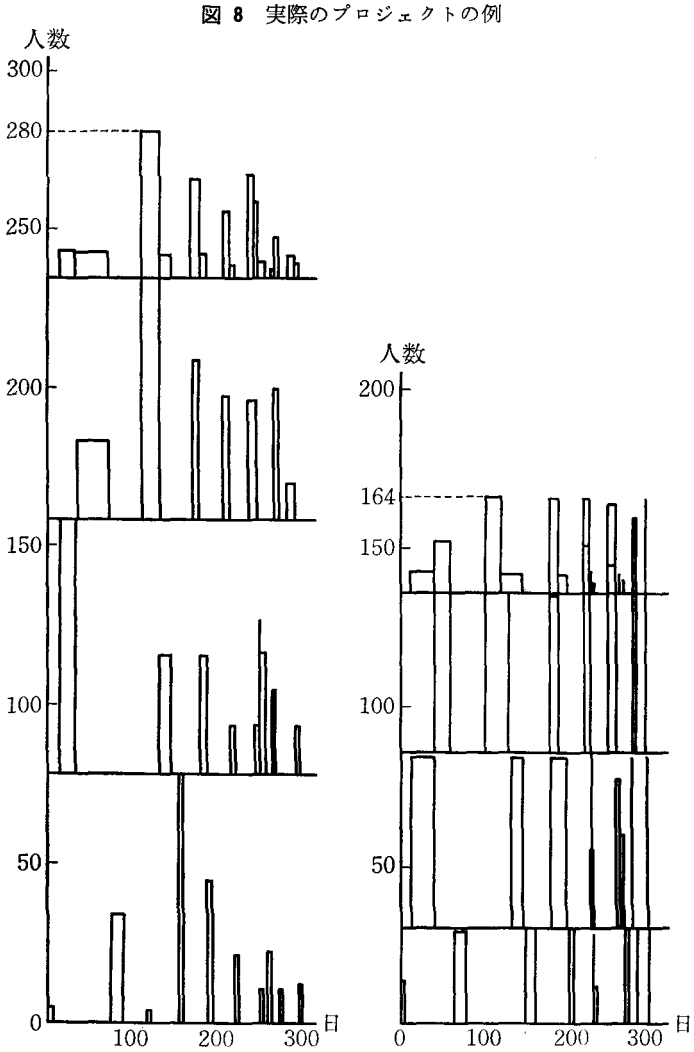


図 8　実際のプロジェクトの例



(a) 旧来の方法　　(b) 本稿の方法

図 9　適用効果の数値例

© 日本オペレーションズ・リサーチ学会．無断複写・複製・転載を禁ず．