

プロジェクト選択問題に対する 効率指標を利用した近似解法

山口 俊和

1. はじめに

経営意思決定問題の中には、決定変数が0—1型の整数計画問題として定式化できるプロジェクト選択タイプの問題が少なくない。この種の問題の最適解法として、完全列挙法（総当たり法）があるが、問題の規模が大きくなるにつれて組合せの数が急速に増加するため、計算量が膨大になる。そのため、組合せ数を減少させるのに有効な手法として陰的列挙法 [5] が開発されているが、大規模な問題に対しては不十分な解法であるといわざるをえない。

ところで、現実の受注選択問題や設備投資計画問題では、原データに誤差が含まれることが多いため、厳密な計算を行なって最適解を求めるよりも、簡便な計算で実用上十分な精度の解が求められるような方法が望ましい。また、計算の結果、それぞれのプロジェクトに採択の優先順位がつけられるような方法であれば、条件の変更に対する感度分析が行ないやすい等のメリットがある。このような特徴をもつヒューリスティックな近似解法として、有効勾配法 [6], [7], [8] と空間法 [1] が開発されている。

これらの方法は効率指標の概念を用いており、現実問題に対して有効であることが報告されているので、本稿ではこれら2つの方法を比較しながら

を紹介することにする。

2. プロジェクト選択問題の定式化

互いに独立な m 個のプロジェクト（たとえば、受注選択問題では注文、設備投資計画問題では設備投資案）の中から、利益を最大にする組合せを選ぶ問題を考える。問題を定式化するために、以下のように記号を定義する。

m : プロジェクトの数

i : プロジェクト名 ($i = 1, 2, \dots, m$)

q : 制約の数

L_k : 制約名 ($k = 1, 2, \dots, q$)

l_{ik} : プロジェクト i が必要とする制約 L_k の使用量 ($l_{ik} \geq 0$)

l_k : 制約 L_k の上限

g_i : プロジェクト i の利益 ($g_i > 0$)

x_i : 決定変数

$$\begin{cases} x_i = 1 : \text{プロジェクト } i \text{ を採択} \\ x_i = 0 : \text{プロジェクト } i \text{ を不採択} \end{cases}$$

プロジェクト選択問題は以上の記号を用いることにより次のように定式化できる。

$$\text{目的関数 : 最大化 } z = \sum_{i=1}^m g_i x_i \quad (1)$$

$$\text{制約条件 : } \sum_{i=1}^m l_{ik} x_i \leq l_k \quad (k = 1, 2, \dots, q) \quad (2)$$

$$x_i = 0 \text{ または } 1 \quad (i = 1, 2, \dots, m) \quad (3)$$

これは数学的には0—1型の整数計画問題である。

やまぐち としかず 東京理科大学 工学部

〒162 新宿区神楽坂1—3

3. 効率指標による近似解法の基本的な考え方

有効勾配法と空間法は、1目標1制約問題（たとえば、資金制約の下で利益合計が最大になるような投資案の組合せを求める問題）における効率指標（利益率）によるプロジェクトの順位づけによる解法を上述の1目標多制約問題に拡張したものである。

基本的な考え方は、各プロジェクトについて、

- (1) 複数の制約使用量にある種のスカラー量に一元化し、
- (2) プロジェクトの利益をその一元化量で除した値（これを効率指標と呼ぶ）でプロジェクトに優先順位をつけ、
- (3) その順に制約条件の範囲内で順次プロジェクトを採択し近似解を求めようというものである。

なお、効率指標はプロジェクトを1つ採用するたびに計算し直す。

有効勾配法の1つである前進法（主有効勾配法）[7]、[8]は、制約空間上でプロジェクトをベクトル表現する。そして、採択したプロジェクトの集合を示すベクトルと、未採択の各プロジェクト・ベクトルとの内積を計算し、この値で利益を除した効率指標で各プロジェクトに採択の優先順位をつけるものである。

なお、有効勾配法には、すべてのプロジェクトを採択した状態から、制約条件を満たすまで不効率なプロジェクトを落としていくという後退法（双対有効勾配法）もあるが[6]、本稿では前進法について紹介する。

空間法は、効率指標によるプロジェクトの順位づけという点は有効勾配法と同様であるが、複数制約を一元化するさいに、空間量というスカラー量（2次元の場合は面積、3次元では体積）に変換する点に相違がある。

具体的な計算を行なうために、以下の記号を定

める。

I_t : 既採択プロジェクトの集合

$\bar{I}_t$: 未採択プロジェクトの集合

P_i : 制約空間におけるプロジェクト i のベクトル表現

$$P_i = (l_{i1}, l_{i2}, \dots, l_{iq})$$

R_k^t : 採択したプロジェクト全体の L_k の使用量

$$R_k^t = \sum_{i \in I_t} l_{ik}$$

R^t : 制約空間における I_t のベクトル表現

$$R^t = \sum_{i \in I_t} P_i = (R_1^t, R_2^t, \dots, R_q^t)$$

なお、添字の t は逐次的にプロジェクトを採択していくときの解法の反復回数を示す。

いま、 $L_1, L_2, \dots, L_q$ を軸とした直交座標系（「制約空間」と呼ぶ）を考え、各プロジェクトをその空間上のベクトル P_i であらわす。 $L_k \leq l_k$ の領域を「制約領域」、 $\sum_{i \in I_t} l_{ik} \leq L_k \leq l_k$ の領域を「残存領域」と呼ぶ。

有効勾配法では、ベクトルの内積を用いるので

$$l_{ik}' = l_{ik} / l_k$$

のように、各制約使用量の基準化を行なったうえで、プロジェクト i を

$$P_i' = (l_{i1}', l_{i2}', \dots, l_{iq}')$$

I_t のベクトル表現を

$$R^t = \sum_{i \in I_t} P_i'$$

とする。ただし、 $t=1$ のときは、 $R^t = \mathbf{0}$ となってしまうので、このときに限って、 $R^t = \mathbf{1}$ とする。また、 R^t と同じ方向の単位ベクトルを

$$E^t = R^t / |R^t|$$

とする。プロジェクト i の制約使用量の一元化量を、 P_i' の R^t 上への正射影の長さ、すなわち

$$H1_i^t = P_i' \cdot E^t = P_i' \cdot \frac{R^t}{|R^t|} \quad (4)$$

であらわす。2制約の場合で図解すると、図1のようになる。効率指標は

$$U1_i^t = g_i / H1_i^t \quad (5)$$

であり、これの値の大きなものほど有利なプロジェクトであると考ええる。

空間法では、すでに採択したプロジェクトと、

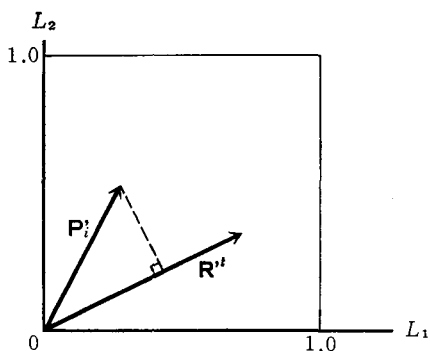


図 1 有効勾配法

いま採択を検討しているプロジェクト $i (i \in \bar{I}_t)$ とを合計した $R^t + P_i$ を制約空間上で評価し、次式に示す値、すなわち

$$H2_i^t = \prod_{k=1}^q l_k - \prod_{k=1}^q \{l_k - (R_k^t + l_{ik})\} \quad (6)$$

に一元化する。2 制約の場合には、図 2 の斜線部分と網目部分の面積の和に相当する。効率指標は

$$U2_i^t = (g_i + \sum_{i \in \bar{I}_t} g_i) / H2_i^t \quad (7)$$

であらわされる。

4. 解法の手順

有効勾配法と空間法は効率指標の作成方法は異なるが、基本的な解法の手順は同様である。そこで、 m プロジェクト・ q 制約の問題における 2 つの方法の手順を以下にまとめる。

(1) 初期値の設定

$$t=1, I_t = \Phi$$

ただし、 $t \neq 1$ のとき、 I_t はステップ (7) により与えられる。

(2) I_t の制約使用量の計算

$$R_k^t = \sum_{i \in I_t} l_{ik}$$

(3) $i \in \bar{I}_t$ の残存領域における採択可否の判定

$$R_k^t + l_{ik} \leq l_k$$

をすべての $L_k (k=1, 2, \dots, q)$ で満足するプロジェクト i は選択の対象とし、そうでないプロジェクト i は選択の対象外とする。

(4) 選択終了の判定

選択対象とするプロジェクトがない場合は I_t をこの問題の解とし、手順を終了する。そうで

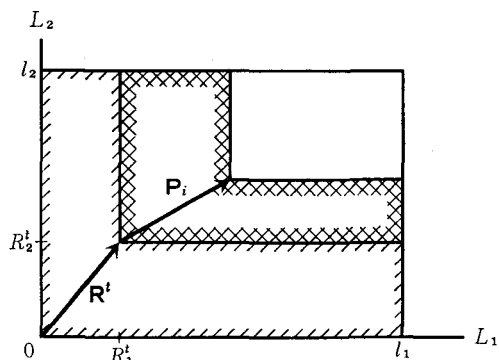


図 2 空間法

ない場合は次のステップへ進む。

(5) 効率指標の計算

選択対象とするプロジェクトについて、制約の一元化量と効率指標を計算する。

①有効勾配法の場合

$$H1_i^t = P_i^t \cdot R^t \quad (8)$$

$$U1_i^t = g_i / H1_i^t \quad (9)$$

なお、(8) 式では前述の (4) 式における $|R^t|$ が省略されているが、 $|R^t|$ はすべてのプロジェクト i に共通なので、とり除いても大小関係には影響を与えない。そこで、ここでは、 P_i^t と R^t の内積の計算を行なう。

②空間法の場合

$$H2_i^t = \prod_{k=1}^q l_k - \prod_{k=1}^q \{l_k - (R_k^t + l_{ik})\} \quad (10)$$

$$U2_i^t = (g_i + \sum_{i \in \bar{I}_t} g_i) / H2_i^t \quad (11)$$

(6) 選択プロジェクトの決定

①有効勾配法の場合

$$U1_{i^*}^t = \max_{i \in \bar{I}_t} U1_i^t$$

を満足するプロジェクト i^* を t 回目の選択プロジェクトとする。

②空間法の場合

$$U2_{i^*}^t = \max_{i \in \bar{I}_t} U2_i^t$$

を満足するプロジェクト i^* を t 回目の選択プロジェクトとする。

(7) I_{t+1} の設定

$$I_{t+1} = I_t \cup i^*$$

(8) 反復

$t \leftarrow t+1$ としてス
テップ (2) へもど
る。

5. 数値例への 適用

有効勾配法と空間法
を、簡単な数値例に適
用してみよう。

8つの注文の中から
有利な注文を選択する
問題を考える。各注文の2つの工程での所要時
間、利益、および各工程の利用可能時間の上限値
は表1のとおりである。

この受注選択問題を定式化すると、次のような
0-1計画問題になる。

目的関数：最大化

$$z = 36x_1 + 27x_2 + 30x_3 + 18x_4 + 45x_5 + 15x_6 + 6x_7 + 24x_8$$

制約条件：

$$14x_1 + 12x_2 + 2x_3 + 18x_4 + 8x_5 + 8x_6 + 12x_7 + 6x_8 \leq 56$$

$$12x_1 + 14x_2 + 14x_3 + 8x_4 + 12x_5 + 4x_6 + 6x_7 + 18x_8 \leq 72$$

$$x_1, x_2, \dots, x_8 = 0 \text{ または } 1$$

有効勾配法を適用した場合の各反復における効
率指標の値と選択のプロセスは表2のようにな

表2 有効勾配法

P_i	1	2	3	4	5	6
P_1	122.1	565.7	343.5			
P_2	93.6	428.6	249.7	139.1	114.6	
P_3	185.3	802.1				
P_4	58.9	279.3	185.1	91.8	72.5	58.0
P_5	205.3					
P_6	106.6	503.3	328.4	165.2		
P_7	28.6	134.9	88.1	44.3	35.1	28.0
P_8	95.1	420.6	219.6	134.9	115.9	
R_1'	0.143	0.178	0.428	0.571	0.678	1.000
R_2'	0.167	0.361	0.528	0.584	0.834	0.945

表1 数値例

注文	工程1	工程2	利益
P_1	14時間	12時間	36万円
P_2	12	14	27
P_3	2	14	30
P_4	18	8	18
P_5	8	12	45
P_6	8	4	15
P_7	12	6	6
P_8	6	18	24
合計	80	88	201
利用可能時間	56	72	

る。この結果、 $P_1, P_3, P_4, P_5, P_6, P_8$ が選択され、
利益合計は168万円になる。

空間法を適用した場合の各反復における効率指
標の値と選択のプロセスは表3のようになる。こ
の結果、 P_1, P_2, P_3, P_5, P_8 が選択され、利益合計
は162万円になる。

一方、この問題の最適解は、 $P_1, P_3, P_4, P_5, P_6, P_8$ を選択するもので、そのときの利益合計は168万円である。したがって、有効勾配法で得られた近似解は最適解に一致している。また、空間法で得られた近似解の最適解に対する相対誤差率は $(168-162)/168=3.57\%$ である。

6. おわりに

- (1) 前述の数値例で示したように、2つの方法からは精度のよい近似解が得られる。精度の評価については、両手法とも種々の数値実験を行っており [1], [7], [9], 実用上十分と考えられる精度が保証されている。特に、問題の規模が大きくなっても精度は悪化しないので、良い近似解法といえよう。
- (2) 同一の問題に対して、2つの手法を別個に適用してその良い方を採用すると、非常に優れた近似解が得られるということも報告されている [1]。
- (3) 効率指標による近似解法には、計算が簡便であること、制約条件がいっせいにある変化率で

表3 空間法

P_i	1	2	3	4	5
P_1	0.0238	0.0150	0.0122		
P_2	0.0182	0.0113	0.0092	0.0074	
P_3	0.0333	0.0157			
P_4	0.0112	0.0073	0.0060	0.0049	0.0045
P_5	0.0391				
P_6	0.0195	0.0084	0.0061	0.0045	0.0039
P_7	0.0053	0.0028	0.0022	0.0017	0.0015
P_8	0.0181	0.0106	0.0082	0.0066	0.0060
R_1	8	10	24	36	42
R_2	12	26	38	52	70

増加（あるいは減少）したとき、いちど順位づけを行なっていれば感度分析がしやすいなどの長所がある。さらに、現実の受注選択問題では、候補注文がすべて判明しているケースよりも、候補注文が任意の時点にばらばらに到着し、他のすべての到着を待つことなく受注採否の決定をしなければならない場合が多く、その場合に効率指標を採択の基準値として利用し、長期的な立場に立った決定を行なうことができる[10]。

(4) 有限勾配法、空間法とも複数制約の一元化の方法にそれぞれの特徴があらわれているが、一般に一元化の方法には多種多様なものが考えられる。そこで、制約領域における等制約使用量線のタイプに着目し、原点からの l 次距離 ($l=1, 2, \dots, \infty$) の考え方を応用して一元化の方法をまとめ、それぞれのタイプにもとづく近似解法の評価を行なった研究もある [3]。

(5) 長期的な設備投資計画では、計画期間全体のキャッシュフロー利益の最大化といった単一目標の下で考えるよりも、毎期の会計上利益、資金回収額なども考慮して、複数目標の下での計画問題として定式化したほうが実際的な場合が多い。その場合、数学的には多目標多制約の下でのプロジェクト選択問題として定式化される。本稿で紹介した効率指標を利用した近似解法は、このようなタイプの問題にも有効であって複数目標、複数制約をそれぞれ一元化し、それらの比である効率指標を作成してプロジェクトに順位づけを行なうことができる。複数目標の一元化のさいには、意思決定者の効用関数を反映させる必要があり、種々の工夫がなされている[2], [4]。

参 考 文 献

- [1] 福川忠昭, 山口俊和, 山梨哲哉: プロジェクトの選択問題に対するヒューリスティック・アプローチ, 日本経営工学会誌, Vol. 30, No. 1, (1979), pp. 37-42

- [2] 福川忠昭, 山口俊和, 福島 悟: 複数の目標をもつプロジェクト選択問題に対するヒューリスティック・アプローチ, 日本経営工学会誌, Vol. 32, No. 2 (1981), pp. 131-138
- [3] 福川忠昭, 山口俊和, 奈良雅子: 0-1 計画問題の近似解法における効率指標の検討, 日本経営工学会春季研究発表会予稿集, (1984), pp. 55-56
- [4] 福川忠昭, 山口俊和, 奈良雅子: マックスミニ型効用関数をもつプロジェクト選択問題に対する近似解法, オペレーションズ・リサーチ, Vol. 30, No. 6, (1985), pp. 392-396
- [5] Plane, D.R. and McMillan, C, Jr: Discrete Optimization, Prentice-Hall, Englewood Cliffs, (1971) (黒田充他訳: 「整数計画法入門」, 培風館, (1976))
- [6] Senju, S. and Toyoda, Y.: An Approach to Linear Programming with 0-1 Variables, Management Science, Vol. 15, No. 4, (1968), pp. 196-207
- [7] 豊田吉顕: 受注選択における候補注文の評価法, 日本経営工学会誌, No. 54, (1973), pp. 34-37
- [8] Toyoda, Y.: A Simplified Algorithm for Obtaining Approximate Solutions to Zero-One Programming Problems, Management Science, Vol. 21, No. 12, (1975), pp. 1417-1427
- [9] 豊田吉顕: 多資源制約下における有利なプロジェクトの選択に関する研究, IEレビュー, Vol. 18, No. 4, (1977), pp. 99-104
- [10] 豊田吉顕: 継続的受注選択問題に対する有効勾配法の適用に関する研究, IEレビュー, Vol. 18, No. 5, (1977), pp. 147-151

会員計報 **吉弘 貴氏** 72才

昭和60年10月12日 急性心不全のため死去されました。謹んでご冥福をお祈りいたします。