研究レポート

つり銭の準備額

小沢　正典

1. はじめに

懇親会・記念会・同窓会など，会費制の会合では，つり銭の準備額をどのくらいにすれば良いかという問題が，受付担当者の頭痛の種である．つり銭を多く用意すれば，安心していられるがそれだけ資金が必要になる．また，少ないと絶えずつり銭の残高を気にして，不足になりそうになれば両替に走らなければならない．そこで，それぞれの状況に応じてつり銭が不足する確率を知っておくことが必要となる．

たとえば，会費7千円の会合のとき，参加者が会費を1万円札で払う確率・千円札と五千円札で払う確率・千円札だけで払う確率を与え，これらの参加者がでたらめに到着するものとすれば，つり銭準備金の残高の変化は，マルコフ連鎖で書き表わせる．また，これらの確率については，経験的にデータを集めて推定することも大切であるが，さしあたって机上の議論である程度これらの値の範囲を絞り，数値計算をしてタタキ台を準備しておくことも必要である．本稿では，このような見地から，会費が千円～9千円で参加者が200名以内であるとき，つり銭が不足する確率が5%以下になるために必要なつり銭の準備額を計算してみた．受付を担当するときの参考にしてほしい．

おざわ　まさのり　慶応義塾大学　理工学部
〒223　横浜市港北区日吉3－14－1

2. マルコフ連鎖

ここでは，会費が千円刻みに千円から9千円までの場合について考えることにしよう．会費を千円単位にしたが，単位を置き換えれば，会費が百円～9百円でも十円～9十円の場合でも同様の議論が成り立つ．

さらに，会費が6千円以上の場合と5千円以下の場合の2通りに分けて考える．それは，会費が6千円以上の場合，つり銭の問題は1万円札に対してだけ考えれば充分だからである．むろん，2枚の5千円札で支払う人もあろうが，この場合その5千円札は以後つり銭としては用いられない．一方，会費が5千円以下の場合には1万円札と五千円札に対してつり銭を支払い，さらに，受け取った五千円札は次の1万円札のつり銭として使用できる．

会費6千円以上の場合(会費：6,7,8,9千円)

参加者が受付で1万円札で支払う確率をp，五千円札と千円札で支払う確率をq，千円札だけで支払う確率をrとし，これらで支払う参加者がランダムに到着するものとしよう．ここで，千円札の代わりに，小銭で支払うことも考えられるが，それは千円札とみなしてもさしつかえないので考えない．

さて，受付にある千円札の枚数がiである状態をS_iとし，つり銭が不足した状態をS_*としよう．状態は参加者が支払う千円札の枚数によって推移

する．ただし，状態 S_* からは，もはや他の状態には推移しない．つまり，吸収状態である．千円札の枚数が変化していくこの過程は，参加者の支払う千円札の枚数で決まり，また，その確率は過去の経緯によって左右されないのでマルコフ性をもつ．

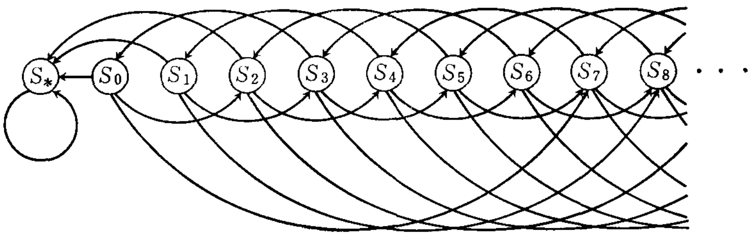

図 1　状態推移図
S_i：千円札の枚数
S_*：つり銭が不足した状態

はじめに，千円札を x 枚準備し，参加者が n 人くるとき，つり銭が途中で不足する確率は，このマルコフ連鎖において状態 S_x からスタートして，n 回の推移の後，状態 S_* に到達する確率となる．

会費5千円以下の場合（会費：1, 2, 3, 4, 5 千円）

参加者は，確率 p で1万円札，確率 q で五千円札，確率 r で千円札だけで支払うものとしよう．ここで，1万円札のおつりには，五千円札があれば五千円札を含めてつり銭を渡すことにする．

受付にある紙幣が，千円札 i 枚と五千円札 j 枚である状態を，$S_{i,j}$ とする．また，会費5千円以上の場合と同じく，つり銭が不足した状態を S_* とする．この場合も，受付にあるお札の枚数が変化していく過程は，マルコフ連鎖であらわされる．

したがって，千円札を x 枚・五千円札を y 枚準備し，参加者が n 人くるとき，つり銭が不足する確率は，このマルコフ過程において状態 $S_{x,y}$ からスタートして，n 回の推移の後，状態 S_* に到達する確率となる．

3.　確率 p, q, r

参加者が，どのような確率で1万円札で支払い，千円札だけで支払うか，確率 p, q, r を推定する必要がある．ここでは，次のような仮定をおいて，考えるべき確率 p, q, r の範囲を絞ってみた．

仮定1：参加者は，その場において可能な限りつり銭が不要なように，また，つり銭につかう紙幣の枚数が少なくてすむように支払う．

仮定2：参加者が所持している金額は，1万円札を除くと，0円から9999円ま

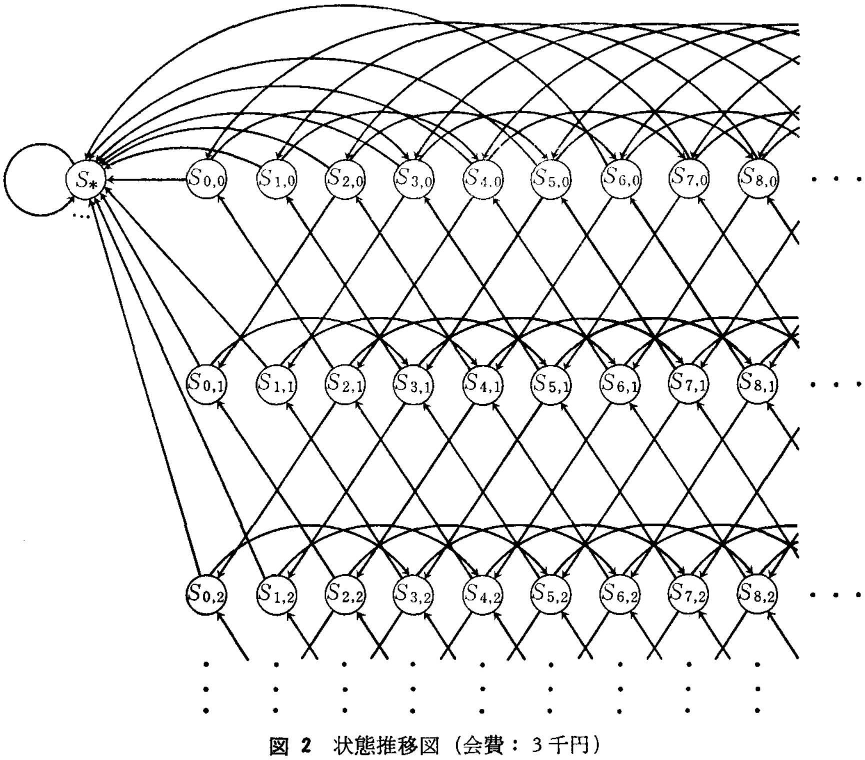

図 2　状態推移図（会費：3千円）
S_{ij}：5千円札の枚数—千円札の枚数
S_*：つり銭が不足した状態

でのあいだであり，かつ，その金額をもっている確率は，0円から9999円までのどれでも等しい．

仮定3：5千円以上もっている人の中には，五千円札をもっている人もいない人もいるが，もっている人の割合を t とする．この t は，どの金額（5千円以上）でもかわらない．

仮定1は，他の支払い方があるときには1万円札を使わないという仮定であり，仮定2は，所持金額には片寄りがないという仮定である．また，仮定3は5千円札をもっている確率についての仮定である．

さて，このような仮定の下で，会費が a 千円のときの確率 p, q, r を計算すると，

会費6千円以上の場合$(a=6,7,8,9)$

到着した参加者が1万円札で支払う確率 p は，参加者の財布に1万円札を除いて a 千円未満しか入っていない場合であるから $0.1 \cdot a$ となる．5千円札と千円札で支払う確率 q は，参加者が1万円札を除いて a 千円以上もち，しかも五千円札をもっている確率であるから $0.1 \cdot (10-a) \cdot t$，また千円札だけで支払う確率 r は $0.1 \cdot (10-a) \cdot (1-t)$ となる．

会費5千円以下の場合$(a=1,2,3,4,5)$

到着した参加者が1万円札で支払う確率 p は，参加者の財布に1万円札を除いて a 千円未満しか入っていない場合であるから会費6千円以上の場合と同じに $0.1 \cdot a$ となる．五千円札で支払う確率 q は，参加者が1万円札を除いて5千円以上もちしかも $(a+5)$ 千円以下で，さらに五千円札をもっている確率であるから $0.1 \cdot a \cdot t$（会費5千円のときのみ，$q=0$），また千円札だけで支払う確率 r は $1-p-q$ となる．

4. 準備する枚数

以上でもちいたパラメーター t，すなわち，5千円以上もっている人で，五千円札をもっている割合 t は，次のように推定する．

いま，ある参加者がもっている千円札の期待枚数 u を計算すると，

$$u=(0+1+2+3+4) \cdot 0.1+(5+6+7+8+9) \cdot 0.1 \cdot (1-t)+(0+1+2+3+4) \cdot 0.1 \cdot t$$
$$=4.5-2.5 \cdot t$$

また，5千円札の期待枚数 v は，

$$v=5 \cdot 0.1 \cdot t=0.5 \cdot t$$

となる．そこで，u と v の比が全国に流通している千円札と五千円札の量の比になるものとしてみよう．文献[1]によれば，千円札と5千円札の流通枚数は，千円札：230460万枚，五千円札：22700万枚であるから

$$t=0.593964$$

となる．

日銀では，この t の値を統制しているわけではないので，その値は各月ごと・年度ごとに変化する（実際，t は増加傾向にある）．そこで，参考までに他の t の値

$t=0.788469$（百円玉と五百円玉の流通量の比）

$t=0.900851$（十円玉と五十円玉の流通量の比）

についても必要なつり銭の準備額を計算しておこう．ただし，百円札・五十円札・十円札は除いてある（文献[1]より）．

各 t 値において，参加者が n 人であるときの，つり銭が不足する確率が0.05以下になるために必要な準備額のグラフを次のようにして求めた．会費(a 千円)・参加者数(n)・t 値を定め，つり銭の準備額を0円から千円ずつ増加させ，マルコフ連鎖における S_* の確率を計算して，はじめて S_* の確率が0.05以下になる準備額をプロットした．その結果のグラフが，図3（会費4千円以下）・図4（会費5千円以上）である．

注1．会費が5千円未満であるとき，準備するつり銭には五千円札を入れないで千円札のみ用意するものとした．

注2．準備額のグラフは実際には階段状であるが，図3・図4には，階段の上側のかどをむすぶなめらかな曲線で示した．

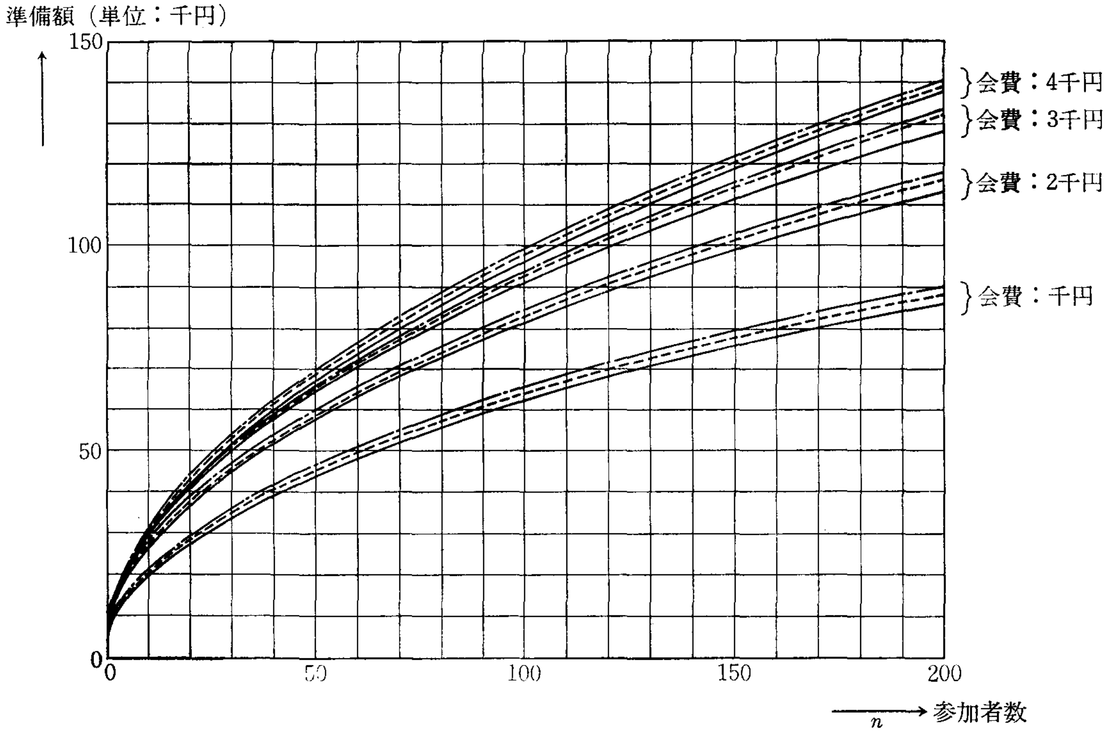

図 3 参加者数nに対して，つり銭が不足する確率が0.05以下になるのに必要なつり銭準備額
（会費：5千円未満）
——：$t=0.594$……：$t=0.788$-・-・-：$t=0.901$
（t：5千円札をもっている割合）

注3．関数$n\cdot\alpha+\sqrt{n}\cdot\beta$が，準備額のグラフを近似するのによさそうである．いま，会費が6千円以上の場合，状態Sの代わりに，千円札の枚数にマイナスの数をまで許した状態を設け，さらに，この状態からの推移も許してみる．このとき，状態Sからスタートし，nステップ後の状態分布を考え，状態変数Wに，次の変換を行なうと，

$$Z=(W-n\cdot\alpha)/\{\sqrt{n}\beta\}$$

$n\to\infty$のとき，Zの分布が平均0，分散1の正規分布に収束する．ここに，

$$\alpha=(a-10)\cdot p+(a-5)\cdot q+a\cdot r$$

$$\beta=\sqrt{(a-10)^2\cdot p+(a-5)^2\cdot q+a^2\cdot r-\alpha^2}$$

このことから，関数$n\cdot\alpha+\sqrt{n}\cdot\beta$が準備額のグラフに近いことが予想される．

実際，関数$n\cdot\alpha+1.65\cdot\sqrt{n}\cdot\beta$のグラフを描いてみると会費が6千円以上の場合は，準備額のグラフと大きな違いはないことがわかる．

注4．図3において，各tの値によってグラフがあまり違わないのは，五千円札につり銭を渡しても，その受け取った五千円札は，千円札5枚とみなしてもあまり違いがないことを示している．

おわりに

会費7千円・参加者73名のパーティがあった．グラフによれば千円札の必要準備枚数は多く見つもっても140枚である．しかし，受付側では念のため千円札を150枚準備していたが，とにかくつり銭が不足することはなかった．実際1万円札で

支払った人は57人，五千円札と千円札で，支払った人13人，千円札だけは3人であった．順番を無視していえば，171枚の千円札がつり銭として支払われる一方，47枚の千円札を受け取っていることになるから，差し引き124枚の千円札が出ていったことになる．

この事例では，8割の人が1万円札で支払ったことになるから，本稿での推定値7割より多く，また，千円札だけで支払った人は推定より少なかったことになる．このように参加者は，千円札だけで支払うより1万円札で支払いがちになるものと考えてもよいのであろうか．また，五千円札をもっている確率についての仮定を考慮し直すべきであろうか．これらの点については，机上の議論でなく実際のデータを収集して再検討する必要がある．

残念なことに筆者の場合，パーティなどは，年に何回もあるものでない．受付からデータをもらいにいくこともある．そこで，皆さんのご協力を得れられば幸いだと思います．パーティなどで受付をご担当になる機会がありましたら，ぜひ，結果をお知らせくださるようお願いいたします．

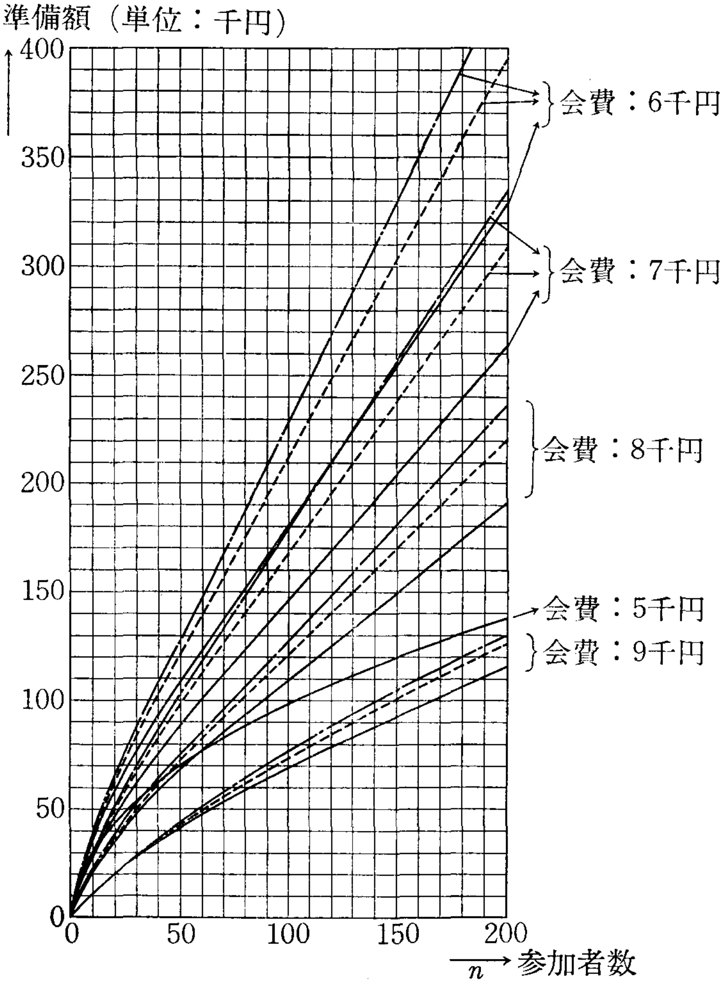

図 4　参加者数nに対して，つり銭が不足する確率が0.05以下になるのに必要なつり銭準備額
（会費：5千円以上）
——：$t=0.594$……：$t=0.788$–·–·–：$t=0.901$
（t：5千円札をもっている割合）

参考文献

［1］「昭和59年度　経済統計年報」
日本銀行調査統計局刊行

［2］森村英典・高橋幸雄著「マルコフ解析」
日科技連出版社