研究レポート

逆数関数の最小点について

村松　健児

1.　はじめに

本稿は筆者が**逆数関数**と呼ぶ次の関数の最小点を解析的な形で与えるものである：

$$f(x_1, x_2, \cdots, x_n)=(a_0+\sum_{i=1}^{n}a_ix_i)(b_0+\sum_{i=1}^{n}b_i/x_i) \tag{1}$$

ここに，$x_1, x_2, \cdots, x_n$ が変数で，関数(1)は正領域

$$x_1>0, x_2>0, \cdots, x_n>0$$

で定義されているものとする．また，a_0, b_0 は非負の，$a_1, b_1, a_2, b_2, \cdots, a_n, b_n$ は正のパラメーターである：

$$a_0 \geqq 0, b_0 \geqq 0$$
$$a_1>0, a_2>0, \cdots, a_n>0$$
$$b_1>0, b_2>0, \cdots, b_n>0.$$

有名なウィルソンの経済ロットサイズ公式を導く目的関数は，この式の $n=1$ の場合であるが，オペレーションズ・リサーチの問題には，$n \geqq 2$ の場合に帰着される問題も数多い．ところが筆者の知るかぎり，そのような問題に関する研究も，(1)式の最小点が解析的に求まることを知らずにとり扱っていると思われるものばかりである．

数学的には決してむずかしいことではないが，最小点の存在の条件と最小点を，公式の形でまとめておくことも応用の見地からは必要だと考えたので，この紙面をおかりすることにした．

むらまつ　けんじ　東海大学　工学部　経営工学科
〒259-12 平塚市北金目1117

2.　最小点の公式

ダミー変数 $x_0=1$ を導入すれば，(1)式は

$$f(x_1, x_2, \cdots, x_n)=\sum_{i=0}^{n}a_ix_i\sum_{i=0}^{n}b_i/x_i \tag{2}$$

と書き改めることができる．ここでさらに

$$v_i=\sqrt{a_ix_i}$$
$$w_i=\sqrt{b_i/x_i}$$

とおけば右辺は

$$\sum_{i=0}^{n}{v_i}^2\sum_{i=0}^{n}{w_i}^2$$

となる．この式にコーシー・シュヴァルツの不等式

$$\sum_{i=0}^{n}{v_i}^2\sum_{i=0}^{n}{w_i}^2 \geqq (\sum_{i=0}^{n}v_iw_i)^2 \tag{3}$$

を適用して変数をもとにもどせば，

$$\sum_{i=0}^{n}a_ix_i\sum_{i=0}^{n}b_i/x_i \geqq (\sum_{i=0}^{n}\sqrt{a_ib_i})^2 \tag{4}$$

となる．このことから，関数 $f(x_1, x_2, \cdots, x_n)$ の**下界**として次式を得る：

$$f(x_1, x_2, \cdots, x_n) \geqq (\sqrt{a_0b_0}+\sum_{i=1}^{n}\sqrt{a_ib_i})^2 \tag{5}$$

コーシー・シュヴァルツの不等式において等式が成立する必要十分条件は，(3)式において

$$(v_0, v_1, \cdots, v_n) \propto (w_0, w_1, \cdots, w_n)$$

すなわち，(4)式において

$$a_0=\mu b_0 \tag{6-a}$$
$$a_ix_i=\mu b_i/x_i \tag{6-b}$$

となる $\mu \neq 0$ が存在することである．

$a_0, b_0 \geqq 0$ という仮定から，このような μ は，存在すれば正の値でなければならない．したがって，(6-b)式を満たす x_i は

$$x_i=\sqrt{\mu}\sqrt{\frac{b_i}{a_i}} \tag{7}$$

を満たす．

いま，t を非負のパラメターとして半直線

$$x_i=t\sqrt{\frac{b_i}{a_i}} \tag{8}$$

を考え，これを逆数関数(1) の軸と呼ぶことにしよう．

関数(1) の最小点はもし存在すれば，この軸上に位置する．だから，最小点の存在や位置を調べるには，関数(1)に(8)式を代入して得られる，この軸による切断面の形

$$\varphi(t)=(a_0+t(\sum_{i=1}^{n}\sqrt{a_ib_i}))(b_0+\frac{1}{t}(\sum_{i=1}^{n}\sqrt{a_ib_i})) \tag{9}$$

を観察すればよい．

(i) $a_0=b_0=0$ ならば

$$\varphi(t)\equiv(\sum_{i=1}^{n}\sqrt{a_ib_i})^2$$

すなわち，軸上のすべての点で最小値が得られる．

(ii) $a_0>0, b_0=0$ ならば

$$\varphi(t)=(\sum_{i=1}^{n}\sqrt{a_ib_i})^2+\frac{a_0}{t}(\sum_{i=1}^{n}\sqrt{a_ib_i})$$

すなわち，$\varphi(t)$は t の単調減少関数であり，いわば無限遠点において下界

$$(\sum_{i=1}^{n}\sqrt{a_ib_i})^2$$

に近づく（(4)式参照)．いいかえれば，有限の最小点は存在しない．実際，$b_0=0$ の場合には(6-a)式を満たす正の値 μ も存在しない．

(iii) $a_0=0, b_0>0$ ならば

$$\varphi(t)=b_0(\sum_{i=1}^{n}\sqrt{a_ib_i})t+(\sum_{i=1}^{n}\sqrt{a_ib_i})^2$$

すなわち，軸上では，正の勾配をもつ t の 1 次関数となるから t がゼロに近づくにつれて f の下界

$$(\sum_{i=1}^{n}\sqrt{a_ib_i})^2$$

表 1 $f(x_1, x_2, \cdots, x_n)=(a_0+\sum_{i=1}^{n}a_ix_i)(b_0+\sum_{i=1}^{n}b_i/x_i)$ の最小値と最小点

b_0 \ a_0	0	+
0	最小点：軸上のすべての点 $x_i=t\sqrt{\frac{b_i}{a_i}}$ 最小値：$(\sum_{i=1}^{n}\sqrt{a_ib_i})^2$	最小点：存在しない $\left(x_i=\lim_{t\to\infty}t\sqrt{\frac{b_i}{a_i}}\right)$ 下限：$(\sum_{i=1}^{n}\sqrt{a_ib_i})^2$
+	最小点：存在しない $\left(x_i=\lim_{t\to 0}t\sqrt{\frac{b_i}{a_i}}\right)$ 下限：$(\sum_{i=1}^{n}\sqrt{a_ib_i})^2$	最小点：$x_i=\sqrt{\frac{a_0b_i}{b_0a_i}}$ 最小値：$(\sqrt{a_0b_0}+\sum_{i=1}^{n}\sqrt{a_ib_i})^2$

に近づく．しかし，$t=0$ とすれば $x_i=0$ となるから，これは定義域を逸脱してしまう．つまり，この場合にも，定義域には最小点は存在しない．実際，(6-a) 式を満足するゼロでない μ の値も存在しない．

(iv) $a_0>0, b_0>0$ の場合には

$$\varphi(t)=a_0b_0+(\sum_{i=1}^{n}\sqrt{a_ib_i})^2+(b_0\sum_{i=1}^{n}\sqrt{a_ib_i})t +a_0\sum\sqrt{a_ib_i})\frac{1}{t} \tag{10}$$

という関数は t の増加にともない，いったん減少して最小点に到達した後単調に増加する．最小点は $\varphi(t)$ の微係数がゼロになる

$$t=\sqrt{\frac{a_0}{b_0}} \tag{11}$$

である．実際，この場合 $\sqrt{\mu}=\sqrt{\frac{a_0}{b_0}}$ は (6-a) 式を満たしている．

(11)式を(8)式に代入すれば，逆数関数(1)の最小点

$$\hat{x}_i=\sqrt{\frac{a_0b_i}{b_0a_i}} \tag{12}$$

が得られる．対応する最小値は

$$f(\hat{x}_1, \hat{x}_2, \cdots, \hat{x}_n)=(\sqrt{a_0b_0}+\sum_{i=0}^{n}\sqrt{a_ib_i})^2 \tag{13}$$

である．

以上の結果を表 1 に，また $n=2$ の場合の逆数関数の等高線図と適宜設定された切口 (PQ) による切断面を示しておいた．切断面からはこの関数

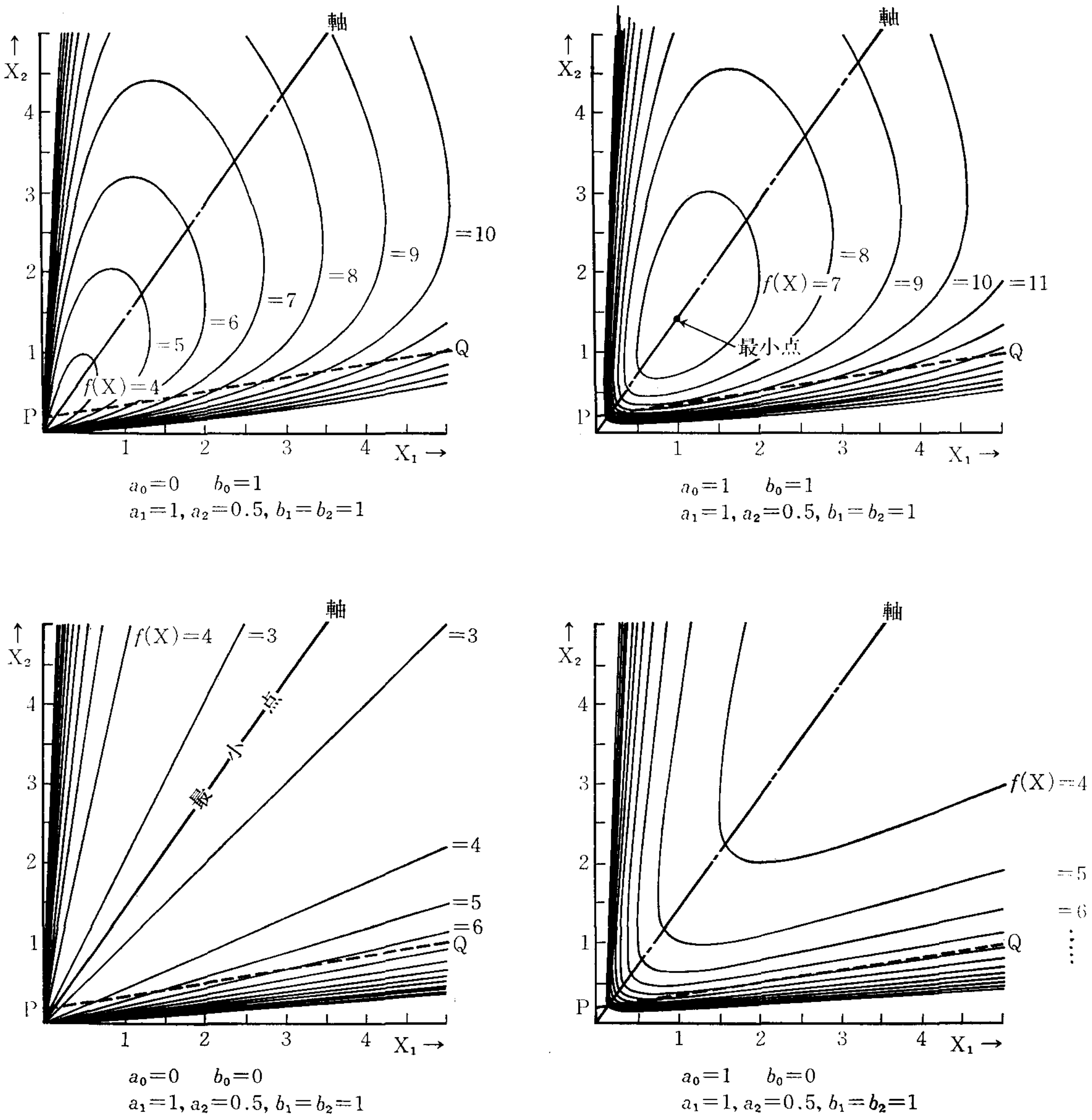

図 1 $f(x)=(a_0+\sum_{i=1}^{2}a_ix_i)(b_0+\sum_{i=1}^{2}b_i/x_i)$ の等高線図

が必ずしも凸関数でないことがわかる．

3. 例　題

目的関数が逆数関数の形に帰着されるオペレーションズ・リサーチの例題は数多い．ここでは，2～3の典型的な例題を示し，これを本稿の公式の適用例として見なおしてみる．

例題 1　ウィルソンの経済ロット公式

毎日一定量rの売れ行きを保つ商品がある．品切れを生じないよう，一定間隔Tごとに一定量Qを補充している．補充1回につき発注費βを生ずる．また，平均在庫水準と期間に比例(係数h)して在庫費用が発生する．単位期間当りの総費用を最小にするような発注量Qが求めたい．

図3から明らかなように，1回の発注量Qについて

$$Q=rT$$

が成立するから，発注間隔Tが定まれば発注量が定まる．Tの関数として費用を定式化しよう．

単位期間内における発注の回数は$1/T$であるから発注費用はb/T．平均在庫は図からも明らかなように，$Q/2=rT/2$ であるから単位期間当りの費用は$hrT/2$．総費用fは

$$f(T)=\frac{hr}{2}T+\beta/T \qquad (14)$$

となる．すなわち，逆数関数 $n=1, a_0=b_0=1, a_1=\frac{hr}{2}, b_1=\beta$ から定数項 $1+a_1b_1$ を引いたものである．したがって，最適発注期間Tおよび発注量はそれぞれ

$$T=\sqrt{\frac{2\beta}{hr}}$$

$$Q=rT=\sqrt{\frac{2\beta r}{hr}}$$

となる．また，そのときの単位期間当りの総費用は

$$(1+\sqrt{a_1b_1})^2-(1+a_1b_1)=2\sqrt{a_1b_1}=\sqrt{2hr\beta}$$

となる．

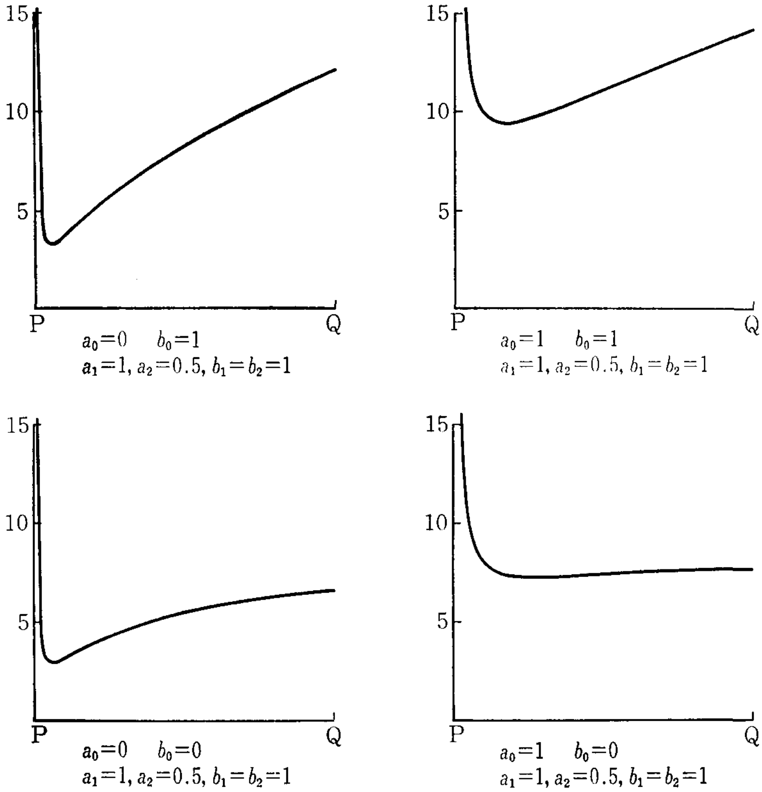

図 2 $f(x)=(a_0+\sum_{i=1}^{2}a_ix_i)(b_0+\sum_{i=1}^{2}b_i/x_i)$ の切断面

例題 2 宅地造成の問題

提示された金額で，ある小さな宅地造成の仕事を請けおった．土砂搬出用ダンプカー，削地用ブルドーザーは，どのようなパワーのものでも必要な期間だけ会社から借り受けることができるが，借りている期間にわたって毎日パワーに応じた使用料を支払わなくてはならない．総使用料が最小になるような借り方を見つけたい．

ダンプカーおよびブルドーザーのパワーをそれぞれ x_1, x_2 とすれば，1日当り使用料は $\alpha_{01}+\alpha_1x_1, \alpha_{02}+\alpha_2x_2$，所要日数は $\beta_0+\beta_1/x_1+\beta_2/x_2$ によって見積られるとしよう．ここに $\alpha_{01}, \alpha_{02}, \alpha_1, \alpha_2, \beta_0, \beta_1$ および β_2 は定数であるが，β_0 はこの仕事のうち x_1, x_2 に無関係な作業日数，β_1, β_2 はそれぞれ土砂の総量，削るべき延面積に依存する係数と考えればこれらの式の妥当性が納得できよう．

そこで，この問題は結局，1日当り機械使用料と仕事の所要日数の積

$$G=(\alpha_{01}+\alpha_{02}+\sum_{i=1}^{2}\alpha_ix_i)(\beta_0+\sum_{i=1}^{2}\beta_i/x_i)$$

を最小にする問題になる．

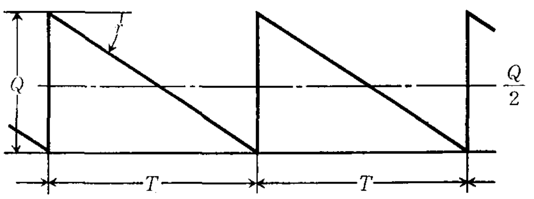

図 3 在庫量の推移

$a_0=\alpha_{01}+\alpha_{02}, a_1=\alpha_1, a_2=\alpha_2, b_0=\beta_0, b_1=\beta_1, b_2=\beta_2$ とおけば，G は逆数関数 $n=2, a_0>0, b_0>0$ になる．したがって，最適解および総使用料の最小値は，それぞれ(12)，(13)式に上の $a_0, a_1, a_2, b_0, b_1, b_2$ を代入して

$$\hat{x}_i=\sqrt{\frac{a_0b_i}{b_0a_i}}=\sqrt{\frac{\alpha_{01}+\alpha_{02}}{\beta_0}\cdot\frac{\beta_i}{\alpha_i}},\quad i=1,2$$

$$G(\hat{x}_1,\hat{x}_2)=(\sqrt{a_0b_0}+\sum_{i=1}^{2}\sqrt{a_ib_i})^2$$

$$=(\sqrt{(\alpha_{01}+\alpha_{02})\beta_0}+\sum_{i=1}^{2}\sqrt{\alpha_i\beta_i})^2$$

を得る．

例題 3　一括生産の問題［3］

ある食品メーカーがある．いろいろな食品を製造販売しているが，その中の1つ**カレールー**には，甘口(品目1)，中辛(品目2)，辛口(品目3)があって，それぞれ毎日ほぼ一定の比率 r_1, r_2, r_3 で売れている．カレールーの生産には，ラインの段取替が必要で，この費用は，作る品目と品目数に無関係に毎回発生する費用部分 S_0 と，作る品目 i に対して発生する費用部分 s_i とから成っている．ここに S_0 は s_1, s_2, s_3 に比べて大きい．そこで，1回の段取替ののち2品目以上をひきつづいて作る場合の段取替費用は $S_0+\sum_i s_i$ になる．和 $\sum$ はその回に作られるすべての品目 i に関するものである．一方，品目 i の在庫に対して1日1単位当り h_i の保管費がかかる．いずれの品目についても品切れは許されない．

段取替費用と在庫保管費とから成る総費用の単位期間当り平均を最小にする生産の仕方を検討したい．1つの妥当な生産の仕方は，"一定間隔 T ごとにラインを切替えて**カレールー**を作ることにし，どれか1品目をそのたびに一定量ずつ生産しさらに他の品目 i については x_i 回の切替えにつき1回ずつ先の品目に抱き合わせて生産する" というものであろう．

1回当りの生産所要時間は T に比べて非常に小さい場合を想定して無視しよう．また，この問題で陽に扱っていない他の食品とのライン干渉もとりあえず無視することにすれば，品切れは許されないから，品目 i の生産ロットサイズ Q_i について

$$Q_i=r_ix_iT$$

が成立し，平均在庫水準は

$$Q_i/2=r_ix_iT/2$$

となる．一方，段取替費用 S_0, s_1, s_2, s_3 はそれぞれ期間 T, x_1T, x_2T, x_3T につき1回の割合で発生する．したがって，単位期間当り総費用 R は，

$$R=\sum_{i=1}^{3}\frac{h_i}{2}r_ix_iT+\left(S_0+\sum_{i=1}^{3}\frac{s_i}{x_i}\right)\frac{1}{T}$$

である．

R は T に関して $n=1$ の逆数関数である．すなわち，逆数関数 $n=1, a_0=b_0=1, a_1=\sum_{i=1}^{3}h_ir_ix_i/2$, $b_1=S_0+\sum_{i=1}^{3}s_i/x_i$ から定数項 $1+a_1b_1$ を引いたものである．したがって，最適期間 T は(12)式の上の a_0, b_0, a_1, b_1 を代入して，

$$\hat{T}=\sqrt{\frac{a_0}{b_0}\frac{b_1}{a_1}}=\sqrt{\frac{S_0+\sum_{i=1}^{3}s_i/x_i}{\sum_{i=1}^{3}h_ir_ix_i/2}}$$

を得る．このとき，R の最小値は(13)式から

$$\hat{R}=2\sqrt{a_1b_1}=2\sqrt{\sum_{i=1}^{3}\frac{h_ir_i}{2}x_i(S_0+\sum_{i=1}^{3}s_i/x_i)}\quad(15)$$

となる．したがって，

$$f(x_1,x_2,x_3)\equiv\sum_{i=1}^{3}\frac{h_ir_i}{2}x_i\left(S_0+\sum_{i=1}^{3}\frac{s_i}{x_i}\right)\quad(16)$$

を最小にすればよく，これはまた x_1, x_2, x_3 に関する逆数関数 $n=3, a_0=0, b_0=S_0>0, a_i=h_ir_i/2$, $b_i=s_i(i=1,2,3)$ である．ところが，この場合には最小値は存在しない．すなわち

$$x_i=\lim_{t\to 0}t\sqrt{\frac{b_i}{a_i}}$$

で下限に近づく．しかし，x_i はもともと回数を表わす変数であるから正の整数でなければならない．だから，x_1, x_2, x_3 のうち最小のもの，すなわち最小の $\frac{b_i}{a_i}$ に対応する x_i は1という値をとることになる．いま，一般性を失うことなく $x_1=1$ とすれば

$$f(1,x_2,x_3)=\left(\frac{h_1r_1}{2}+\sum_{i=2}^{3}\frac{h_ir_i}{2}x_i\right)\left(S_0+s_1+\sum_{i=2}^{3}\frac{s_i}{x_i}\right)\quad(17)$$

となって，今度は $n=2, a_0=h_1r_1/2, b_0=S_0+s_1$ の場合の逆数関数が得られる．この最小点は公式(12)から

$$\hat{x}_i=\sqrt{\frac{h_1r_1}{S_0+s_1}\cdot\frac{s_i}{h_ir_i}},\quad i=2, 3$$

となる．式(17)の最小値を公式(13)を用いて求め，その結果を(15)式に代入すれば，Rの最小値は

$$\hat{\hat{R}}=2\left(\sqrt{\frac{h_1r_1}{2}(S_0+s_1)}+\sum_{i=2}^{3}\sqrt{\frac{h_ir_i}{2}s_i}\right)$$

となる．この $\hat{x}_i$ 整数に丸めれば実用上の解が得られる．

例題 4　1倉庫2小売店ロットサイズ問題［3］

2つの小売店 $i=1,2$ がある．両店とも商品Gをとり扱っており，1日当りの売上げはそれぞれ $r_i\ (i=1,2)$ で毎日ほぼ一定である．両店は倉庫を共有し，倉庫は一定間隔Tごとにこの商品を一定量Q購入，両小売店にそれぞれ x_i 回に分けて一定量ずつ供給している．品切れは許されないから購入量Qのうち小売店1の1回当りの分は r_1T/x_1，小売店2の分は r_2T/x_2 で，

$$Q=x_1\cdot\frac{r_1T}{x_1}+x_2\cdot\frac{r_2T}{x_2}=(r_1+r_2)T$$

が成立する．

倉庫，小売店における発注費用は s_0, s_1, s_2 であるから1日当りの発注費は

$$(s_0+s_1x_1+s_2x_2)/T$$

となる．

一方，在庫費用は倉庫，小売店のそれぞれで h_0, h_0+h_1, h_0+h_2 円/(平均在庫水準・日)である．倉庫および小売店の在庫の変動は図4のようになるが，小売店在庫に対する保管費のうち1日1単位当り h_0 の費用を倉庫内のものに上載せして見積ることにすれば，h_0 に対する在庫は，図4の点線部分になるから総在庫費は

$$\frac{h_0r_1T}{2}+\frac{h_0r_2T}{2}+\frac{h_1r_1T}{2x_1}+\frac{h_2r_2T}{2x_2}$$

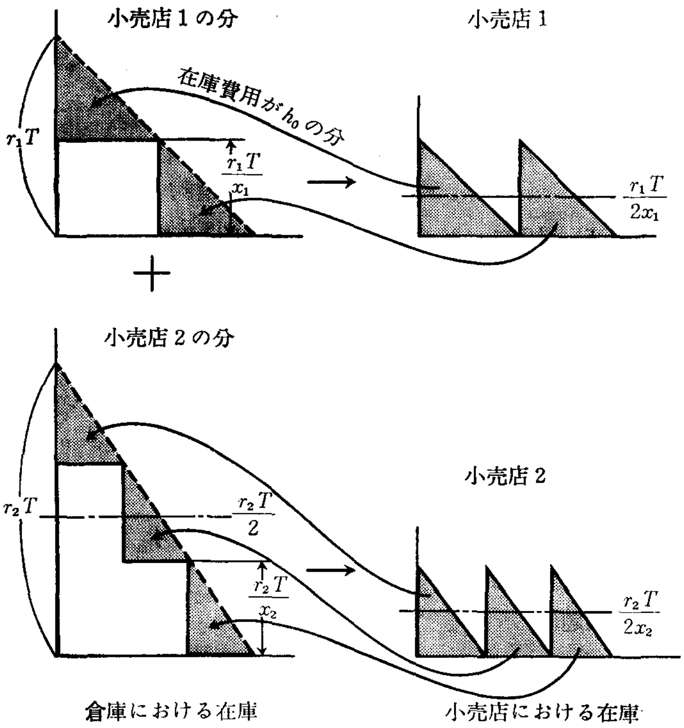

図 4　2つの小売店をまかなう倉庫の在庫量

となる．したがって，総費用は

$$R=\frac{s_0+s_1x_1+s_2x_2}{T}+\left\{\frac{h_0(r_1+r_2)}{2}+\frac{h_1r_1}{2x_1}+\frac{h_2r_2}{2x_2}\right\}T$$

となる．この関数をTに関して見れば例1，3と同様に $n=1$ の逆数関数となり，その最小点および最小値は

$$\hat{T}=\frac{s_0+s_1x_1+s_2x_2}{\dfrac{h_0(r_1+r_2)}{2}+\dfrac{h_1r_1}{2x_1}+\dfrac{h_2r_2}{2x_2}}$$

$$\hat{R}=2\sqrt{(s_0+s_1x_1+s_2x_2)\left(\frac{h_0(r_1+r_2)}{2}+\frac{h_1r_1}{2x_1}+\frac{h_2r_2}{2x_2}\right)}$$

となる．したがって

$$(s_0+s_1x_1+s_2x_2)\left\{\frac{h_0(r_1+r_2)}{2}+\frac{h_1r_1}{2}\cdot\frac{1}{x_1}+\frac{h_2r_2}{2}\cdot\frac{1}{x_2}\right\}$$

を最小にすればよい．これはまた逆数関数であり，

$$\hat{x}_i=\sqrt{\frac{s_0}{h_0(r_1+r_2)}\cdot\frac{h_ir_i}{s_i}},\quad i=1, 2$$

$$\hat{R}=\sqrt{2s_0h_0(r_1+r_2)}+\sqrt{2s_1h_1r_1}+\sqrt{2s_2h_2r_2}$$

を得る．しかし，x_i はもともと回数をあらわす変数で，正の整数でなければならないから，実用上の解を得るには，ここで求めた $\hat{x}_i$ を丸めておけばよい．

例題 5 層別ランダムサンプリングにおける最適割当て［1］

制約条件

$$g(x_1, x_2)=c>0 \tag{18}$$

のもとで

$$f(x_1, x_2)$$

を最小にせよという問題の解法には普通ラグランジュ乗数法が用いられるが，次のような解法を考えることもできる．

この問題は

$$g(x_1, x_2)=c \tag{18-b}$$

の条件のもとで

$$h(x_1, x_2)=f(x_1, x_2)g(x_1, x_2) \tag{19}$$

を最小にする問題と等価であるから，$h(x_1, x_2)$ のとり扱いが容易ならこの形を用いればよい．いま制約条件が

$$g(x_1, x_2)=a_1x_1+a_2x_2=c$$

で与えられ，目的関数が

$$f(x_1, x_2)=\frac{b_1}{x_1}+\frac{b_2}{x_2}$$

である場合には

$$h(x_1, x_2)=(a_1x_1+a_2x_2)\left(\frac{b_1}{x_1}+\frac{b_2}{x_2}\right)$$

は逆数関数であるから，その最小点は

$$x_i=t\sqrt{\frac{b_i}{a_i}},\ i=1, 2$$

を満たす．この関係を(18)式に代入して t を求めれば

$$t=c/(\sqrt{a_1b_1}+\sqrt{a_2b_2})$$

となるから最小解としては

$$x_i=c\sqrt{\frac{b_i}{a_i}}\Big/(\sqrt{a_1b_1}+\sqrt{a_2b_2}),\ i=1, 2 \tag{20}$$

が得られる．

このような形の最適化問題は，標本調査等において，各層の最適サンプリング数を求める場合にもその例が見られる［1］

紙面の都合上割愛するが，**多品目多段階生産在庫管理システム**におけるロットサイズ問題にも，やはり本稿の公式が適用できるものがある［2］，［4］．通常の工場に見られる生産在庫システムでは，複数の品目から作られて次工程で再び複数の品目に組み込まれる品目も少なからず存在するから，さらに広い範囲での利用も期待できる．

参考文献

［1］ W.G.コクラン，鈴木達三他訳，サンプリングの理論と方法，99-111，東京図書，1972

［2］ K. Muramatsu, "Economic Lot Size Determination in Multi-Item Multi-Level Production Inventory Systems", Proceedings of 7th ICPR, 292-298, 1983

［3］ K. Muramatsu and H. Yanai, "On Some properties of a Reciprocal Function related to Production and Inventory Control Problems", Technical Report No. 8501, Dept. of Administration Engineering, Keio University, 1985

［4］ 村松健児，"経済発注量公式の多品目多段階生産在庫システムへの拡張"，日本経営工学会昭和60年度春季大会予稿集，174-175