研究レポート

反り屋根の形

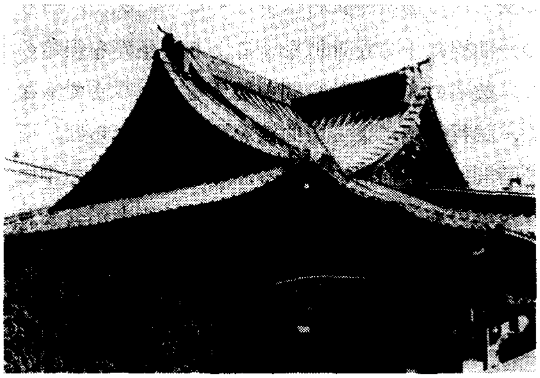
柳井　浩・岡村　潔

1. はじめに

反り屋根は，日本の建築において，神社・仏閣等を中心として広く見られる屋根の形である．しかし，これが日本に入ってきたのは，中国大陸の建築様式が伝えられた6世紀以降のことである[1].

中国大陸において，なにゆえ反り屋根が用いられるようになったかについては，明らかでない．天幕の模倣という見方もある[2]．別のいい方にもなるが，材料の引張り強さに関する，応用上の経験と信頼感に工学的動機を求めることもできよう．また，視野の大部分を横切るような直線が，人間には弯曲して見えるため，これを修正する美術的手段として用いられたのだという考え方もある．いずれにせよ，反り屋根は，中国を中心とする，東洋一円において，広く用いられる所となった．

特に日本においては，建築のみならず，城壁等の石垣にも，類似の曲線が用いられる等，反り屋根の曲線が，さらに広く用いられるようになった．それと同時に，富士山という成層火山の存在をはじめとする日本の自然と，日本人の美意識は，この曲線の形状に，微妙な影響を与えたようである[3]．この曲線は，大陸のそれとはどこか



が違う，日本独特の伝統的な曲線として定着したように見える．

ところで，反り屋根の伝統的な施工方法は，加重した懸垂線を用いることであった．両端を固定した鎖や糸等をたらして，いわゆる懸垂線(カテナリー)を作り，さらにその途中の何カ所かにおもりをさげて形をととのえ，設計者から与えられた曲線を近似するのである．曲線の形を定めるには，従来，別の場所に実験場を設け，試行錯誤の結果として適当な条件を求めたり，あるいは，施工現場において設計者から直接指示をあおいで，おもりの位置や重さを調整し，設計者のイメージに合ったもの

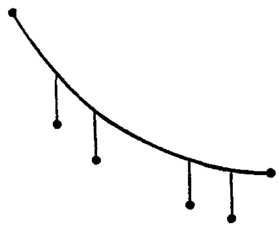


図 1

やない　ひろし　慶応義塾大学　横浜市港北区日吉3—14—1
おかむら　きよし　竹中工務店

を模索するという方法がとられた．したがって，この方法は，施工者が所与の曲線を再現するばかりでなく，設計者自身が曲線のイメージを形づくるのにも，あずかるところ大であった．

しかしながら，このような実験を行なうには，現寸大の壁面に予定された曲線を描き，これに沿って鎖をたらし，その前に足場をくんで，おもりを調整したり，鎖の位置を測定しなければならない．また，曲線の形を見わたすためには，壁面の前に相応の開けた空間がなければならない．——必要となる場所や資料は少なくない．また，所与の一曲線に十分な近似をするような条件を得るのに，数名の人手と数時間を要する．いうまでもなく，試行錯誤によって曲線を模索するならば，所要時間はこの何倍にもなる．さらに，人手の中には現場の施工が実施できる高度の技能者が含まれていなければならない．——実験は，多額の費用と時間を要する．

そこで，鎖の長さ，両端の位置，おもりの目方と配置等の諸元を与え，これから数学的な方法によって曲線の形を求めることが容易にできれば，施工上また設計上利点が多い．近似曲線として諸元が満たすべき条件を，計算上の試行錯誤によって探索することも，またさらに洗練された近似法をこれにもとづいて開発することもできよう．

また，感度分析によって，施工上留意すべき点を，計算によって調べることもできる．さらに重要なことは，鎖とおもりによって作られる曲線に対して，数学的な表現が与えられ，パラメターによって曲線を特定（アイデンティファイ）できるようになる点である．設計の標準化を可能にするばかりではない．将来，反り屋根の曲線が美学的分析の対象となることがあれば，分類の基礎を与えることができる．

伝統的な変分学[4]において周知のごとく，一様で完全にたわみやすい鎖の両端を固定してたらせば，双曲線余弦関数（コサイン・ハイパボリック）——いわゆる懸垂線（カテナリー）——になる．途中におもりをつるせば，全体としての形は変るが，加重点間の部分は，それぞれまた双曲線余弦関数になる．すなわち，鎖とおもりによって作られる曲線は“区分双曲線余弦関数”ということになる．いいかえれば，反り屋根の曲線は，鎖を“スプライン”として近似されるのだということができる．

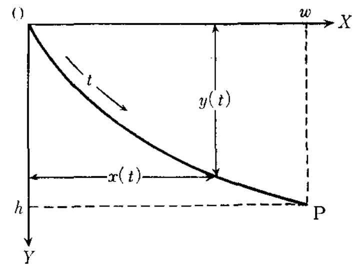


図 2

したがって，鎖とおもりによって作られる曲線は各区分における双曲線余弦関数のパラメターを与えることによって特定できるし，またその形を計算するのも容易である．だから，問題は，鎖とおもりをめぐる諸元から，これらのパラメターを計算することになる．ところがこの計算には，非線形要素が強く働き，数値計算上の困難がともなう．幸い，昨今電子計算機や作図機の性能も向上し，利用も容易になったので，これを前提とした，問題のとりあつかいを研究することが意味をもつようになった．本研究はその試みである．

2. 問題の定式化とパラメター

座標と曲線

図2に示すように，右方に向う水平なX軸および鉛直下方に向うY軸からなる直交座標系をとろう．長さlの，完全にたわみやすい，のび縮みしない鎖の両端を，この座標平面上の2点

$$\mathrm{O}(0,0) \quad \text{および} \quad \mathrm{P}(w,h)$$

に固定する．重力の影響の下で，鎖はこの座標平面上で1つの曲線を形づくる．

この曲線は，y座標をx座標の関数として

$$y=f(x) \quad x\in[0,w] \tag{1}$$

という形で表現することもできるが，鎖の左端Oからこの曲線に沿って測った長さtをパラメター

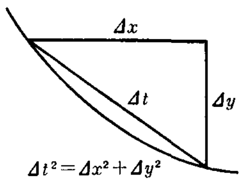


図 3

として，

$$x=x(t) \quad t\in[0,\ell] \tag{2}$$
$$y=y(t)$$

という形で表現することもできる．

本稿では定式化，計算，実用の都合上，両方の表現を用いねばならないので，まず両者のあいだの関係を掲げておく．図3からも明らかなように

$$dt^2=dx^2+dy^2 \tag{3}$$

という関係があるから，

$$\dot{x}(t)=\sqrt{1-\dot{y}^2(t)} \tag{4}$$
$$\dot{y}(t)=\sqrt{1-\dot{x}^2(t)} \tag{5}$$

を得る．ここに変数の上につけた点(ドット)は t による微分を表わす．また $f'(x)=\dfrac{dy}{dx}$ と書くことにすれば

$$\dot{x}(t)=\frac{1}{\sqrt{1+f'^2(x)}} \tag{6}$$
$$\dot{y}(t)=\frac{f'(x)}{\sqrt{1+f'^2(x)}} \tag{7}$$

および，

$$f'(x)=\sqrt{1-\dot{x}^2(t)}/\dot{x}(t) \tag{8}$$
$$=\dot{y}(t)/\sqrt{1-\dot{y}^2(t)} \tag{9}$$

という関係が得られる．

曲線の条件

次に，曲線が満たすべき条件を明らかにしておこう．まず，鎖が短かければ，OP間を張ることができないから，長さの条件として，

$$l^2\geqq w^2+h^2 \tag{10}$$

が成立していなければならない．

曲線の両端に関する条件は，

$$x(0)=0, \quad x(\ell)=w \tag{11}$$

および，

$$y(0)=0, \quad y(\ell)=h \tag{12}$$

であるが，このうち，(11)式は次のように書きなおすことができる；

$$\int_0^l \sqrt{1-\dot{y}^2(t)}\,dt=w \tag{13}$$

この式の左辺は，(4)式を積分したものである．

1次のモーメント

この鎖が重力の影響の下で作る形状は，X軸を中心とする1次のモーメントを最大にするようなものである．鎖の線密度が，パラメター t の関数

$$q(t), \quad t\in[0,\ell] \tag{14}$$

によって与えられるとき，X軸を中心として鎖が作る1次のモーメントは

$$J[y(t)]=\int_0^l y(t)q(t)dt \tag{15}$$

という $y(t)$の汎関数になる．

等周問題としての定式化

したがって，鎖の形状$y(t)$を求める問題は，次のような等周条件つきの変分問題として定式化される；

与えられた関数 $q(t)$に対して，汎関数

$$J[y(t)]=\int_0^l y(t)q(t)dt \tag{16}$$

を等周条件

$$\int_0^l \sqrt{1-\dot{y}^2(t)}\,dt=w \tag{17}$$

および境界条件

$$y(0)=0 \tag{18}$$
$$y(\ell)=h \tag{19}$$

のもとで極大にする関数 $y(t)$を求めること．

オイラー・ラグランジュの方程式と中間積分

このような等周型の変分問題の解は，上の問題に対応して作られる，いわゆるオイラー・ラグランジュの方程式を満足する；

$$q(t)-\lambda\frac{d}{dt}\,\frac{\dot{y}}{\sqrt{1-\dot{y}^2}}=0 \tag{20}$$

ここに，λはラグランジュ乗数と呼ばれる定数である．そこで，問題の解を求めるには，この微分方程式を境界条件(18)および(19)のもとで解くことが必要になる．

(20)式の両辺を積分すれば

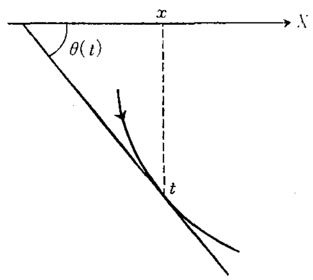


図 4

$$\int_0^t q(\zeta)d\zeta-\lambda\left[\frac{\dot{y}(\zeta)}{\sqrt{1-\dot{y}^2(\zeta)}}\right]_0^t=0$$

となる．ここで，

$$Q(t):=\int_0^t q(\zeta)d\zeta \tag{21}$$

$$Y(t):=\left[\frac{\dot{y}(\zeta)}{\sqrt{1-\dot{y}^2(\zeta)}}\right]_0^t \tag{22}$$

と書くことにすれば，上式は，

$$Q(t)=\lambda Y(t)\quad t\in[0,\ell] \tag{23}$$

という簡単な式になる．

$Q(t)$ および $Y(t)$ の物理的意味

この $Q(t)$ は鎖の線密度 $q(t)$ の積分―累積密度―であるから，鎖の左端から長さ t のところまでの質量である．

$Y(t)$についていえば，(22)式のカッコの内容が(9)式の右辺に等しいことから

$$\begin{aligned}Y(t)&=f'(x)-f'(0)\\&=\tan\theta(t)-\tan\theta(0)\end{aligned} \tag{24}$$

となる．ここに，$\theta(t)$は鎖の左端から t のところにおける鎖の接線がX軸となす角度である．すなわち，$Y(z)$は**曲線の勾配の変化分**である．

解曲線

簡単のため，

$$z(t):=\tan\theta(t)=f'(x(t)) \tag{25}$$

とおけば，(6)および(7)式から，

$$\dot{x}(t)=\frac{1}{\sqrt{1+z^2(t)}} \tag{26}$$

$$\dot{y}(t)=\frac{z(t)}{\sqrt{1+z^2(t)}} \tag{27}$$

を得る．したがって，関数$z(t)$が与えられれば，鎖がつくる曲線は，

$$x(t)=\int_0^t\frac{1}{\sqrt{1+z^2(\zeta)}}d\zeta \tag{28}$$

$$y(t)=\int_0^t\frac{z(\zeta)}{\sqrt{1+z^2(\zeta)}}d\zeta \tag{29}$$

によって計算できる．

基本パラメター

(24)式を(23)式に代入すれば，

$$Q(t)=\lambda(\tan\theta(t)-\tan\theta(0))$$

となる．したがって，

$$\tau:=\tan\theta(0) \tag{30}$$

とおけば，

$$z(t)=\frac{1}{\lambda}Q(t)+\tau \tag{31}$$

となる．関数$z(t)$は，したがって，鎖の線密度によって定まる関数$Q(t)$の他に，λとτの2つのパラメターによって定められる．これらを**基本パラメター**と呼ぶことにする．

基本パラメターのうちτは，(30)式が示すように，鎖の左端における曲線の勾配である．

λについていえば，(23)および(24)式から，

$$\lambda=Q(\ell)/(\tan\theta(\ell)-\tan\theta(0)) \tag{32}$$

が得られるから，λは，鎖全体の目方と曲線の勾配の変化分の比率という意味と同時に，水平方向の張力という力学的な意味をもっている．ただ注意しなければならないのは，本稿の定式化では次に示すように，λが負の値をとるように方向づけられていることである．

線密度が正である限り，関数 $f(x)$ が凹であることは明らかであろう．もし凸な部分があれば，曲線上適当な２点ＰＱをとり，曲線の，線分ＰＱの上側の部分ＰＲＱを，線分ＰＱを軸に対称の位置PR′Qにうつせば，１次のモーメントを確実に増加させることができるからである．すなわち，

$$f''(x)<0 \tag{33}$$

となる．したがって，(24)式において関数 $Y(t)$は負の値をとる．(23)式において関数 $Q(t)$は，線密度が正であるかぎり，正の値をとるのは明らかであるから，

$$\lambda<0 \tag{34}$$

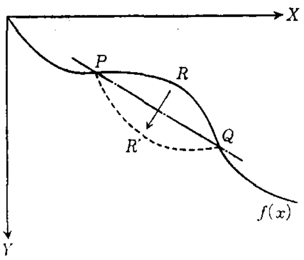


図 5

となる．

パラメターの決定

基本パラメターの値は，鎖の右端の位置に関する条件

$$x(\ell)=w, \quad y(\ell)=h$$

によって定められる．話の見通しをよくする為に

$$\Phi(t,\lambda,\tau)=\int_0^t \frac{1}{\sqrt{1+z^2(\zeta)}}d\zeta \tag{35}$$

$$\Psi(t,\lambda,\tau)=\int_0^t \frac{z(\zeta)}{\sqrt{1+z^2(\zeta)}}d\zeta \tag{36}$$

と書くことにすれば，これらは，

$$\Phi(\ell,\lambda,\tau)=w \tag{37}$$

$$\Psi(\ell,\lambda,\tau)=h \tag{38}$$

となる．これらの条件は，それぞれ等周条件(17)および境界条件(19)に等価である．

基本パラメター λ および τ は，連立方程式(37)および(38)を解けば求められる．しかしこれらは線密度が一様の場合でさえ，非線形性の強い方程式であり，数値解法において精度をあげるにはそれなりの注意が必要である．それゆえ，この問題については節を改めて別に論ずることにしよう．

相似性と基本パラメター

いま，曲線の形を相似に保持したままで，全体の大きさを α 倍に変換するための条件を考える．新しい曲線に関する変数には～(チルド)をつけることにする．したがって，幅，高さおよび鎖の長さは，

$$\tilde{w}=\alpha w \tag{39}$$

$$\tilde{h}=\alpha h \tag{40}$$

$$\tilde{l}=\alpha l \tag{41}$$

とする．次に示すように，曲線の形を相似に保つためには，鎖の累積密度を

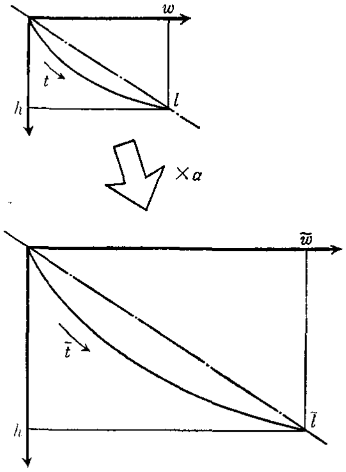


図 6

$$\tilde{Q}(\tilde{t})=\alpha Q\left(\frac{\tilde{t}}{\alpha}\right) \quad \tilde{t}\in[0,\tilde{l}] \tag{42}$$

とすればよい．(累積密度をこのようにするには，同じ線密度の鎖を用い，途中にさげるおもりは重さを α 倍にすればよい．)また，これと同時に，基本パラメターは

$$\tilde{\lambda}=\alpha\lambda \tag{43}$$

$$\tilde{\tau}=\tau \tag{44}$$

となることが示される．いま，

$$\tilde{z}(\tilde{t})=\frac{1}{\tilde{\lambda}}\tilde{Q}(\tilde{t})+\tilde{\tau} \tag{45}$$

において(42)，(43)および(44)式を代入すれば，

$$\tilde{z}(\tilde{t})=\frac{1}{\lambda}Q\left(\frac{\tilde{t}}{\alpha}\right)+\tau=z\left(\frac{\tilde{t}}{\alpha}\right) \tag{46}$$

となる．そこで，さらにこの式を(35)式に代入して(41)式をつかえば，

$$\Phi(\tilde{l},\tilde{\lambda},\tilde{\tau})=\int_0^{\tilde{l}}\frac{1}{\sqrt{1+\tilde{z}^2(\zeta)}}d\zeta$$

$$=\int_0^{\alpha l}\frac{1}{\sqrt{1+z^2\left(\frac{\zeta}{\alpha}\right)}}d\zeta$$

となる．ここで，$\xi=\zeta/\alpha$ とおけば，さらに

$$\Phi(\tilde{l},\tilde{\lambda},\tilde{\tau})=\alpha\int_0^{l}\frac{1}{\sqrt{1+z^2(\xi)}}d\xi$$

$$=\alpha\Phi(l,\lambda,\tau)$$

$$=\alpha w$$

となる．したがって，(39)式により

$$\Phi(\tilde{l}, \tilde{\lambda}, \tilde{\tau}) = \tilde{w} \tag{47}$$

を得る．同様にして(46)式を(37)式に代入すれば

$$\Psi(\tilde{l}, \tilde{\lambda}, \tilde{\tau}) = \tilde{h} \tag{48}$$

が得られる．すなわち，(43)および(44)式が確認された．次に，(28)式にもとづいて，$\tilde{x}(\alpha t)$ を計算すれば，(46)式により

$$\tilde{x}(\alpha t) = \int_0^{\alpha t} \frac{1}{\sqrt{1+\tilde{z}^2(\zeta)}} d\zeta$$

$$= \int_0^{\alpha t} \frac{1}{\sqrt{1+z^2\left(\frac{\zeta}{\alpha}\right)}} d\zeta$$

となる．$\xi = \zeta/\alpha$ とおけば，さらに

$$\tilde{x}(\alpha t) = \alpha \int_0^t \frac{1}{\sqrt{1+z^2(\xi)}} d\xi$$

$$= \alpha x(t) \tag{49}$$

を得る．同様，(29)式にもとづいて，$\tilde{y}(\alpha t)$ を計算すれば，

$$\tilde{y}(\alpha t) = \alpha y(t) \tag{50}$$

を得る．これらの2つの式は，新しい曲線が，もとの曲線と相似で，その比率が α であることを示している．

3. 一様加重と離散加重

一様加重

線密度が一定(ρ)の場合，

$$q(t) = \rho \quad t \in [0, l] \tag{51}$$

には，累積密度は，

$$Q(t) = \rho t \quad t \in [0, l] \tag{52}$$

となるから，関数 $z(t)$ は(31)式により，

$$z(t) = \frac{\rho}{\lambda} t + \tau \quad t \in [0, l] \tag{53}$$

となる．

一様加重の場合の曲線の形— $f(x)$

(25)式により，$f'(x) = z(t)$ であるから，

$$f''(x) = \dot{z}(t)/\dot{x}(t) \tag{54}$$

という関係が得られる．ここに点(ドット)は t に関する微分を示す．(6)および(53)式を用いれば(54)式は

$$f''(x) = \frac{\rho}{\lambda} \sqrt{1+f'^2(x)} \tag{55}$$

という2階の常微分方程式になる．よく知られているように，この方程式の一般解は

$$f(x) = \frac{\lambda}{\rho} \cosh \frac{\rho}{\lambda}(x-u) + v \tag{56}$$

という形で与えられる．ここに，u および v は任意定数である．これらを**補助パラメター**と呼ぶことにする．

個々の特解を与えるには，補助パラメターの値を指定しなければならないが，これらは，基本パラメターと，曲線の左端における境界条件から，次の式によって計算することができる：

$$u = -\frac{\lambda}{\rho} \sinh^{-1} \tau \tag{57}$$

$$v = -\frac{\lambda}{\rho} \sqrt{1+\tau^2} \tag{58}$$

次に，これらの式をみちびく．(56)式を x で微分すれば，

$$f'(x) = \sinh \frac{\rho}{\lambda}(x-u) \tag{59}$$

となる．この式において，基本パラメター τ が，曲線の左端の勾配である ($\tau = f'(0)$，(30)式参照) ことを用いれば，

$$\tau = \sinh\left(-\frac{\rho}{\lambda} u\right)$$

を得る．この式から，ただちに(57)式が得られる．また，曲線の左端の境界条件 $f(0) = 0$ を(56)式に代入すれば，

$$v = -\frac{\lambda}{\rho} \cosh\left(-\frac{\rho}{\lambda} u\right)$$

という関係が得られる．τ に関する上の関係式を使って，この式の右辺を書きなおせば，(58)式が得られる．

一様加重の場合の曲線の形— $x(t)$，$y(t)$

(35)および(36)式に，(53)式の $z(t)$ を代入して計算すれば，

$$x(t) = \Phi(t, \lambda, \tau)$$

$$= \left[\frac{\lambda}{\rho} \sinh^{-1} z(\zeta)\right]_0^t \tag{60}$$

$$y(t) = \Psi(t, \lambda, \tau)$$

$$= \left[\frac{\lambda}{\rho} \sqrt{1+z^2(\zeta)}\right]_0^t \tag{61}$$

を得る．さらに，$z(0) = \tau$ であることに注意すれ

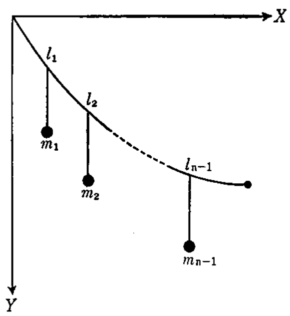


図 7

ば，(57)および(58)式によって，

$$x(t)=u+\frac{\lambda}{\rho}\sinh^{-1}z(t) \tag{62}$$

$$y(t)=v+\frac{\lambda}{\rho}\sqrt{1+z^2(t)} \tag{63}$$

を得る．これらが，一様加重の場合の，パラメター表示による解―曲線の形―である．

離散加重

一様な線密度ρをもつ鎖の，左端から測って

$$t=l_i \quad i=1,2,\cdots,n-1$$

のところを節点と呼び，ここに

$$m_i \qquad i=1,2,\cdots,n-1$$

のおもりをさげる．このとき，累積密度は，次のようになる．

$$Q(t)=Q_i(t) \quad t\in[l_i,l_{i+1}) \tag{64}$$
$$i=0,1,\cdots,n-1$$

$$\text{ここに，}Q_i(t)=\rho t+\sum_{j=0}^{i}m_j, \tag{65}$$

なお，記述の簡略化のために，

$$l_0=0,\ l_n=l,\ m_0=0,\ m_n=0 \tag{66}$$

とおいた．したがって，関数$z(t)$は，

$$z(t)=z_i(t) \quad t\in[l_i,l_{i+1}) \tag{67}$$
$$i=0,1,\cdots,n-1$$

となる．ここに，

$$z_i(t)=\frac{\rho}{\lambda}t+\tau+\sum_{j=0}^{i}\frac{m_j}{\lambda} \tag{68}$$

である．

離散加重の場合

曲線を

$$x(t)=x_i(t) \quad t\in[l_i,l_{i+1}) \tag{69}$$

$$y(t)=y_i(t) \quad i=0,1,\cdots,n-1 \tag{70}$$

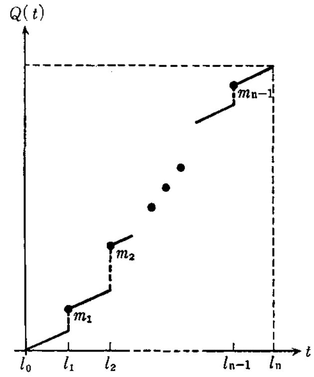


図 8

と書くことにしよう．区間$[l_i,l_{i+1})$において，鎖は一様な線密度をもつ他加重されていないから，この間でも，パラメターはさておき，鎖は懸垂線を画くはずである．しかもパラメターのうちλは各区間について共通なのである．このことはλが水平張力という力学的意味から，各区間について共通でなければならないことからも理解される．

また，数学的に言えば，各区間の内点で鎖の形を定める方程式(54)式において，外力は$\dot{z}(t)$という項を通じて加えられるのだが，$\dot{z}(t)$は(59)式からも明らかなようにρ/λという一定値をとるから，境界条件はともかく，形状は(56)式のようなものにならなければならないからである．

そこで，$x_i(t)$および$y_i(t)$は

$$x_i(t)=x^i+\left[\frac{\lambda}{\rho}\sinh^{-1}z_i(\zeta)\right]_{l_i}^{t} \tag{71}$$

$$y_i(t)=y^i+\left[\frac{\lambda}{\rho}\sqrt{1+z_i^2(\zeta)}\right]_{l_i}^{t} \tag{72}$$

と書ける．ここに，

$$x^0:=x(0)=0 \tag{73}$$

$$y^0:=y(0)=0 \tag{74}$$

および

$$x^i:=x_{i-1}(l_i) \tag{75}$$
$$=\frac{\lambda}{\rho}\sum_{j=0}^{i-1}[\sinh^{-1}z_j(\zeta)]_{l_j}^{l_{j+1}}$$

$$y^i:=y_{i-1}(l_i) \tag{76}$$
$$=\frac{\lambda}{\rho}\sum_{j=0}^{i-1}[\sqrt{1+z_j^2(\zeta)}]_{l_j}^{l_{j+1}}$$
$$i=1,2,\cdots,n-1$$

である．曲線の形を関数 $y=f(x)$ という形でも書いておこう．いま，

$$f(x)=f_i(x) \quad x\in[x^i, x^{i+1}) \quad (77)$$
$$i=0,1,2,\cdots,n-1$$

と書くことにすれば，

$$f_i(x)=\frac{\lambda}{\rho}\cosh\frac{\rho}{\lambda}(x-u_i)+v_i \quad (78)$$

となる．ここに，u_i および v_i は区間の両端の条件から，次式によって計算できる；

$$u_i=x^i-\frac{\lambda}{\rho}\sinh^{-1}z_i(l_i) \quad (79)$$

$$v_i=y^i-\frac{\lambda}{\rho}\sqrt{1+z_i^2(l_i)} \quad (80)$$

(79)式をみちびくには，(25)式から

$$f_i'(x)=z_i(t) \quad t\in[l^i, l^{i+1}) \quad (81)$$

が区間の端でも

$$\lim_{x\to x^i+} f_i'(x)=z_i(l_i) \quad (82)$$

という形で成立することを用いればよい．すなわち，(78)式を微分すれば

$$f_i'(x^i)=\sinh\frac{\rho}{\lambda}(x_i-u_i) \quad (83)$$

となるから，ただちに(79)式が得られる．

また，関係式 $y^i=f(x_i)$ を(78)式に代入すれば

$$y^i=\frac{\lambda}{\rho}\cosh\frac{\rho}{\lambda}(x^i-u_i)+v_i \quad (84)$$

となるから，(79)式によって x^i と u_i を消去すれば(80)式を得る．

曲線の屈折

離散加重の場合，節点 $t=l_i$ における左方および右方微係数は，それぞれ

$$\lim_{\xi\to x_i-} f'(\xi)=z_{i-1}(l_i)=\frac{\rho}{\lambda}l_i+\tau+\sum_{j=0}^{i-1}\frac{m_j}{\lambda} \quad (85)$$

$$\lim_{\xi\to x_i+} f'(\xi)=z_i(l_i)=\frac{\rho}{\lambda}l_i+\tau+\sum_{j=0}^{i}\frac{m_j}{\lambda} \quad (86)$$

である．((25)および(68)式参照) $m_i\neq 0$ であればこれらは一致しない．曲線の勾配は，したがって，節点において

$$\Delta f'(l_i):=\frac{m_i}{\lambda} \quad (87)$$

だけ不連続な変化を見せる．2つの勾配のなす角度を γ とすれば，

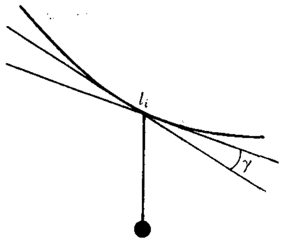


図 9

$$\tan\gamma=\frac{-m_i}{\lambda(1+z_i(l_i)z_{i+1}(l_i))} \quad (88)$$

となる．応用上の問題は，この値が見苦しくない程度の大きさにおさまるか否という点である．

線密度，おもり，基本パラメター

離散加重の場合，鎖の長さは一定に保持したままで，鎖の線密度とおもりの目方をともに α 倍にするとき，鎖の作る曲線が不変であることを示そう．すなわち，

$$\tilde{\rho}=\alpha\rho \quad (89)$$
$$\tilde{m}:=\alpha m_i \quad i=1,2,\cdots,n-1 \quad (90)$$

とするとき，

$$\tilde{x}(t)=x(t) \quad (91)$$

$$\tilde{y}(t)=y(t) \quad (92)$$

となる．また，このとき基本パラメターは

$$\tilde{\tau}=\tau \quad (93)$$

$$\tilde{\lambda}=\alpha\lambda \quad (94)$$

となる．(89)(90)および(93)(94)式のもとでは，

$$\frac{\tilde{\lambda}}{\tilde{\rho}}=\frac{\alpha\lambda}{\alpha q}=\frac{\lambda}{\rho},\quad \tilde{\tau}=\tau \quad (95)$$

であるから，関数 z は不変である．線密度を α 倍にした鎖に関する変数には～(チルド)をつけて示すことにすれば，

$$\tilde{z}_i(t)\equiv z_i(t) \quad t\in[l^i, l^{i+1}) \quad (96)$$
$$i=0,1,\cdots,n-1$$

である．それゆえ，(71)～(76)式によって

$$\tilde{x}_i(t)\equiv x_i(t) \quad (97)$$

$$\tilde{y}_i(t)\equiv y_i(t) \quad (98)$$

がみちびかれる．

(97)および(98)式において $i=n-1, t\to l$ とすれば，これらの式は基本パラメターを求める方程式

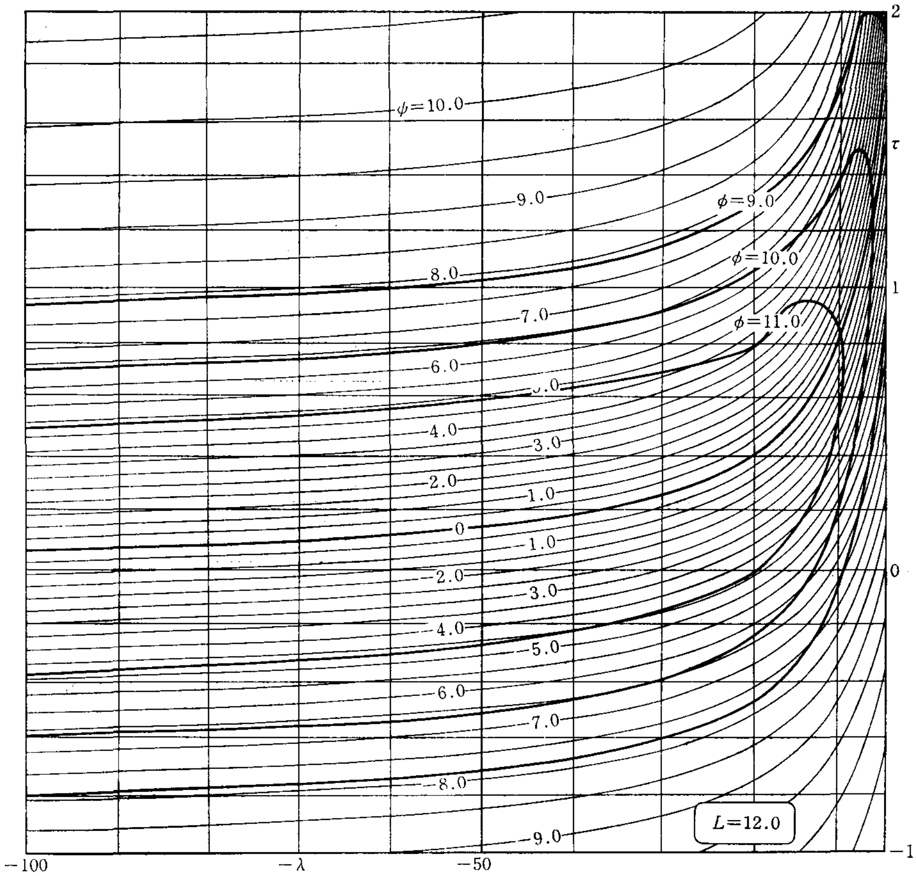


図10

(37)および(38)式に同等である．したがって(93)および(94)式の関係が成立することが示された．

4. 基本パラメターの数値計算

連立方程式

基本パラメターλおよびτの値を求めるには，連立方程式(37)～(38)を解けばよい．(75)および(76)式を用いて，これらの式をくわしく書けば，

$$\Phi(l,\lambda,\tau)=\frac{\lambda}{\rho}\sum_{j=0}^{n-1}\left[\sinh^{-1}\left(\frac{\rho}{\lambda}\zeta+\tau+\sum_{k=0}^{j}\frac{m_k}{\lambda}\right)\right]_{l_j}^{l_{j+1}}=w \tag{99}$$

$$\Psi(l,\lambda,\tau)=\frac{\lambda}{\rho}\sum_{j=0}^{n-1}\left[\sqrt{1+\left(\frac{\rho}{\lambda}\zeta+\tau+\sum_{k=0}^{j}\frac{m_k}{\lambda}\right)^2}\right]_{l_j}^{l_{j+1}}=h \tag{100}$$

となる．

ΦおよびΨの等高線の形状と解の性質

上の連立方程式の解は，関数ΦおよびΨの等高線の交点として得られるから，これらの等高線図を見れば，解の性質を知ることができる．図10には，一様加重（$m_k=0, k=0,1,\cdots,n$）の場合の，等高線のいくつかを示した．関数ΦおよびΨは，m_kに関して解析的であるから，おもりをさげても，あまり重くない範囲では，等高線もさほど移動しないものと考えられる．そこで，図10にもとづいて作った右の略図（図11(b)）によって，hを変化させたとき，解(λ,τ)がそれにつれてどのように変化するのかを観察しよう．

いま，鎖の長さlと幅wを固定して，鎖の右端を徐々に上昇（hは減少）させる．図11(a)でいえば鎖の右端を，P，Q，R，S，Tと移動するのである．このとき，(b)図において，解はΦの等高線に沿ってP，Q，R，S，Tと移動する．前にも述べたように，τの値は鎖の左端における勾配である．

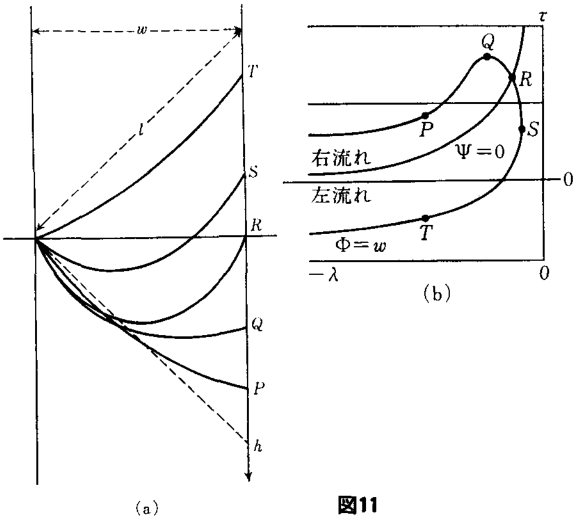


図11

同じ長さの鎖を用いて，右端をもち上げていけば左端の勾配は，いったんは急になり，ついで，ゆるやかになり，さらに，鎖の形は右流れから，左流れのものに移ってゆく．

右流れの曲線と左流れの曲線

上に見たとおり，同じλの値に対して通常２つのτが解として存在している．これは同じ曲線でありながら，右流れに設置されたものと，左流れに設置されたものに対応している．いま，鎖の両端を入れかえ，左端を座標原点に移してみよう．曲線の形そのものは，むろん変らず，λの値は等しい．——前にも述べたようにλは曲線の形そのものを決定するパラメターである．これに対してτのほうは鎖の左端の勾配であるから，右端の勾配の符号を変じた値になる．このことを数学的にたしかめるには，おもりとおもりの位置が，

$$\begin{aligned}\tilde{m}_j&=m_{n-j}\\ \tilde{l}_j&=l_n-l_{n-j}\end{aligned}\qquad j=0,1,\cdots,n$$

に変るとき，

$$\tilde{\tau}=-\left(\frac{\rho}{\lambda}l_n+\sum_{k=0}^{n}\frac{m_k}{\lambda}+\tau\right)$$

$$\tilde{\lambda}=\lambda$$

とすれば，

$$\frac{\tilde{\lambda}}{\rho}\sum_{j=0}^{n-1}\left[\sinh^{-1}\left(\frac{\rho}{\tilde{\lambda}}\zeta+\tilde{\tau}+\sum_{k=0}^{j}\frac{\tilde{m}_k}{\tilde{\lambda}}\right)\right]_{\tilde{l}_j}^{\tilde{l}_{j+1}}=w \tag{101}$$

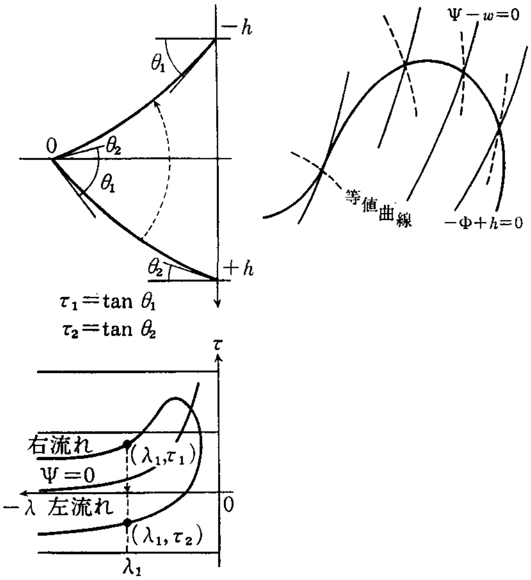


図12

$$\frac{\tilde{\lambda}}{\rho}\sum_{j=0}^{n-1}\left[\sqrt{1+\left(\frac{\rho}{\tilde{\lambda}}\zeta+\tilde{\tau}+\sum_{k=0}^{j}\frac{\tilde{m}_k}{\tilde{\lambda}}\right)^2}\right]_{\tilde{l}_j}^{\tilde{l}_{j+1}}=-h \tag{102}$$

となることを示せばよいのだが，これは，計算によって容易にたしかめられる．

このことを，次のように言うこともできる．$\lambda\tau$平面において，曲線

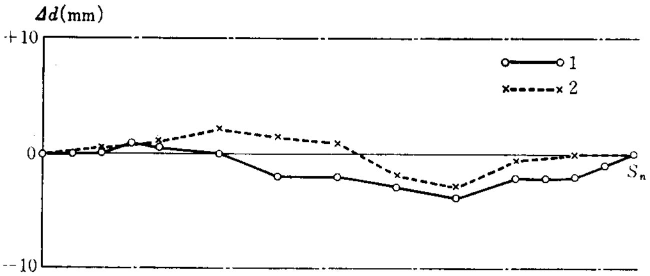
$$\Psi=0$$

の上側は左流れの形に，下側は右流れの形に対応している．

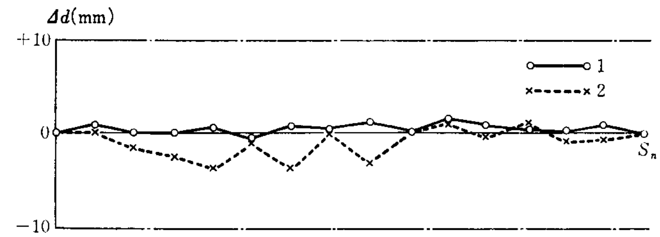
2分法

さて，図10にも見るとおり，関数ΦおよびΨの等高線は，接するがごとくに交わる場合が多い．したがって，その交点である解を数値的に求めるには，細心の注意を要する．そこで，解法には，２分法を用いることとした．

２分法の詳細については付録に述べた．計算の速度については，他の方法によって改良の余地があるものと見込まれるが，確実性と汎用性という点から，とりあえずこの方法を採用することにした．しかし，結果的には現場近くの出張所に設置された，パーソナル・コンピュータによる計算でも十分可能な速度を得た．



(a) 計算値と設計値の差



(b) 実験値と設計値の差

また，計算精度については，鎖の長さや両端の位置等の条件によって異なり，場合によってはさらに細かい工夫をする必要があったが，結果としては，実用には十分以上の精度を得ることができた．もっとも，ここで精度というのは次のような意味である．まず，設計者が紙の上に画いた曲線である．なにぶんにも紙の上に画いた曲線であるから，これから採取した寸法が精度の高いものであるというわけにはゆかないが，とにかくこれを目標にしなければならない．次に，これに合うような加重法をさがすのだが現在のところ，これは計算機を用いながらの試行錯誤である(**6.** 参照)．それに，設計曲線自身完全に懸垂線をつないだものだという保証はないのだから，ここで多少の誤差がでるのはやむを得ない．しかし，実例についてこれをみれば，図13(a)のように，その差を5mm以内におさえることができた．

さらに，実際に施工する場合の条件で，鎖におもりをさげて実験してみた結果でも，図13(b)のように，設計曲線との差を5mm程度におさえることができた．こうして施工上の条件を満たすこと

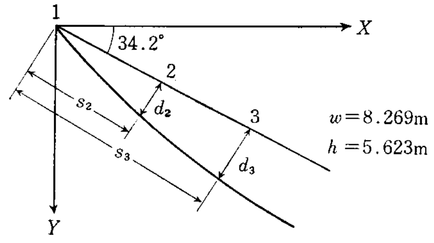


図13

ができたので，実際に使用されることになった．

鎖の両端が同じ高さで，一様加重の場合

鎖の両端が同じ高さ($h=0$)で，一様加重の場合，すなわち鎖だけの場合には，基本パラメターを比較的容易に求めることができる．これは，他の場合の初期値として用いられる場合もあるのでその方法を述べておく．

この場合，(99)および(100)式は

$$\frac{\lambda}{\rho}\left[\sinh^{-1}\left(\frac{\rho}{\lambda}l+\tau\right)-\sinh^{-1}\tau\right]=w$$

$$\frac{\lambda}{\rho}\left[\sqrt{1+\left(\frac{\rho}{\lambda}l+\tau\right)^2}-\sqrt{1+\tau^2}\right]=0\ \ (=h)$$

となる．2番目の式から

$$\tau=\pm\left(\frac{\rho}{\lambda}l+\tau\right)$$

が得られるが，$w\neq0$ という現実の条件を考えれば第1式により，

$$\tau=-\left(\frac{\rho}{\lambda}l+\tau\right)$$

となる．これによって第1式は，

$$-\frac{l}{2\tau}(\sinh^{-1}(-\tau)-\sinh^{-1}\tau)=w$$

すなわち，

$$\sinh^{-1}\tau=\frac{w}{l}\tau$$

となる．書きかえれば，

$$\tau=\frac{l}{w}\sinh\tau \tag{103}$$

という，τ だけに関する方程式が得られる．この

方程式は，たとえば，ニュートン法：

$$\tau_{n+1}=\tau_n-\frac{\tau_n-\sinh\frac{w}{l}\tau_n}{1-\frac{w}{l}\cosh\frac{w}{l}\tau_n} \tag{104}$$

によって数値解を得ることができる．もう1つの基本パラメターは，

$$\lambda=-\frac{l\rho}{2\tau} \tag{105}$$

によって計算できる．

5. 感度分析

鎖の形状は，幅w，高さh，長さlおよび密度ρやおもりの目方等の物理量から，基本パラメターλおよびτを通じて決定される．物理量は，その設定においても測定においても，誤差を含むのが普通であり，そのため鎖の形状は所期のものから偏ったものになる可能性がある．そこでこれらの物理量の変化が，曲線の形状にどのように影響するのかという感度分析の必要がある．とはいっても諸量の設定は千差万別であるから，数値上また実験上感度がきわめて大なる場合をとりあげ，これに多少の分析を加えておくことにする．

鎖の形状が，設定条件の変化に対して，きわめて敏感に反応する場合として，たるみの少ない形状の場合があげられる．すなわち，鎖の長さが許容される最小長さ

$$\sqrt{w^2+h^2}$$

に近づく場合である．したがって，w, h, lそれぞれの変化に対応する感度が問題になるが，次の理由から，lの変化に対応する感度に焦点をあてて議論をすすめる．

第1の理由は，前にも述べたように，w, h, l三者の比率によって，鎖の形状が定まることである．第2の理由は，現在における設定に際して，最も誤差をともないやすいのが，長さlだからである．実際，鎖の一端を固定するのに“目ぬき”のような工具が用いられるのが現状である．第3の理由は，一様加重，すなわち鎖だけの場合に，

表1　最大おちこみ率(%)　$w=10$m

たるみ率 ($l/\sqrt{w^2+h^2}$) ＼ 高さ(h)	0 m	5 m	10m
100.5%	4.3377	4.3334	4.3220
100.2%	2.7205	2.7305	2.7365
100.1%	1.9872	1.9367	1.9357
100.05%		1.3693	1.3690
100.02%		0.8660	0.8659

感度のありようがh/wにほとんどよらないことがわかったからである．

次の表は$w=10$mとしたときの，いろいろなたるみ率（$l/\sqrt{w^2+h^2}$）に対する最大おちこみ率を示したものである．ここに，最大おちこみ率というのは，引通し線から鎖までの最大距離の，引通し線の長さ$\sqrt{w^2+h^2}$に対する比率である．

これを見れば，hの影響が無視しうることがわかろう．そこで，注目すべきはlの影響である．代表として$h=10$mの場合を図14に示した．これに見るとおり，鎖の長さが最小許容値に近づくにつれて，おちこみ率はきわめて急峻な勾配をもってゼロに近づく．すなわち，直線に近い反り屋根を施工しようとするときには，鎖の長さをよほど正確に設定しなければならない．

このような，直線に近い懸垂線の，長さに対する感度の分析には次のような近似が有用である．

すなわち，鎖の中点が引通し線から最もはなれるようにピンと張った形を想定する．このときの落込み率は，おちこみ率の上限を与えているので，おもりの有無・軽重にかかわらない1つの目安を与えることができる．

このとき，おちこみrは，

$$r=\frac{1}{2}\sqrt{l^2-d^2}$$

で与えられるから，おちこみ率は，

$$\frac{r}{d}=\frac{1}{2}\sqrt{l^2-d^2}/d$$

となる．したがって，たるみ率を

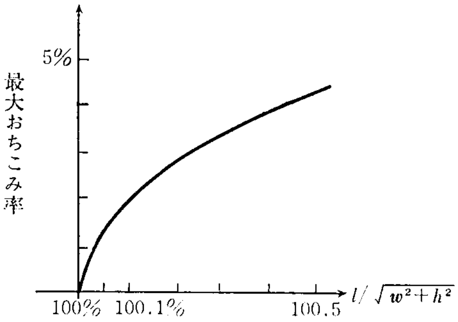


図14

$$\mu=l/\sqrt{w^2+h^2} \tag{106}$$

と書くことにすれば，おちこみ率の上限は

$$\frac{r}{d}=\frac{1}{2}\sqrt{\mu^2-1} \tag{107}$$

となる．この値は次の表に示すとおりで，前の表に対して，少し大きめではあるが，よい近似を与えていることがわかる．(ここでも，h/w の値が関与していないことに注意してほしい)

また，鎖の長さの変動そのものが，おちこみそのものにどのように影響するのかは，次のように近似することができる．

$$\frac{dr}{dl}=\frac{l}{4r}$$

であるから，

$$\Delta r \fallingdotseq (l/4r)\Delta l \tag{108}$$

となる．すなわち，鎖の長さの変化は，$K=\dfrac{l}{4r}$という係数でおちこみに変化を与える．おちこみがゼロに近いとき，この係数の値はきわめて大きいのは当然である．$d=15$の場合の2～3の数値を与えておく．

表 2　最大おちこみ率の上限(%)

たるみ率	最大おちこみ率の上限
100.5%	5.006%
100.2%	3.164
100.1%	2.236
100.05%	1.581
100.02%	1.000

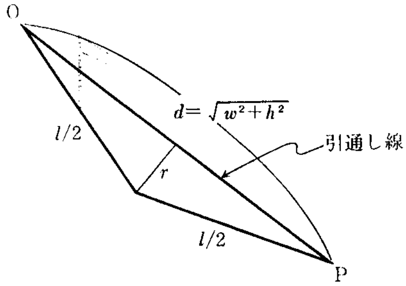


図15

6.　作図と離散加重

反り屋根の施工は，建築設計が描くところの曲線を空間に実現することである．しかし，一方において設計者の側でもこの施工の方法を理解し，これをその設計技術にとり入れるならば，設計者の意図が一層正確に反映されることになろう．本節では，まず建築設計者が方眼紙上に自由に作図した曲線に対応する加重の求め方を考えると同時に，電算機による設計を有効にする補助手段に関する一提案を試みておきたい．

自由作図

いま，建築設計者が方眼紙に画いた曲線を調べて，$y(t)$を数表の形で求める．これから数値的方法によって，

$$Y(t)=\left[\frac{\dot{y}(\zeta)}{\sqrt{1-\dot{y}^2(\zeta)}}\right]_0^t \tag{109}$$

を求める．(この部分で誤差の発生が避けられないので，自由作図にもとづく施工には困難がともなう．) 次に，使用する鎖の線密度ρを定め，

$$\lambda Y(t) \geqq \rho t \quad t\in[0,l]$$

となるようなλを設定する．次に，直線 ρt を何カ所かで切断して，上方に平行移動して，およそ$\lambda Y(t)$ を近似するようにする．このようにして作

表 3　感度係数

l	r	K
16.0	2.784	1.44
15.5	1.953	1.98
15.1	0.867	4.35
15.01	0.277	13.80

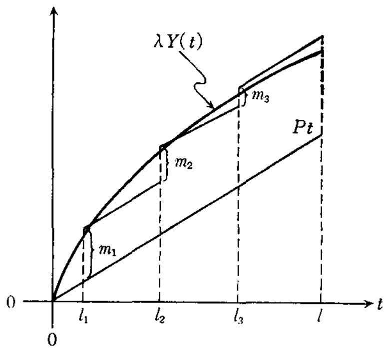


図16

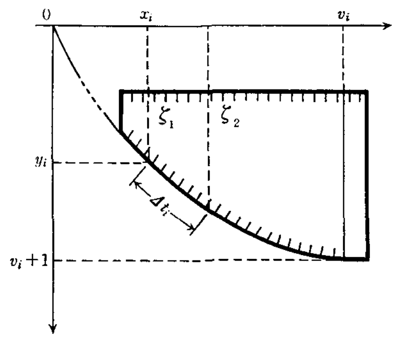


図17

られた，ρ という勾配をもつ階段関数は

$$\tilde{Q}(t)=\rho t+\sum_{k=0}^{i}m_k \quad t\in[l_i, l_{i+1})$$

という形になる．この段差 m_i が l_i にさげるべきおもりの目方となる．

こうして，加重の方法がざっと計算できるが，このような方法では高い精度は期待できないから，計算機でさらに細かい試行錯誤を行なう必要がある．

しかし，一方において，鎖が作る曲線を基準として施工がなされる以上，曲線は区分的な懸垂線（カテナリー）であるから，適当な懸垂線雲形定規を用意して，建築設計者がこれを用いて作図すれば，イメージもつかみやすく，また計算上も基本パラメターの概算値を，雲形定規の目盛から読みとることができる．これを用いながら電算機による計算を行なうならば，一層の効果が期待できよう．

懸垂線定規による作図

図17のような懸垂線定規 $\alpha\cosh\frac{\xi}{\alpha}$ を $\alpha(=\lambda/\rho)$ の各値について準備しておく．反り屋根の設計者は，この中から自分のイメージに合ったものを1つえらび，次のようにして反り屋根の曲線を作図する．すなわち，定規の曲線部分から適当な区間を，かさなり合わないようにとる：

$$\alpha\cosh\frac{1}{\alpha}(\xi-u_i)+v_i \quad \xi\in[\xi_1{}^i, \xi_2{}^i]$$

これを (x_i, y_i) からはじまって右に流れる曲線部分とする．このとき，$\xi_1{}^i, \xi_2{}^i, u_i, v_i$ および弧の長さ Δt_i を定規の目盛と座標から読みとっておく．

これらの曲線部分を接合して，反り屋根の曲線全体を構成するわけである．

さて，接合点 x_i, y_i における，右方および左方微係数は，

$$\lim_{x\to x_i+}f'(x)=\sinh\frac{1}{\alpha}(\xi_1{}^i-u_i)$$

$$\lim_{x\to x_i-}f'(x)=\sinh\frac{1}{\alpha}(\xi_2{}^{i-1}-u_{i-1})$$

となるが，これらについては，(81)式により

$$\sinh\frac{1}{\alpha}(\xi_1{}^i-u_i)=z_i(l_i)$$

$$\sinh\frac{1}{\alpha}(\xi_2{}^{i-1}-u_{i-1})=z_{i-1}(l_i)$$

が成立しなければならない．ところが，

$$z_i(l_i)=\frac{\rho}{\lambda}l_i+\tau+\sum_{j=0}^{i}\frac{m_j}{\lambda}$$

$$z_{i-1}(l_i)=\frac{\rho}{\lambda}l_i+\tau+\sum_{j=0}^{i-1}\frac{m_j}{\lambda}$$

であり，また，$\alpha=\lambda/\rho$ となることに注意すれば，

$$m_i=\rho\alpha[\sinh\frac{1}{\alpha}(\xi_1{}^i-u_i)-\sinh\frac{1}{\alpha}(\xi_2{}^{i-1}-u_{i-1})]$$

となり

$$t=l_i=\sum_{j=0}^{i-1}\Delta t_j$$

の位置にさげるべきおもりの目方 m_i が求められる．

この懸垂線定規による作図によれば，同時にパラメターの推定値が得られるので，有用とは思われるが，使用経験をつんでいない現在，精度その他はまだ未知である．いずれにせよ，この推定値

をもとに，もういちどくわしい計算を行なってみる必要があろう．

7. おわりに

以上に述べたごとく，日本建築の一特徴である反り屋根の曲線の施工に関して，計算機の導入を計り，日常的な業務の一部として実地に応用されるところとなった．直線にごく近い“反り”を好む日本人の美意識は，数値計算上大きな困難をもたらした．本稿の方法も，パーソナル・コンピュータが自由に使えるようになった今日，はじめて意味をもちえたものと思う．

一方，残された問題も数多い．計算速度の向上は無論のこと，伝統的な方法にしたがう建築設計者に対する電算機サービスのあり方，さらには，美学の対象としての反り屋根の研究への数学的方法の導入等々である．これらの研究は学際的分野で，多くの共同研究者を必要とするものである．筆者もその機が熟するのを待ち望むこと切であり，それがまた，ここに本稿を発表させていただいた所以でもある．

本研究にあたっては，竹中工務店大阪本店の多くの方々にお世話になりました．厚くお礼申し上げます．

参考文献

［1］ 坪井松弘著「日本の瓦屋根」理工学社，1977

［2］ E．グラーン「宋代の建築基準書」サイエンス，1981年7月号，日本経済新聞社

［3］ 木澤 綏，飯田睦治郎，宮脇昭共著「富士山 自然の謎を解く」日本放送出版協会，1980

［4］ И.M.ゲリファント，C.B.フォーミン著，関根智明訳「変分法」総合出版，1970

付録　2分法による2元連立方程式の数値解法方程式と解法のあらまし

2元連立方程式

$$F(x,y)=0$$
$$G(x,y)=0$$

の数値解を求める問題を考える．

解法の1つは，

$$H(x,y):=F(x,y)-G(x,y)=0$$

とおいて，これをyについて解き，その解

$$y=\tilde{y}(x)$$

にそって，$F(x,y)$の値

$$J(x):=F(x,\tilde{y}(x))=G(x,\tilde{y}(x))$$

をしらべ，これがゼロになるxを求めるという考え方にもとづくものである．すなわち，この値を$\tilde{x}$とすれば，

$$F(\tilde{x},\tilde{y}(\tilde{x}))=0$$

となるし，また，

$$G(\tilde{x},\tilde{y}(\tilde{x}))=F(\tilde{x},\tilde{y}(\tilde{x}))=0$$

であるから，$(\tilde{x},\tilde{y}(\tilde{x}))$連立方程式の解である．この計算に，さらに，いわゆる2分法を適用するのが，ここで述べる2分法による2元連立方程式の数値解法である．なお，$\tilde{y}(x)$を**等値曲線**，$J(x)$を**等値線関数**と呼ぶことにする．

仮定

関数$F(x,y)$および$G(x,y)$について，次の仮定をおく．

(a) $F(x,y)$はyに関して単調減少

(b) $G(x,y)$はyに関して単調増加

(c) $J(x)$はxに関して単調減少

いうまでもなく，記号としては，xとyとを入れ替えてもさしつかえないのであるが，これからの手順では，とり扱いが異なるので，以下で$x(y)$の役割をはたす変数を，一般的に，第1(2)変数と呼ぶことにする．

また，これらの条件が成立しないときにも，$F(x,y)$

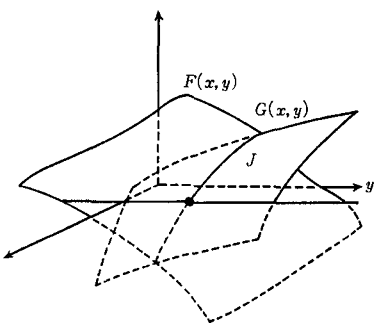


図 i

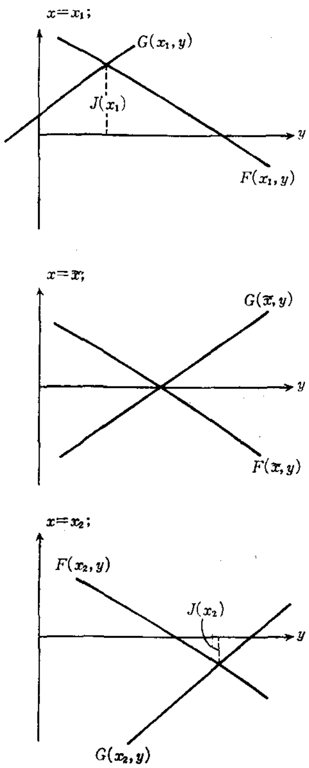


図 ii

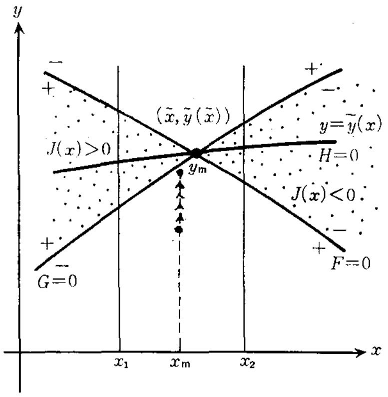


図 iii

と $G(x,y)$ を入れかえたり，F,G,J 等の符号を変えることによって，上の条件が成立するような，等価な方程式が得られることが少なくないことを注意しておこう．

上の仮定のもとで，

$$x_1<\bar{x}<x_2$$

なる3つの x について，関数 $F(x,y)$ および $G(x,y)$ の典型的な形状を示したのがii図である．

第1変数に関する2分法

$J(x)=0$ となる点 $\bar{x}$ を求めるには，まず

$$J(x_1)>0, J(x_2)<0$$

なる2点 x_1 および x_2 からはじめて，解 $\bar{x}$ を含む区間 $[x_1,x_2]$ を作り，その中点

$$x_m=(x_1+x_2)/2$$

における $J(x)$ の符号を調べ，

$J(x_m)>0$ ならば $x_1=x_m$

$J(x_m)<0$ ならば $x_2=x_m$

に変える．条件(c)によって，$\bar{x}$ は新しい区間 $[x_1,x_2]$ にも含まれているから，$\bar{x}$ を含む区間が半分に縮小されたことになる．$\bar{x}$ を求めるには，区間の幅が十分小さくなるまで，これをくりかえす．

$J(x)$ の符号判定

$\bar{x}$ を求める2分法の各段階においては，$J(x_m)$ の値の正負を判定しなければならないが，これには $\tilde{y}(x_m)$ や $F(x_m, y(x_m))$ の値そのものを直接求めなくても，次のようにして判定することができる．

すなわち，$\tilde{y}(x_m)$ に近づく y の点列を作り，

$$F(x_m,y_m)\cdot G(x_m,y_m)>0$$

となるような y_m が求まれば，

(i) $F(x_m,y_m)>0$ ならば $J(x_m)>0$

(ii) $F(x_m,y_m)<0$ ならば $J(x_m)<0$

が成立する．(証明略)

これを図示したのが図iiiである．$F=0$ と $G=0$ にはさまれた，影をつけた領域内に y_m が入れば，$J(x_m)$ の符号の判定が可能になるのである．

さて，第1変数 x に関する2分法の手続き回数は，要求される精度によって一意的に定まる．$\bar{x}$ を含む区間の幅の，初期の幅に対する比率を ε とすれば，手続き回数は

$$n=\ln\varepsilon/\ln 2$$

である．一方，各 x_m における計算回数は，y_m が影をつけた領域に入るまでの，点列の長さに比例する．したがって，y_m はできるだけ早くに $\tilde{y}(x_m)$ に接近することが，計算時間を減らすうえ上で重要である．事情がゆるすかぎり，収束の速度が2次以上の方法（たとえばニュートン法）を用いて点列を作ることが望ましい．