一般ネットワークにおける複数施設の配置問題

川中子 敬至・山城 光雄・矢部 眞

1. はじめに

この研究は，閉路を含む一般ネットワーク上に，非線形関数を目的関数として，複数の施設を配置するには，どのような方法にしたがえばよいかを考察するものである．また，得られた処理手順をもとに，鉄道工場の配置と通信保全員の配置を事例問題としてとりあげ，検討を加える．

本稿では，これらを次の3段階にしたがい，展開してゆく．最初に，前提となる定義や条件を述べるとともに，基本となる単一施設［4,7］を一般ネットワーク上へ配置する方法について考察する．次に，この方法を複数施設へ拡張するため，ネットワーク分割にもとづく処理手順を検討する．最後に，事例問題への適用と，そこから得られた結果について報告する．

2. 単一施設の配置

最初に前提として，ここで言う一般ネットワークとは，「木」に対し，「閉路」を含むネットワークと定義しておく．また，ネットワークは有限の大きさとする．すなわち，節点 $v_i \in V(i=1,2,\cdots,n)$ は全部で n 個，節点 v_i, v_j 間の枝 $e_{ij} \in E(i,j=1,2,\cdots,n;i\neq j)$ は m 本であるとする．各々の節点 v_i には，車両基地の車両数や都市の需要量を表わす量 $w(v_i)$ が与えられ，各枝 e_{ij} には，枝の両端の節点間を移動するための時間や距離といった量 $d(v_i, v_j)$ が与えられる．

いま，仮に1地点 x^* をとり，ここにすべての節点の量を集めたと考える．これはちょうど，各車両基地の車両を集めて修理する問題なら，集中工場に当る．また逆に，各節点に都市の需要量を与えれば，生産工場の位置となる．ここで，物を移動する際の負荷（たとえば費用やエネルギーなど）が移動距離に比例すると仮定すれば，x^* へ集める，あるいは x^* から配分するための総負荷は，次式で表わされる．

$$Q_1{}^1=\sum_{x^*,v_i\in V} d(x^*,v_i)\times w(v_i) \qquad (1)$$

(1)式は，矢部の集中工場問題の基本式［5］で1958年に与えられた．また，1964年にHakimiが与えたメディアン［1−2］も，これと同じ形をしている．次に，(1)式を一般化すると次式となる．

$$Q_1{}^p=\sum_{v_i\in V} d(x^*,v_i)^p\times w(v_i) \quad (p>0) \qquad (2)$$

ここで，p は距離指数［6］と呼ばれるもので，正の値をとる．枝と節点ならびにこれらに付随する量が与えられた時，距離指数 p にしたがって (2)式が最小となる x^* を決定するものが，単一施設の配置問題である．

単一施設をネットワーク上へ配置するには，各枝上で最小地点を求め，これらを比較すれば，最適解が求められる．図1のように，節点 v_i, v_j 間の枝 e_{ij} 上で，v_i から x の距離に施設が置かれるとする．この地点を x_{ij}^* とおく．x と目的関数Q

かわなご　たかし，やましろ　みつお，やべ　まこと
足利工業大学　経営工学科

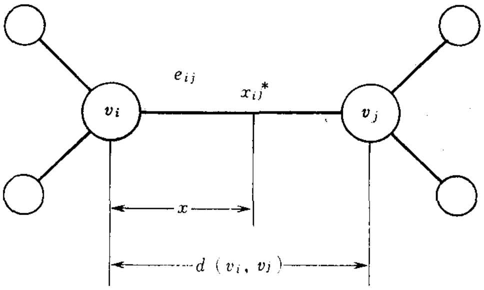

図 1　木の場合

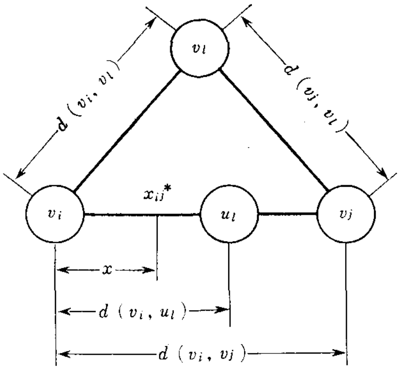

図 2　閉路をもつ場合

は，次式の関係をもつ．

$$Q_1{}^p = \sum_{\substack{v_l \in V \\ d(v_l,v_i)<d(v_l,v_j)}} \{d(v_l,v_i)+x\}^p \times w(v_l) + \sum_{\substack{v_l \in V \\ d(v_l,v_i)>d(v_l,v_j)}} \{d(v_l,v_j)+d(v_i,v_j)-x\}^p \times w(v_l)$$

$$(l=1,2,\cdots,n:p>0) \quad (3)$$

そこで，xを変数とする関数Qは，凸関数あるいは凹関数の一方となり，変曲点も尖点ももたない．このため，一変数関数を最小化する方法によれば，簡単に x_{ij}^* が決定される．この研究では，黄金分割法を用いた．ところが，図2のように節点 v_i, v_j 間の枝 e_{ij} 上に，節点 v_l の対心点 u_l が存在すると，xを変数とする関数 Q は u_l で尖点をもつ．このため黄金分割法の適用は，v_i, u_l 間と u_l, v_j 間とに分けて行なわれなければならない．この u_l までの距離は，次式で与えられる．

$$d(v_i, u_l) = \frac{d(v_i,v_j)-\{d(v_i,v_l)-d(v_j,v_l)\}}{2}$$

$$0 \leq d(v_i,u_l) \leq d(v_i,v_j) \quad (4)$$

ネットワークがn個の節点をもてば，任意の枝上での対心点は，$n-2$個を越えることはない．このため，最悪でも$n-1$の区間について黄金分割法を適用すれば，枝上での最小地点が求められる．これらのことから，$m\times(n-1)$回の計算をすれば，必ず最適地点が求まる．

3. 複数施設の配置

複数の施設が配置される場合，目的関数は次式となる．

$$Q_l{}^p = \sum_{v_i \in V} [\min_l d(x_l^*, v_i)]^p \times w(v_i) \quad (p>0) \quad (5)$$

ここで，x_l^* は複数の配置地点を意味している．配置が節点上に限られるなら，単なる組合せ問題となることから，分枝限定法を用いれば最適な組合せが探索できる．たとえば，図3のネットワークを用いて，5個の節点配置をする問題 ($p=1$) について組合せを列挙木にすると，図4のようになる．この列挙木を用いれば，2個の節点配置なら，節点2, 4と3, 5で目的関数値800，3個の節点配置なら2, 4, 5で目的関数値400，4個だと2, 3, 5, 6で200，5個だと2, 3, 4, 5, 6で100と明示される．ところが，枝上の配置も許される場合には，組合せ個数が有限ではないことから，このように探索することはできない．そこで，2つの前提を付け加え，節点配置をもとに枝配置が求められるようにする．

1) ネットワークの各枝には，1本について2個以上の配置地点を作らない．
2) 全体のネットワークでは，総節点数nより

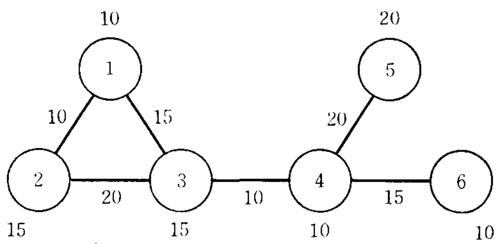

図 3　モデル・ネットワーク

多くの配置地点を作らない．

これらの前提を用いると，全体のネットワークが l 個の部分ネットワークに分割される．そこで，各部分ネットワークについて単一施設の配置を行ない，それぞれの配置地点が全体のネットワークでも最適地点となっているかどうか判定すれば良いことになる．このことをもとに複数施設の処理手順を考えると，図5のフローチャートになる．

最初に，ウォーシャル・フロイド法を用いて，ネットワークの全節点間での最短距離を求める．次に，分枝限定法を用いて節点解群を求める．この節点解群と各節点との距離から，全節点を l 個のグループに分け，CHK1ベクトルを作る．このCHK1ベクトルと後から出てくるCHK2ベクトルは，それぞれ節点の数である n 個の要素をもち，各要素は，節点の所属するグループ番号を表わしている．次に各部分ネットワークについて最小地点を求め，これらをもとに再び全体のネットワークをグループ分けする．この時，各節点の所属をCHK2ベクトルに記録する．これらの作業が終了すると，2つのベクトルの各要素をそれぞ

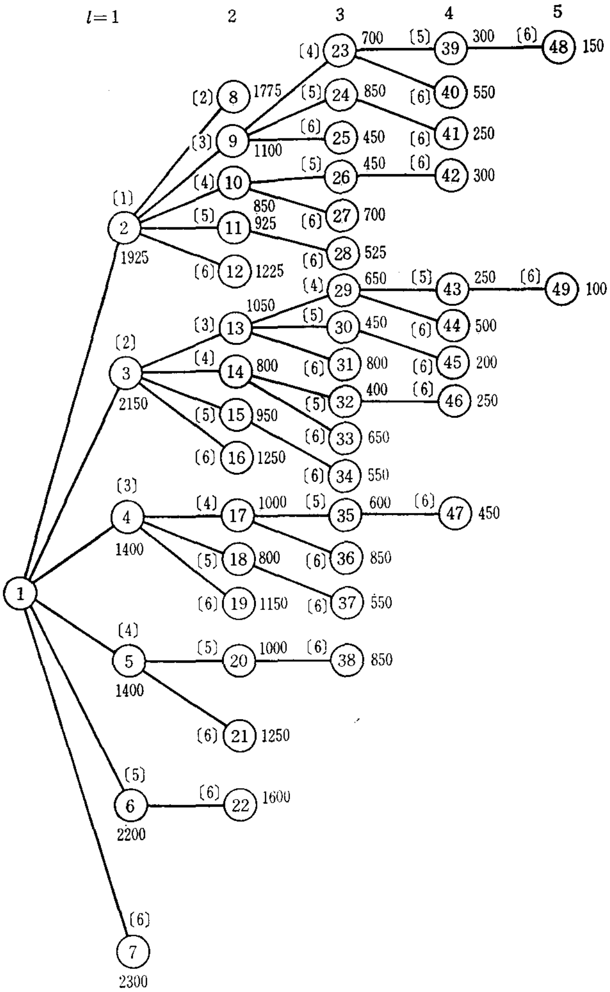

図 4 列挙木

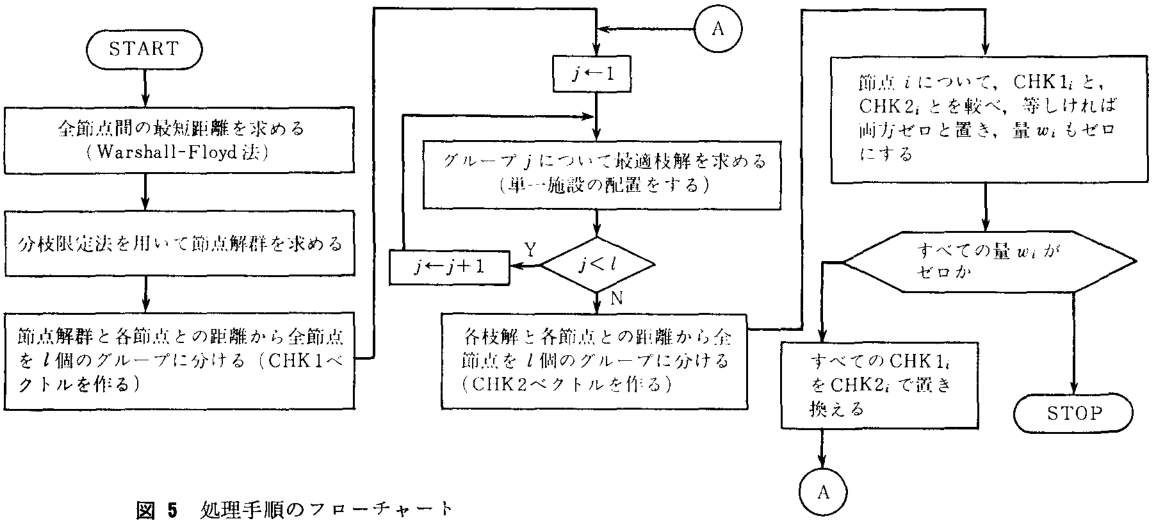

図 5 処理手順のフローチャート

れ比較する．要素の値が等しければ，その節点の所属が決定されたことになる．未決定の節点が残った場合，CHK2ベクトルの各要素の値をCHK1ベクトルに与えて，再び新しいCHK2ベクトルを作る．この操作をくりかえし実行すれば，すべての節点の所属が決定される．このようにして，複数施設の処理手順が得られる．

4. 事　例

4.1 「矢部の集中工場問題」の再検討

この問題は，昭和31年から約2年間にわたり開かれ，鉄道工場のあるべき姿を検討した「工場調査委員会(委員長故山下興家氏)」が発端となっている．当時の国鉄では，ＳＬが廃止され電化，ディーゼル化が推進されていた．こうした中で，ディーゼルエンジンの修繕設備を各車両工場へ新設する代りに，いくつかの工場で集中修繕が行なわれることになり，この集中工場の選定を，輸送費から割り出そうという問題が発生した．これが「矢部の問題」と呼ばれるもので，昭和33年度(確定)と昭和40年度(計画)の担当車両数によって試算した結果が，参考文献［5］ならびに［6］に述べられている．

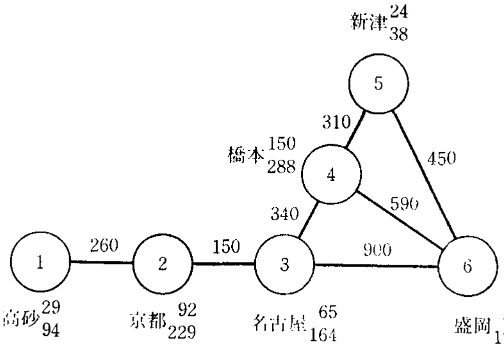

図 6　矢部の問題のネットワーク

本稿ではこの問題を，非線形関数・複数施設で再検討してみる．与えられたネットワークは，図6に示されている．ここで，距離の単位はキロメートルである．節点となる工場の車両数は，上段が昭和33年度，下段が40年度のものである．距離指数 p を 1/3, 1/2, 1, 2, 3 として，配置地点の数 l を1から5まで探索した結果が，表1(昭和33年度)，表2(昭和40年度)に表わされている．$0<p\leq 1$ の場合，$p=1$ の $l=1$ 以外では，表1，表2とも同じ結果を与えている．これは，参考文献［6］の結果と一致する．$p=1$ の $l=1$ で結果が橋本と名古屋に分れたのは，図6のネットワークで端にある高砂の車両数が，29両から94両と3倍以上に増えた重みがモーメントとして働いたためと考えられる．$p>1$ について2つの表を見較べると，l が小さい時には最適地点が枝の中間点となることもあるが，l の増加とともに最適地点は節点付近に移動することが見いだされる．このため，l が4や5では節点解が最適解となるものが増える．これらのことから，比較的簡単に求められる節点解は，最適地点のよい近似解となって

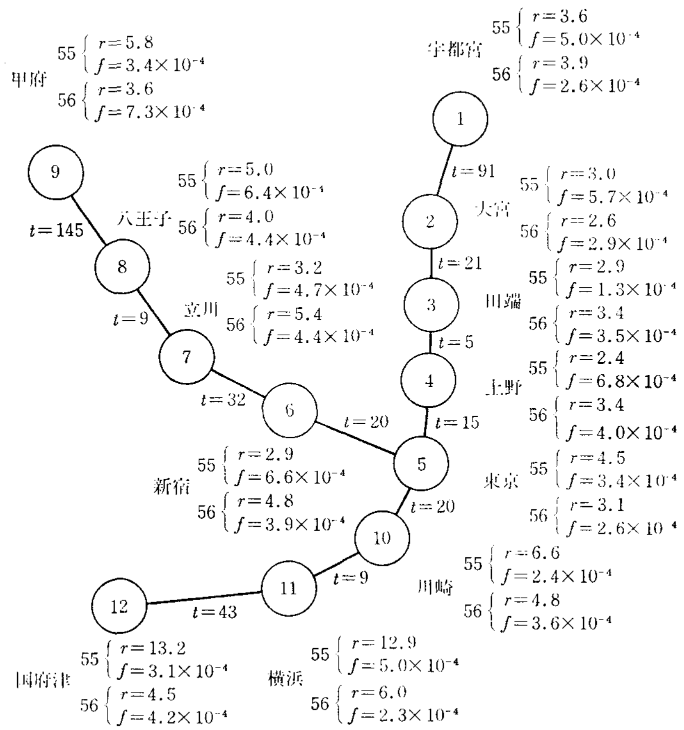

図 7　通信システムのネットワーク

表 1　昭和33年のデータによる結果

p	l	最適地点
$\frac{1}{3}$	1	4(橋本)
	2	2(京都)・4(橋本)
	3	2(京都)・4(橋本)・6(盛岡)
	4	2(京都)・3(名古屋)・4(橋本)・6(盛岡)
	5	2(京都)・3(名古屋)・4(橋本)・5(新津)・6(盛岡)
$\frac{1}{2}$	1	4(橋本)
	2	2(京都)・4(橋本)
	3	2(京都)・4(橋本)・2(盛岡)
	4	2(京都)・3(名古屋)・4(橋本)・6(盛岡)
	5	2(京都)・3(名古屋)・4(橋本)・5(新津)・6(盛岡)
1	1	4(橋本)
	2	2(京都)・4(橋本)
	3	2(京都)・4(橋本)・6(盛岡)
	4	2(京都)・3(名古屋)・4(橋本)・6(盛岡)
	5	2(京都)・3(名古屋)・4(橋本)・5(新津)・6(盛岡)
2	1	枝(3,4)—4(橋本)から118.2キロメートル
	2	枝(2,3)—2(京都)から12キロメートル 枝(4,6)—4(橋本)から109.1キロメートル
	3	6(盛岡)・枝(2,3)—2(京都)から12キロメートル 枝(4,5)—4(橋本)から42.8キロメートル
	4	4(橋本)・5(新津)・6(盛岡) 枝(2,3)—2(京都)から12キロメートル
	5	3(名古屋)・4(橋本)・5(新津)・6(盛岡) 枝(2,3)—2(京都)から12キロメートル
3	1	枝(3,4)—4(橋本)から93.3キロメートル
	2	枝(1,2)—2(京都)から13.7キロメートル 枝(4,6)—4(橋本)から168.4キロメートル
	3	6(盛岡)・枝(1,2)—2(京都)から13.7キロメートル 枝(4,5)—4(橋本)から88.6キロメートル
	4	4(橋本)・5(新津)・6(盛岡) 枝(1,2)—2(京都)から13.7キロメートル
	5	3(名古屋)・4(橋本)・5(新津)・6(盛岡) 枝(1,2)—2(京都)から13.7キロメートル

表 2　昭和40年のデータによる結果

p	l	最適地点
$\frac{1}{3}$	1	4(橋本)
	2	2(京都)・4(橋本)
	3	2(京都)・4(橋本)・6(盛岡)
	4	2(京都)・3(名古屋)・4(橋本)・6(盛岡)
	5	2(京都)・3(名古屋)・4(橋本)・5(新津)・6(盛岡)
$\frac{1}{2}$	1	4(橋本)
	2	2(京都)・4(橋本)
	3	2(京都)・4(橋本)・6(盛岡)
	4	2(京都)・3(名古屋)・4(橋本)・6(盛岡)
	5	2(京都)・3(名古屋)・4(橋本)・5(新津)・6(盛岡)
1	1	3(名古屋)
	2	2(京都)・4(橋本)
	3	2(京都)・4(橋本)・6(盛岡)
	4	2(京都)・3(名古屋)・4(橋本)・6(盛岡)
	5	2(京都)・3(名古屋)・4(橋本)・5(新津)・6(盛岡)
2	1	枝(3,4)—4(橋本)から164.5キロメートル
	2	枝(2,3)—2(京都)から0.4キロメートル 枝(4,6)—4(橋本)から135.5キロメートル
	3	6(盛岡)・枝(2,3)—2(京都)から0.4キロメートル 枝(4,5)—4(橋本)から36.2キロメートル
	4	1(高砂)・6(盛岡) 枝(2,3)—2(京都)から62.6キロメートル 枝(4,5)—4(橋本)から36.2キロメートル
	5	1(高砂)・3(名古屋)・6(盛岡) 枝(2,3)—2(京都)から62.6キロメートル 枝(4,5)—4(橋本)から36.2キロメートル
3	1	枝(3,4)—4(橋本)から125.9キロメートル
	2	枝(1,2)—2(京都)から25.1キロメートル 枝(4,6)—4(橋本)から189キロメートル
	3	6(盛岡)・枝(1,2)—2(京都)から25.1キロメートル 枝(4,5)—4(橋本)から82.7キロメートル
	4	4(橋本)・5(新津)・6(盛岡) 枝(1,2)—2(京都)から25.1キロメートル
	5	3(名古屋)・4(橋本)・5(新津)・6(盛岡) 枝(1,2)—2(京都)から25.1キロメートル

いることがわかる．特に，多くの配置地点を作る場合には，この傾向が強まる．

4.2　通信システム保全員の配置

国鉄の東京通信指令室と各支区とのあいだでは，ファクシミリを用いて情報の交信をしている．このファクシミリシステムのダウンは，時々刻々変化する情報の信頼性や保全要員の配置問題のみならず，列車運行の安全性にも影響を与える．本稿では，より少ない保全要員を効果的に配置し，ダウンタイムを最小化する一策として，集中化された保全員基地をどこに置いたらよいかという問題を扱う．ここでのデータは東京管内のものであるから，配置地点は1カ所でよい．そこで，配置地点を1カ所として検討した後に，仮に数カ所置くとして検討した結果をつけ加える．

図7は，東京管内におけるファクシミリ設置駅と，その駅での昭和55年，56年のシステムの平均故障率，ならびに故障修復の平均時間を表わしている．ここで，駅間の保全員の移動時間と故障の修復時間は，「分」単位とする．いま，保全員基地

から故障駅までの保全員の移動が，故障率にしたがって発生すると考えれば，平均的な故障の負荷は，次式で表わされる．

$$Q_1{}^p=\sum_{v_i\in V}[\{t(x^*,v_i)+r(v_i)\}\times f(v_i)]^p \quad (p>0) \quad (6)$$

ここで，t は移動時間(分)，r は修復時間(分)，f は故障率(回/分)である．そこで，(6)式の p を 1/3, 1/2, 1, 2, 3 として最小地点を求めてみると，表3の結果となる．昭和55年のデータの場合，p が 1/3 の時，上野が最適地点となる以外は，p が 1/2, 1, 2, 3 のいずれでも東京が最適地点となる．昭和56年のデータでは，p が 1/3, 1/2, 1 で東京が最適地点となるが，p が 2 であると立川が最適地点となり，p が 3 では八王子・甲府間で八王子から34.2分(甲府から110.8分) の地点となる．これらはいずれも中央線沿いの駅となる．これは，東海道線，東北線沿いの多くの駅での故障率，ならびに修復時間が，昭和55年から56年のあいだに改善されているのに対して，中央線沿いの駅では，それほど改善されていないことによると考えられる．

以上のことから，ただ1つの保全員基地を作るなら，東京地区に作るのがよく，現状の東京地区に基地があることは適正であることになる．

次に，複数の保全員基地を仮定して，検討してみる．(6) 式を複数の保全員基地に拡張すると，次式となる．

$$Q_l{}^p=\sum_{v_i\in V}[\{\min_{l}\ t(x_l{}^*,v_i)+r(v_i)\}\times f(v_i)]^p \quad (p>0) \quad (7)$$

そこで，(7)式の p を1/3, 1/2, 1, 2, 3とし，l を2から5まで変化させ，計算する．昭和55年と昭和56年についての結果が，表4と表5に表わされている．これら2つの表を見較べると，いずれの場合でも，東京地区と東海道線・中央線・東北線の各沿線上のどこかとの組合せとなっている．

以上のことから，まず1つの保全員基地は東京地区に置き，2つ目以降は順に沿線上へ置いてゆくのがよいということになる．

表 3 $l=1$ での結果

年度	p	最適地点
昭和55	1/3	4(上野)
	1/2	5(東京)
	1	5(東京)
	2	5(東京)
	3	5(東京)
昭和56	1/3	5(東京)
	1/2	5(東京)
	1	5(東京)
	2	7(立川)
	3	枝(8,9)—8(八王子)から34.2分

5. おわりに

この研究では，一般ネットワーク上へ単一施設を配置する方法の拡張から，複数施設の配置問題をとり扱った．また，事例問題として，鉄道工場の配置と保全員の配置を検討した．ここで問題となるのは，検討の対象物がネットワークを形成している点である．鉄道や道路がネットワークを形成するのは当然としても，新幹線や高速道路等の代替交通手段が存在すると，移動距離の大小と移動時間の大小とが逆転するなど，単調な関係だけでは処理できない問題もおこってくる．特に首都圏のような都市部ではさまざまな交通手段が考えられることから，いくつかの関数を用意し，交通手段に応じて関数を変更する処理も必要となる．

また，単一施設の配置から複数施設へ拡張する際に，2つの前提を用いているが，総配置数の制限は問題ないとしても，各枝上への配置数の制限は，緩和されるべきものである．これは，節点配置から枝配置を求めたために生じた制限である．現実問題では，節点となる工場の担当種別が設定できるように，枝にも何らかの縄張りが設定できれば，こうした問題は解決される．

最後に，この研究をすすめるにあたって，ご指導，ご鞭撻をいただいた，足利工業大学・坂田龍範教授，上智大学理工学部・鈴木誠道教授に感謝いたします．

表 4 昭和55年のデータによる結果

p	l	最適地点
$\frac{1}{3}$	2	4(上野)・7(立川)
	3	1(宇都宮)・4(上野)・7(立川)
	4	1(宇都宮)・4(上野)・7(立川)・9(甲府)
	5	1(宇都宮)・3(田端)・7(立川)・9(甲府)・11(横浜)
$\frac{1}{2}$	2	4(上野)・8(八王子)
	3	1(宇都宮)・4(上野)・8(八王子)
	4	1(宇都宮)・4(上野)・7(立川)・9(甲府)
	5	1(宇都宮)・3(田端)・7(立川)・9(甲府)・11(横浜)
1	2	4(上野)・8(八王子)
	3	1(宇都宮)・4(上野)・8(八王子)
	4	1(宇都宮)・4(上野)・7(立川)・9(甲府)
	5	1(宇都宮)・3(田端)・7(立川)・9(甲府)・11(横浜)
2	2	枝(3,4)—4(上野)から1.2分 枝(8,9)—8(八王子)から21.2分
	3	1(宇都宮)・5(東京)・9(甲府)
	4	1(宇都宮)・7(立川)・9(甲府) 枝(4,5)—4(上野)から2.2分
	5	1(宇都宮)・3(田端)・7(立川)・9(甲府) 枝(11,12)—11(横浜)から3.9分
3	2	3(田端)・枝(8,9)—8(八王子)から34.2分
	3	1(宇都宮)・5(東京)・9(甲府)
	4	1(宇都宮)・9(甲府) 枝(4,5)—5(東京)から7.1分 枝(6,7)—7(立川)から1.8分
	5	1(宇都宮)・3(田端)・9(甲府) 枝(6,7)—7(立川)から1.8分 枝(11,12)—11(横浜)から9.2分

表 5 昭和56年のデータによる結果

p	l	最適地点
$\frac{1}{3}$	2	5(東京)・9(甲府)
	3	5(東京)・8(八王子)・9(甲府)
	4	3(田端)・7(立川)・9(甲府)・11(横浜)
	5	1(宇都宮)・4(上野)・8(八王子)・9(甲府)・11(横浜)
$\frac{1}{2}$	2	5(東京)・9(甲府)
	3	5(東京)・8(八王子)・9(甲府)
	4	3(田端)・7(立川)・9(甲府)・11(横浜)
	5	1(宇都宮)・4(上野)・8(八王子)・9(甲府)・11(横浜)
1	2	5(東京)・9(甲府)
	3	5(東京)・8(八王子)・9(甲府)
	4	3(田端)・7(立川)・9(甲府)・11(横浜)
	5	3(田端)・7(立川)・9(甲府)・10(川崎)・12(国府津)
2	2	5(東京)・9(甲府)
	3	5(東京)・9(甲府) 枝(7,8)—8(八王子)から3.5分
	4	3(田端)・7(立川)・9(甲府)・12(国府津)
	5	7(立川)・9(甲府)・10(川崎)・12(国府津) 枝(2,3)—2(大宮)から1.6分
3	2	5(東京)・9(甲府)
	3	5(東京)・9(甲府) 枝(7,8)—8(八王子)から3.5分
	4	7(立川)・9(甲府)・12(国府津) 枝(2,3)—3(田端)から8分
	5	2(大宮)・7(立川)・9(甲府)・10(川崎)・12(国府津)

参考文献

[1] Hakimi, S. L.: Optimum Locations of Switching Centers and the Absolute Centers and Medians of a Graph. *Operations Research*, Vol. 12, 1964, 450–459

[2] Hakimi, S. L.: Optimum Distribution of Switching Centers in a Communication Network and Some Related Graph Theoretic Problems. *Operations Research*, Vol. 13, 1965, 462–475

[3] 川中子・山城・矢部：一般ネットワークにおける複数施設の配置問題. 1984年度秋季研究発表会アブストラクト集, 163–164

[4] Shier, D. R. and Dearing, P. M.: Optimal Locations for a Class of Nonlinear, Single-Facility Location Problems on a Network. *Operations Research*, Vol. 31, 1983, 292–303

[5] 矢部眞：工場配置の問題. オペレーションズ・リサーチ, Vol. 3, No. 1, 1958, 37–42

[6] 矢部眞：輸送費より見た集中配給センタの最適位置について. 学位論文(東京大学工学部), 1977

[7] 矢部・川中子・山城・八戸：一般ネットワークにおける単一施設の配置問題. 第27回工学院大学研究発表講演会講演要旨, 1984. p.8