ポンプ・ステーションの最適計画

石堂 一成・南部 和幸

1. はじめに

ポンプ・ステーションに関連する最適化の課題としては，ポンプ・ステーションの内部仕様に関する諸問題と，上水道などの配水管路網におけるポンプ・ステーションの位置づけに関する諸問題とがある．これらの諸問題に対して弊社でも従来からさまざまな研究を行ない，実用化を進めてきたが，本稿では，ポンプ・ステーションの内部仕様に関する諸問題のうちから1つの典型的な最適化問題をとりあげて述べる．

さて，本稿で対象とするその典型的な最適化問題というのは，ポンプ・ステーションの内部仕様のうちで最も重要であるポンプの種類・台数を決定する問題である．この問題を，以下では，最適ポンプ選定問題と呼ぶことにする．この最適ポンプ選定問題は，最終的な最適解であるポンプの種類・台数が変数の個数として少ないために一見しただけでは比較的簡単な最適化問題と考えられるが，実際には，そのまま定式化すると到底解くことのできない大規模で離散的な非線形計画問題になるというものである．

そこで，この最適ポンプ選定問題を2段階の最適化問題に変換して解くという近似解法を開発し，実用化している．これにより，実用的な計算時間で最適なポンプの種類・台数を決定することができるようになっている．

写真 1　ポンプ・ステーションの内部の様子

以下に，その最適ポンプ選定問題と解法の概要を述べる．

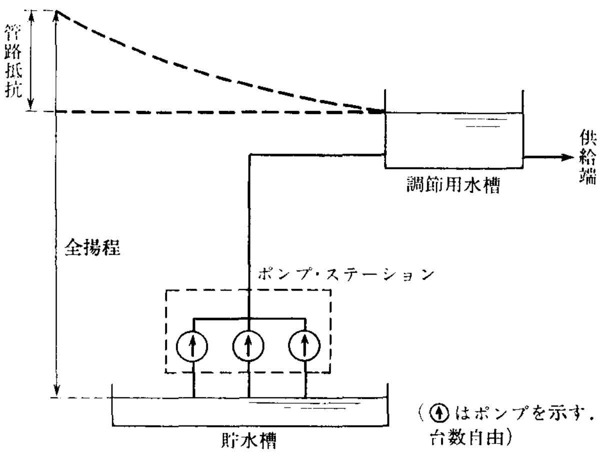

図 1　対象とするポンプ・ステーション

いしどう　かずしげ，なんぶ　かずゆき
三菱重工業(株)

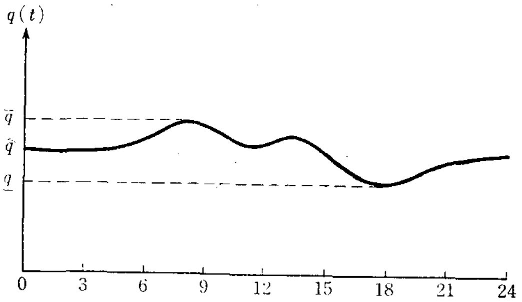

図 2　必要水量の時間的変化（例）

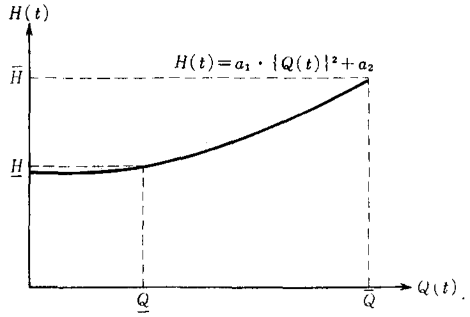

図 3　管路抵抗曲線

2.　最適ポンプ選定問題

対象とするポンプ・ステーションは，図1に示すように貯水槽から供給端の調節用水槽まで送水するものである（写真にその内部の様子を示す）．このポンプ・ステーションには複数のポンプを並列に設置しており，これらのポンプのオンオフ制御によって送水を行なう．最適ポンプ選定問題は，このようなポンプ・ステーションに設置すべきポンプを多数の種類のポンプのなかからイニシャル・コストとランニング・コストの和を最小とするように選ぶという問題である．

この最適ポンプ選定問題の主要な前提条件として，次のものがある．

【1】供給端における必要水量は，図2の例に示すように時間的に変動し，その値が与えられている．図中の記号の意味は次のとおりである．

$q(t)$：時刻 t における必要水量(m^3/h)

$\bar{q}$　：必要水量の最大値(m^3/h)

$\hat{q}$　：平均必要水量(m^3/h)

$\underline{q}$　：必要水量の最小値(m^3/h)

【2】送水先には調節用水槽が設けられており，各時刻の送水量は (1) の必要水量に合致しなくてもよい．ただし，必要水量と送水量の差の累積値は一定範囲内に納めなければならない．

【3】送水量の変動によるポンプから調節用水槽までの管路抵抗の変動は，図3に示すように送水量に関する2次曲線で与えられる．貯水槽および調節用水槽の水位変動が全揚程の値に与える影響は，相対的に小さいので無視できる．また，管路における漏水量は0で，各ポンプの吐出水量の和が送水量に等しい．図3中の記号の意味は次のとおりである．

$Q(t)$：時刻 t における送水量(m^3/h)

$\bar{Q}$　：最大送水量(m^3/h)

$\underline{Q}$　：最小送水量(m^3/h)

$H(t)$：時刻 t における全揚程(m)

$\bar{H}$　：$\bar{Q}$ だけ送水するときの全揚程(m)

$\underline{H}$　：$\underline{Q}$だけ送水するときの全揚程(m)

【4】ポンプの性能は各ポンプ種類ごとに図4に示すような2つの曲線として与えられる．1つは $Q-H$曲線と呼ばれるもので，ポンプの吐出水量と揚程の関係を与える．もう1つは$Q-\eta$曲線と呼ばれるもので，ポンプの吐出水量と効率の関係を与える．$Q-H$曲線と$Q-\eta$曲線は，それぞれ次の（式1）および（式2）であらわされる．ただし，図4，（式1）および（式2）の記号の意味は次のとおりである．

Q_i　：ポンプ種類 i の吐出水量(m^3/h)

$Q_i{}^*$：ポンプ種類 i の定格吐出水量(m^3/h)

H_i　：ポンプ種類 i の揚程(m)

$H_i{}^*$：ポンプ種類 i の定格揚程(m)

η_i　：ポンプ種類 i の効率

$\eta_i{}^*$：ポンプ種類 i の最高効率

$b_{i,1}, b_{i,2}$：ポンプ種類 i の$Q-H$曲線係数

$d_{i,1}, d_{i,2}, d_{i,3}$：ポンプ種類 i の $Q-\eta$曲線係数

$$H_i=b_{i,1}(Q_i-Q_i{}^*)^2+b_{i,2}(Q_i-Q_i{}^*)+H_i{}^* \quad (1)$$

$$\eta_i=d_{i,1}(Q_i-Q_i{}^*)^3+d_{i,2}(Q_i-Q_i{}^*)^2+d_{i,3}(Q_i-Q_i{}^*)+\eta_i{}^* \quad (2)$$

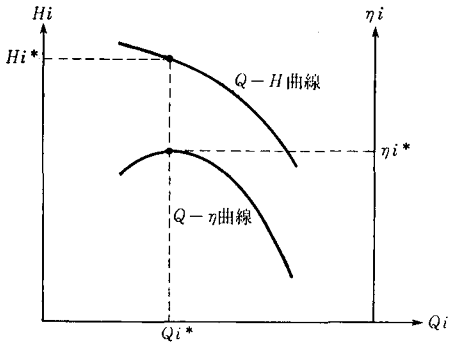

図 4 ポンプ種類 i の性能曲線

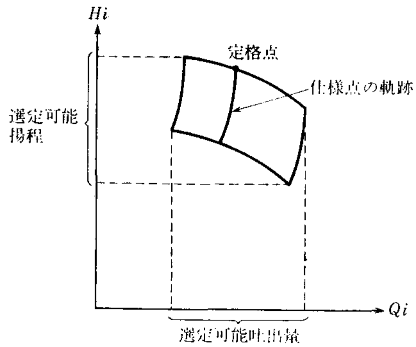

図 5 ポンプ種類 i の選定領域

図4にも示しているように，定格吐出水量 Q_i^* および定格揚程 H_i^* は，効率が最高効率 η_i^* となる点である．この点をポンプ種類 i の定格点と呼ぶ．ポンプを運転するときの Q_i および H_i は $Q-H$ 曲線上に必ずあるが，$Q-H$ 曲線そのものは，ポンプの種類が決定されていても，実際にポンプを製造する段階での仕様の設定の方法によって，ある程度は次の(式3)であらわされる曲線に沿って下方に平行移動することができる．

$$H_i=H_i^*\cdot Q_i^2/(Q_i^*)^2 \tag{3}$$

したがってポンプ種類 i は，結局，図5に示すように，1つの $Q-H$ 曲線を(式3)の曲線に沿って下方に平行移動することによって作られる領域で運転することができるようなポンプである．平行移動した $Q-H$ 曲線上で最高効率となるような点を仕様点と呼ぶ．

また，$Q-H$ 曲線を(式3)の曲線に沿って下方に平行移動するとき，仕様点の軌跡は(式3)に一致する．したがって，仕様点を $(Q_i^s,\ H_i^s)$ で表わせば

$$H_i^s=H_i^*\cdot(Q_i^s)/(Q_i^*)^2 \tag{4}$$

が成り立つ．また，仕様点が定まれば，その仕様点を通る $Q-H$ 曲線は次の(式5)で表わされる．

$$H_i=b_{i,1}(Q_i-Q_i^s)^2+b_{i,2}(Q_i-Q_i^s) +H_i^*\cdot(Q_i^s)^2/(Q_i^*)^2 \tag{5}$$

【5】送水量は，すでに述べたように並列に設置する各ポンプをオンオフ制御することによって調節するものとする．したがって，送水量と揚程は，その時に運転されているポンプの $Q-H$ 曲線と管路抵抗曲線とから決定される．具体的に，J 台のポンプが運転されていて，それらのポンプの定格点および仕様点がそれぞれ (Q_j^*, H_j^*) および (Q_j^s, H_j^s)，$(j=1,2,\cdots,J)$ とすれば，その時の送水量 $Q(t)$ および全揚程 $H(t)$ は，次の $J+2$ 個の式からなる連立方程式の解として得られる．ただし，$b_{j,1}$ およびおよびは $b_{j,2}$ それぞれのポンプの所属種類ごとに定まっている $Q-H$ 曲線係数であり，a_1 および a_2 は管路抵抗曲線係数である．なお，式中の Q_j は各ポンプの吐出水量を意味する未知数である．

$$H(t)=a_1\cdot\{Q(t)\}^2+a_2 \tag{6}$$

$$Q(t)=\sum_{j=1}^{J}Q_j \tag{7}$$

$$H(t)=b_{j,1}(Q_j-Q_j^s)^2+b_{j,2}(Q_j-Q_j^s) +H_i^*\cdot(Q_j^s)^2/(Q_j^*)^2 \quad (j=1,2,\cdots,J) \tag{8}$$

【6】ポンプ・ステーションのイニシャル・コストは，ポンプ種類 i ごとの設置台数の関数として次の(式9)で与えられる．

$$C_1=\sum_i N_i\cdot E_i+F_1 \tag{9}$$

ここで

C_1：ポンプ・ステーション全体のイニシャル・コスト(円)

N_i：ポンプ種類 i の設置台数(台)

E_i：ポンプ種類 i のポンプ1台当りに比例するポンプ・ステーションのイニシャル・コスト(円／台)

F_1：ポンプ・ステーションのイニシャル・コストのうち，ポンプ台数に比例しない部分(円)

【7】ポンプ・ステーションのランニング・コストは，設置される各ポンプ n の運転方法の関数として次の(式10)で与えられる．

$$C_2=\sum_{n=1}^{N}\int_0^T\frac{G_n\cdot Q_n(t)\cdot H_n(t)}{\eta_n(t)}dt+F_2 \tag{10}$$

ここで

C_2：ポンプ・ステーション全体のランニング・コスト(円)

n：設置されるポンプに関する添字

N：設置されるポンプの総台数(台)

$N=\sum_i N_i$

G_n：ポンプ n のランニング・コスト係数．所与(円/m^4)

$Q_n(t)$：ポンプ n の時刻 t における吐出水量(m^3/h)

$H_n(t)$：ポンプ n の時刻 t における揚程(m)

$\eta_n(t)$：ポンプ n の時刻 t における効率

T：ポンプ・ステーションの償却時期(h)

F_2：ポンプ・ステーションのランニング・コストのうち，ポンプの運転方法に依存しない部分(円)

【8】設置するポンプの種類があまり増えるとポンプの保守が煩雑となるので，この種類数の上限値$\bar{M}$を与える．また，設置されるポンプの総台数Nについても，ポンプ・ステーションの広さの制限などから下限値$\underline{N}$と上限値$\bar{N}$を与える．

3. 問題の規模と解法の概要

上述のように，最適ポンプ選定問題を解いて決定すべきものは，各ポンプ種類 i ごとの設置台数N_iである．対象となるポンプ種類は百数十種であるが，必要水量の最小値 $\underline{q}$ を送水するときの全揚程 $a_1\cdot(\underline{q})+a_2$ から必要水量の最大値 $\bar{q}$ を送水するときの全揚程 $a_1\cdot(\bar{q})^2+a_2$ までの範囲で運転できる性能をもつポンプ種類に実際に設置すべきものは限定されるので，その他の諸条件も考慮に入れると，結局，15種類程度が直接的な検討対象となる．また，設置するポンプの種類数Mの上限値$\bar{M}$，および総台数Nの下限値$\underline{N}$，上限値$\bar{N}$をそれぞれ

$$\bar{M}\leq 10 \tag{11}$$

$$2\leq\underline{N},\ \bar{N}\leq 10 \tag{12}$$

とすると，解くべき最適化問題は，約15種類のポンプの10台以下の組合せ（約3万組）のなかからコストを最小とする組合せを選ぶ問題となる．ただし，各ポンプ j の運転点$(Q_j(t), H_j(t))$は，前提条件【5】で述べたように同時に運転されるすべてのポンプの$Q-H$曲線と管路抵抗曲線とから決まるものである．しかも，各ポンプの$Q-H$曲線は，前提条件【4】で述べたように，そのポンプ種類と仕様点が決まらないかぎり，確定できない．また，必要水量 $q(t)$ が時刻によって変動するので，運転すべきポンプの組合せも時刻によって変える必要がある．この最適ポンプ選定問題を直接的に全体で1つの数理計画問題に定式化して解こうとしても，この問題は，大規模な混合整数非線形計画問題となり，実用的な計算時間で解くことは不可能である．

そこで，次の2つの最適化問題を順次解くことによって解を得るという実用的な近似解法を用いる．以下，その2つの問題の導出法とそれぞれの解法の概要を述べる．

(1) 設置ポンプ組合せの第1次選出問題

まず，平均必要水量$\hat{q}$を送水するときの揚程$a_1\cdot(\hat{q})^2+a_2$を仕様点の揚程とすることができ，かつその場合に最小必要水量 $\underline{q}$ を送水するときの揚程$a_1\cdot(\underline{q})^2+a_2$から最大必要水量$\bar{q}$を送水するときの揚程 $a_1(\bar{q})^2+a_2$ までの範囲で運転可能なポンプ種類 i を組合せ候補として選び出す．

次に，$\underline{q}$ から $\bar{q}$ までの流量範囲を数区間に分割し，その流量区間ごとに，候補のポンプを組合せて運転する場合の運転点をその近傍の点で代用してランニング・コストの計算式をつくり，このようなランニング・コストの全体とイニシャル・コ

ストの和が小さい方から20組程度を設置ポンプ組合せの第1次候補として選び出す．最終的には，この問題を整数線形計画問題として定式化し，整数線形計画法のための一般的な分枝限定法のアルゴリズムを部分的に修正したものによって解く．

(2) 設置ポンプ組合せの第2次選出問題

設置ポンプ組合せの第1次選出では，運転するポンプの組合せによって定まる運転点を求めてランニング・コストを正確に表わし，これにもとづいて，第1次選出で選びだされた設置ポンプ組合せからトータル・コストが最小となる組合せを選びだす．具体的には，第1次選出で選びだされた設置ポンプの各組合せごとに，ランニング・コストを最小とするようなポンプ・ステーションの運転方法を線形計画法を用いて求めることができ，そのランニング・コストとイニシャル・コストからトータル・コストを求める．すべての設置ポンプ組合せについてそれぞれ最小となるトータル・コストを求めたら，それらを比較して最小値を与える設置ポンプ組合せを1つ最終的に選びだす．

4. おわりに

本稿では，ポンプ・ステーションに関連する最適化問題のうちから1つをとりあげ，直接的に解くことの困難な最適化問題に対する近似解法の実例を示した．この解法は，もとの大規模で離散的な非線形計画問題の解を，混合整数線形計画問題と連続変数に関する線形計画問題の2つを順次解くことによって得るという方法であるが，このような方法は実用的に解けないとされている多くの現実の最適化問題へのとりくみ方に対する1つのモデル・ケースになると考えられる．

•ミニ•ミニ• •O•R•

価格はOR的に決まるか

•ソフトウェアの価格の考え方に2種類ある．その1つは，コスト・プラス方式であり，他は，そのもたらす便益による．現実には，後者はその評価が困難なこともあって，前者によるのが一般的である．しかし，なぜ，ソフトウェアについて，便益にもとづく考え方が対象になるのか，たぶん，開発コストが主体で，生産コストがほとんどかからないためであろう．

•便益をもとにした価格の考え方は，OA機器など多くの商品，サービスでもあり得るはずである．パソコンをはじめとするOA機器の導入に際して事前にその投資効果を評価する企業が多い．一般に，投資額の2～3倍のコスト節減を目標としているが，節減額がかなり大きい場合でも，機器はこれに見合った高価格であるべきであるとの議論はない．工業製品の場合，開発コストに比べ，原材料費を主体とする生産コストの割合が大きいため，コスト・プラス方式の価格が説得性をもちやすい．

•芸術の世界では，どうだろう．音楽会――オーケストラ，室内楽，リサイタルなどその種類によって入場料はほぼ決まっているが，著名な演奏家，交響楽団になると例外．絵の展覧会――入場料に多少の差がある．映画――上映時間，監督によらず入場料はほぼ同額．ファッションの世界――デザイナーにより，値段はピンからキリまで．芸術，ファッションなど，感覚に訴えるものでも，客観的にみてその便益に差がある場合，その価格はコストとは無関係である．

•それにしても，書籍の価格は，著者，その内容によらず，コストによるようだ．ソフトウェア，コンサルティング，サービスなど知的活動の産物の価格が，単なるコスト・プラス方式で単純に決まっているのも淋しい気がする． (山下達哉)