計量経済モデルの分析

北村 博

1. 目 的

経済学者の理想の追求の結果として，典型的には Project-Link の世界経済モデルにみられるように，モデルは大型化してきた．大きいものは，何千変数!!もの非線形連立方程式系になっている．データの膨大さとあいまって，モデルの動きがわかりにくくなってきている．

連立系という相互依存同時体系で，本当に働いている部分はどこか，また，式間の相互依存の強さを計る尺度はないか，というのは重要な問題である．本論文でその尺度の1つを提案し，適用例によりその有効性を示す．

さらにモデルの第1の目的が予測であるとするなら，推計値に含まれる各種の誤差評価が重要である．「このケースではGNPが3.6%増加する」と予測する時，3.6のどこまでが有効かは議論の根幹にかかわることである．ここでは，連立系解法自体から生じる誤差の評価を提案し，実例で各変数ごとにこれが大幅に異なるかを示すこととする．

同時決定に関する議論でもう1つ重要なのは，得られた解が安定かどうかということである．Samuelson 教授の動学安定条件が，連立系である計量モデルでも適用可能であることを示し，それが実際のモデルでも成立することを示す．

なお計量モデルにはラグ付変数を通じての経済成長の記述という面もあるが，本論文はその点についてはふれないことを断わっておきたい．

ここで実際の分析例として使用するモデルは，アジア経済研究所の坂井氏の作成した「Taiwan」モデルであり，44本の非線形モデルである．[6]

2. 同時体系の特性評価

モデルが $t=1,2,\cdots,T$ 期を扱っているとする．t 期を固定して同時決定だけに着目すると，ラグ付内生変数をすべて外生扱いにしてよく，構造式・定義式をまとめて

$$\boldsymbol{x}=\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}_t) \tag{1}$$

$\boldsymbol{x}$ 内生変数 $\in R^m$, $\boldsymbol{y}_t$ 外生変数 $\in R^n$ と書ける．t 期に固定して議論を行なうので，以下では t を省くと，この解を $\boldsymbol{x}_0$ とする．実際上は，計算機の数値計算によって解を得るから，内生変数の初期値と計算法によって解が変りうるが，ここでは安定性を仮定しておく．安定性については後の章でまとめて扱うことにする．そこで計算から得られる $\boldsymbol{x}_0$ を唯一解としてよい．一般性を失うことなく経済モデル(1)は $\boldsymbol{x}$ に関する2回連続微分可能性を仮定してよい．

(1)式は若干の仮定をもとに誘導形 $\boldsymbol{x}_0=\boldsymbol{g}(\boldsymbol{y})$ と書ける(内生変数は外生変数によって決定される)．しかしこの形では同時決定のしくみは g の関数形に埋もれて出てこない．内生変数の相互依存という(1)のモデルの情報は失われてしまっている．

いっぽう，(1)式の各式は経済理論を反映するように作られている．たとえば「所得 Y が消費 C を決定する」という時，たとえば $C=\alpha+\beta Y$ を用い，等価な $Y=\frac{1}{\beta}C-\frac{\alpha}{\beta}$ を決して用いない．後者は消費が所得を決定する式と解釈される．つまり右辺・左辺は厳密に区分され，右辺が左辺を決定するメカニズムを想定している．

つまり，ある時，ある内生変数の組・実現値 $\boldsymbol{x}_1$ と，外生変数の実現値 $\boldsymbol{y}_1$ があると，$\boldsymbol{x}_2=\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}_1,\boldsymbol{y}_1)$ に内生変数が変化するような動学的な力が働き，ついで，$\boldsymbol{x}_3=\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}_2,\boldsymbol{y}_1)$ なるように動き……しかして $\boldsymbol{x}_0=\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}_0,\boldsymbol{y}_1)$ なる $\boldsymbol{x}_0$ に均衡してその値が観測されるはずだ，という経済メカニズムを(1)式が表現していると考えられる．

一般にモデル内の内生変数の単位はまちまちであり，数値オーダーにいちじるしい差がある．そこで「基準化されたモデル」に変換する．

$$\boldsymbol{x}_0=\begin{pmatrix} x_1{}^0 \\ \vdots \\ x_m{}^0 \end{pmatrix} \qquad p=\begin{pmatrix} x_1{}^0 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & x_m{}^0 \end{pmatrix}$$

きたむら ひろし 日本アイ・ビー・エム株式会社
サイエンス・インスティテュート

$$\boldsymbol{x}=\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_m \end{pmatrix} \qquad x_i=x_i{}^0 r_i \quad \boldsymbol{r}=\begin{pmatrix} r_1 \\ \vdots \\ r_m \end{pmatrix}$$

として(1)式は

$$\boldsymbol{pr}=\boldsymbol{f}(\boldsymbol{pr},\boldsymbol{y}) \tag{2}$$

この解を $\boldsymbol{r}_0$ とすると当然 $\boldsymbol{r}_0=\begin{pmatrix} 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}$ であるが，右辺をTaylor 展開して1次近似をとると

$$\boldsymbol{f}(\boldsymbol{pr},\boldsymbol{y}) \fallingdotseq f(\boldsymbol{pr}_0,\boldsymbol{y})+\left(\frac{\partial \boldsymbol{f}}{\partial \boldsymbol{x}}\right)_{x=pr_0}\left(\frac{\partial \boldsymbol{x}}{\partial \boldsymbol{r}}\right)(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}_0)$$

$$=\boldsymbol{pr}_0+\left(\frac{\partial \boldsymbol{f}}{\partial \boldsymbol{x}}\right)_{x=x_0} P\cdot(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}_0)$$

よって $x_i{}^0 \neq 0(i=1\sim m)$ として

$$\boldsymbol{r} \fallingdotseq \boldsymbol{r}_0+P^{-1}\left(\frac{\partial \boldsymbol{f}}{\partial \boldsymbol{x}}\right)_{x=x_0} P(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}_0)$$

$B=p^{-1}\left(\frac{\partial \boldsymbol{f}}{\partial \boldsymbol{x}}\right)_{x=x_0} P$ とおいて

$$\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}_0 \fallingdotseq B(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}_0) \tag{3}$$

これは，変数の数値をそろえて基準化し，解の近くで，その期について，近似した線形モデルである．(3)の解は当然 $\boldsymbol{r}=\boldsymbol{r}_0$ であるが，実は(3)式は，経済モデルの特徴「右辺が左辺を決定するメカニズム」を保存している．ここにヒントがあり，(3)を $\boldsymbol{r}$ を内生変数とする経済モデルとみて，外界から Δ のショックがかかったとする．これによって受ける内生変数の解のシフトを考える．

$$\boldsymbol{r}'-\boldsymbol{r}_0=B(\boldsymbol{r}'-\boldsymbol{r}_0)+\Delta$$

$$\boldsymbol{r}'-\boldsymbol{r}_0=(I-B)^{-1}\Delta=(I+B+B^2+B^3+\cdots)\Delta$$

$$=\Delta+(B+B^2+B^3+\cdots)\Delta$$

$$=\Delta+B(I-B)^{-1}\Delta$$

もともとのショックが Δ であったからそれを除いた $B(I-B)^{-1}\Delta$ が内生変数相互作用による同時決定効果と考えられる．

（モデル評価の尺度）

t 期の推計値 $\boldsymbol{x}_t{}^0=\begin{pmatrix} x_{1t}{}^0 \\ \vdots \\ x_{mt}{}^0 \end{pmatrix} \quad P_t=\begin{pmatrix} x_{1t}{}^0 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & x_{mt}{}^0 \end{pmatrix}$

$B_t=P_t{}^{-1}\left(\frac{\partial \boldsymbol{f}}{\partial \boldsymbol{x}}\right)_{x=x_t{}^0} P_t, \quad C_t=B_t(I-B_t)^{-1}$

とおくと，C_t が t 期の内生変数相互間の均衡値 $\boldsymbol{x}_t{}^0$ 近くでの弾性値行列となる．

この $C_t=B_t(I-B_t)^{-1}$ は，原データのもつ単位のまちまちさと，推計方程式のまちまちさをすべて吸収したものになっている．

この表1は，x_j が均衡解 $x_{jt}{}^0$ から1％増えると，均衡解 $x_{it}{}^0$ は $C_{ij}{}^t$ ％増えるような力を受けると読める．この $C_{ij}{}^t$ が符号も込みで大きさが，経済理論，常識にかなっているかを検査することによりモデルが正しく作られているかの検証となる．さらに $C_{ij}{}^t$ を各 t 期ごとに調べることによりモデルの決定関係がどう変化しているかが読める．これも重要な点である．

表 1

		x_1	$x_2 \cdots\cdots$	$x_j \cdots\cdots$	x_m
1番目の内生変数	x_1	$C_{11}{}^t$	$C_{12}{}^t$	$C_{1j}{}^t$	$C_{1m}{}^t$
2番目の内生変数	x_2	$C_{21}{}^t$	$C_{22}{}^t$	$C_{2j}{}^t$	$C_{2m}{}^t$
⋮	x_i	$C_{i1}{}^t$	$C_{i2}{}^t$	$C_{ij}{}^t$	$C_{im}{}^t$
m番目の内生変数	x_m	$C_{m1}{}^t$	$C_{m2}{}^t$	$C_{mj}{}^t$	$C_{mm}{}^t$

くわしくは後の章で述べるが，ここでTaiwan Modelでの例を1つだけ記しておく．

$$\mathrm{GNP}=\mathrm{GDP}+\frac{\mathrm{FiFAV}}{\left(\frac{\mathrm{PGDPi}}{100}\right)} \tag{4}$$

なる定義式でGNPが記述されている．しかしGDP, FiFAV, PGDPiの構造式・定義式を媒介として，次々と他の内生変数と関連し合っている．このモデルではGNPは23番目の内生変数であり，$C_{23*}{}^t$ を $t=1973\sim1976$ で示すと表2になる．

表 2

	GDP	C	X	M	I	PCi	GDPV…
1973	1.18	0.60	0.51	−0.46	0.31	−0.31	0.28 …
1974	1.18	0.64	0.49	−0.51	0.31	−0.32	0.28 …
1975	1.18	0.68	0.51	−0.55	0.35	−0.30	0.28 …
1976	1.17	0.60	0.55	−0.49	0.34	−0.29	0.27 …

消費Cが1％増えるとGNPは約0.6％増加し，輸入Mが1％増えると，このモデルでは，GNPは約0.5％減少する．このことは(4)からだけでは出てこず，モデル全体からはじめて出てくることであり，その意味で同時決定効果と呼べよう．この数値はタイワン経済で妥当と考えられることから，このモデルが正しく作られていることの検証にもなっている．

3. モデルの同時決定機構の分析

よく知られているように，モデルは3つの部分に分けられる．

前部順次決定部分　　Group 1
⇩
同時決定部分　　Group 2
⇩
後部順次決定部分　　Group 3

これを分けるのは，$A=\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)$ 行列を横にみてすべて0の行があれば，それに対応した変数を Group 1 に入れる．次にそれに対応した，たての列を除外して考え，横にみてすべて0の行があれば，それに対応した変数をGroup 1 に入れる．これをくりかえす．

また，A行列をたてにみて，すべて0の列があればそれに対応する変数を Group 3 の後に入れる．それを除

外した部分で同じ議論をくりかえす．このならべかえに対応する回転行列をQとすると，明らかに

$$Q^{-1}AQ=\begin{pmatrix} A_1 & 0 & 0 \\ * & A_2 & 0 \\ * & * & A_3 \end{pmatrix}$$

$$A_1=\begin{pmatrix} 0 & & 0 \\ & \ddots & \\ * & & 0 \end{pmatrix} \qquad A_3=\begin{pmatrix} 0 & & 0 \\ & \ddots & \\ * & & 0 \end{pmatrix}$$

ここでA_1, A_3は巾零行列であり，$Q^{-1}AQ$の固有値，したがってAの固有値で0でないものは，容易に証明できるようにすべてA_2の固有値である．

次に同時決定の関与度を評価することを考える．前章の弾性値行列を Group 2 の同時決定内生変数で制限した部分行列を考える．

Qは回転行列より

$$Q^{-1}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)Q=\begin{pmatrix} A_1 & 0 & 0 \\ & A_2 & 0 \\ * & & A_3 \end{pmatrix} \text{ なら } P_t=\begin{pmatrix} x_{1t}{}^0 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & x_{mt}{}^0 \end{pmatrix}$$

で $B_t'=Q^{-1}P_t{}^{-1}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)P_tQ=\begin{pmatrix} A_1' & & 0 \\ & A_2' & \\ * & & A_3' \end{pmatrix}$

A_1', A_3' 巾零

$$C_t'=Q^{-1}C_tQ=B_t'(I-B_t')^{-1}=B_t'+B_t'^2+\cdots$$

$$=\begin{pmatrix} \bar{A}_1' & & 0 \\ & \bar{A}_2' & \\ * & & \bar{A}_3' \end{pmatrix} \qquad \begin{array}{l} \bar{A}_1', \bar{A}_3' \text{ 巾零} \\ \bar{A}_2'=A_2'(I-A_2')^{-1} \end{array}$$

そこで“基準化され”“ならべなおされた”モデルの真の同時決定部分の弾性値行列を，$C_t{}^{NUC}=\bar{A}_2'$と書くと，$C_t{}^{NUC}$がt期の均衡を記述していることになる．以下これを考える．

横の行がみずからはどれだけ他から影響されるかであり，たての列がその変数が他に与える影響の強さを示す．そこでこの絶対値のたて計と横計をかけ合せたものは，その変数の同時決定関与指標としてもよさそうである．これは基準化の不安定性をやや薄めたものとなる．Taiwan Model では Group 1 1変数，Group 2 26変

表 3 Group 2 間の決定関与指標 $\left(\sum_{k=1}^{m'}|C_{ik}|\right)\left(\sum_{k=1}^{m'}|C_{ki}|\right)$

1973		1974		1975		1976	
GDP	118.8	GDP	103.2	GDP	296.2	GDP	595.9
GDPV	107.2	GDPV	94.9	I	180.4	I	365.8
YGHV	93.7	YGHV	82.4	YGHV	171.3	C	343.2
YWCPV	89.6	YWCPV	79.3	GDPV	170.6	YDHV	323.3
I	73.0	I	63.0	C	169.1	YGHV	319.0
YDHV	72.6	C	62.6	YDHV	159.9	GDPV	292.3
C	72.5	YDHV	61.0	YWCPV	157.6	YWCPV	286.4
M	44.3	M	38.3	M	107.7	M	218.1
IS	39.1	IS	34.7	IS	89.7	IS	177.9
J	34.1	J	29.5	J	82.8	J	167.8
IMFG	20.6	IMFG	18.3	IMFG	47.3	IMFG	93.8
PCI	14.3	PCI	11.2	IPC	26.5	PCI	53.3
TXNIDV	12.4	TXNIDV	11.1	PCI	26.5	IPC	52.5
IPC	11.5	IPC	10.2	GRV	23.5	G	47.1
GRV	11.3	GRV	10.0	G	22.8	GRV	46.5
PGDPI	10.1	G	8.4	TXNIDV	19.5	TXNIDV	32.8
G	9.7	PGDPI	7.4	PGDPI	6.5	PGI	9.1
PGI	2.6	TAXDHV	2.4	PGI	4.5	TAXDHV	7.7
TRHGV	2.4	TRHGV	2.2	TAXDHV	3.9	PGDPI	7.0
TAXDHV	2.4	PGI	2.1	TRHGV	3.9	TRHGV	6.6
KT	1.9	KT	1.4	TAXCOV	1.4	TAXCOV	2.4
TAXCOV	.9	LET	1.0	KT	1.2	KT	1.6
YGCPCV	.5	TAXCOV	.8	YGCPVC	.8	YGCPVC	1.5
LET	.4	YGCPCV	.5	LET	.5	LET	.8
AVWAGE	.3	AVWAGE	.3	AVWAGE	.3	AVWAGE	.3
DEP	.0	DEP	.0	DEP	.0	DEP	.0

表 4　J除外の決定関与指標

1973		1974		1975		1976	
GDPV	92.4	GDPV	87.6	GDP	88.5	GDPV	84.4
GDP	84.8	GDP	86.1	GDPV	87.7	GDP	81.2
YGHV	76.4	YGHV	74.2	YGHV	72.8	YGHV	69.9
YWCPV	74.4	YWCPV	72.0	YWCPV	71.1	YMCPV	68.2
YDHV	53.8	C	53.3	I	55.4	I	51.5
I	52.7	I	53.2	C	52.1	YDHV	48.8
C	52.7	YDHV	52.3	YDHV	51.6	C	48.5
M	32.1	M	32.3	M	33.1	M	30.8
IS	29.3	IS	29.9	IS	30.1	IS	28.1
J	24.7	J	24.9	J	25.5	J	23.7
IMFG	15.4	IMFG	15.7	IMFG	15.9	IMFG	14.8
TXNIDV	10.7	TXNIDV	10.3	TXNIDV	10.3	TXNIDV	9.7
PCI	10.6	PCI	9.6	IPC	8.9	IPC	8.3
PGDPI	9.9	IPC	8.8	PCI	8.5	GRV	8.1
GRV	8.7	GRV	8.8	GRV	8.4	PCI	8.1
IPC	8.6	PGDPI	7.2	G	7.0	PGDPI	6.7
G	7.1	G	7.2	PGDPI	6.3	G	6.7
TRHGV	2.1	TAXDHV	2.2	TAXDHV	2.1	TAXDHV	2.3
TAXDHV	2.1	TRHGV	2.1	TRHGV	2.1	TRHGV	2.0
PGI	2.0	PGI	1.8	PGI	1.6	PGI	1.6
KT	1.9	KT	1.4	KT	1.2	KT	1.5
TAXCOV	.8	LET	.9	TAXCOV	.7	TAXCOV	.7
YGCPCV	.4	TAXCOV	.7	YGCPCV	.4	YGCPVC	.4
LET	.3	YGCPCV	.5	LET	.2	AVWAGE	.2
AVWAGE	.3	AVWAGE	.3	AVWAGE	.2	LET	.2
DEP	.0	DEP	.0	DEP	.0	DEP	.0

数，Group 3　17変数となっている．

表3では1975年，1976年で指標値，順位の変化がみられるが，これはJの推計値の数値オーダーが変化し，基準化の影響が強く出すぎたためである．Jは在庫投資，つまり在庫量の変動分であり，年度による変動が激しい．

J.	1973	1974	1975	1976
	17101	37400	2664	1257

このため $P_t^{-1}\left(\dfrac{\partial f}{\partial x}\right)_{x=x_0{}^t}P_t$ の計算上，Jに対応するところは，1973年は $\dfrac{*}{17101}$ or $*\cdot 17101$

1975年は $\dfrac{*}{2664}$ or $*\cdot 2664$

の変換を受け，そのバイアスが強く出ている．

Jを除外したモデルで同じ計算をすると，表4になり，指標値は安定し，モデルの相互依存への影響度を反映してくる．

実際のモデル分析を行なううえで，このような，他の変数ときわだって激しく変化する変数，典型的には“変化量”のような残差項目があると，それを除いて考える必要がある．

また収束計算を行なううえでも，相対誤差率を収束の判定基準にするかぎり，他の年度に対し不必要に，ある年度のみ収束計算をくりかえすことがおこりがちになる．その時，その“残差項”の推計値は小さな数値となり，他の重要変数への影響はほとんどないにもかかわらず，その小さい数値自体の収束解を得るために，いたずらに収束計算を行なう．しかも次章の誤差分析からわかるように，結局この小さい数値自体は計算誤差が大きすぎてそれ自体無意味なのである．

ここから符号変化するものを典型として，数値変動が他の系列に比して際立って大きい変数をモデルの同時決定部分(Group 2)に入れないようにすることは，モデルの運転性という実用面で大きな価値をもつことがわかる．

前表の決定関与指標をみると，TRHGV，以下の9本は，ほとんど同時決定に参加していない．ラグ付モデルであることを考えると，これらは Group 1 および Group 3 に重複して入れ，Group 2 からはずせる．

決定関与指標により，モデルの同時決定に真にきいている式と，そうでない式を分離できる．

行列の固有値で調べると，$A=\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)_{x=x_0{}^t}$

①44本の連立系

②最初に Group 2 に入った27本の連立系

③真の同時決定部分16本の連立系

で，いずれも固有値の絶対値で大の部分は保存されていた．(①，②はまったく同じ)

また最大絶対固有値はいずれも1より小で，安定条件を満たしている．Aの固有値をλとすると，$B(I-B)^{-1}$の固有値は $\frac{\lambda}{1-\lambda}$ である．

ここで $\left|\frac{\lambda}{1-\lambda}\right|$ は乗数効果であるが，これが最大になるのは，λが複素数のために，いちがいには決まらない．

（注） $|\lambda|\leq\rho(<1)$ は $\mu=\frac{\lambda}{1-\lambda}$ で $\left|\mu-\frac{\rho^2}{1-\rho^2}\right|\leq\frac{\rho}{1-\rho^2}$ に写像される．

この Taiwan Model の例では，λが0.8近くのものが乗数効果で3.8程度であり，それ以外は0.8以下である．この“拡大因子”と“縮小因子”の考えは，それぞれの固有 Vector に対応するが，動機的には魅力がある．つまり「計量モデルが相当長期間にわたる，対象地域で成立する安定した経済構造を抽出しようという努力の成果であるならば，作成者の意識を越えて，成功したモデル自体が，その安定性をもたらす力の“因子”を示唆するはずだ」

ここではこれ以上深入りしないことにする．

4. 推計計算の打ち切り誤差

大型モデルから出された計算値に対し，その“信頼区間”が表示されているのを筆者は見たことがない．現在の大型モデルの計算機プログラムは，ほとんどのケース反復法ないしその変形である Gauss-Siedel 法によっている．t期を固定して考えると前章と同じく

$$\boldsymbol{x}=\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}_t) \tag{1}$$

ここで$\boldsymbol{y}_t$も省略して，$\boldsymbol{x}=f(\boldsymbol{x})$ と書いてもまぎれはない．$\boldsymbol{x}$ の初期値 $\boldsymbol{x}_1$ に対し，$\boldsymbol{x}_2=f(\boldsymbol{x}_1)$, $\boldsymbol{x}_2$ に対し$\boldsymbol{f}$が計算可能なら $\boldsymbol{x}_3=\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}_2),\cdots$ とくりかえし，$\boldsymbol{x}_n=f(\boldsymbol{x}_{n-1})$ $n=2,3,\cdots$ が $\boldsymbol{x}_0$ にたまたま収束すれば，$\boldsymbol{x}_0=f(\boldsymbol{x}_0)$ で $\boldsymbol{x}_0$ は方程式(1)の解となる．これが反復法である．

Gauss-Siedel 法は $\boldsymbol{x}_1=\begin{pmatrix}x_1{}^{(1)}\\ \vdots\\ x_m{}^{(1)}\end{pmatrix}$ に対し $\boldsymbol{x}_2=\begin{pmatrix}x_1{}^{(2)}\\ \vdots\\ x_m{}^{(2)}\end{pmatrix}$

を，$x_1{}^{(2)}=f_1(x_1{}^{(1)},\cdots,x_m{}^{(1)})$

$$x_2{}^{(2)}=f_2(x_1{}^{(2)},x_2{}^{(1)},\cdots,x_m{}^{(1)})$$

$$\vdots$$

$$x_m{}^{(2)}=f_m(x_1{}^{(2)},x_2{}^{(2)},\cdots,x_{m-1}{}^{(2)},x_m{}^{(1)})$$

とし，得られたものから次々と計算に利用していく方式である．ここでfが線形であっても反復法と Gauss-Siedel 法は，一方が収束すれば他方が収束するという，収束性の同値を保障するものではない．係数行列$\left(\frac{\partial f}{\partial \boldsymbol{x}}\right)$が non-negative matrix ならばスタインローゼンバーグの定理にもあるように，両者は収束性に関し同値である．non-negative 条件がはずれると（実際のモデルでは常にはずれるが)，何も言えなくなる．

$$F_1(x)=f_1(x)$$

$$F_2(x)=f_2(F_1(x),x_2,\cdots,x_m)$$

$$\vdots$$

$$F_m(x)=f_m(F_1(x),F_2(x),\cdots,F_{m-1}(x),x_m)$$

とおくと，$F(x)=F_f(x)$ はxの関数であり，Gauss-Siedel 法は $F_f(x)$ に対し反復法を適用していることがわかる．そこでここでは反復法についてのみ見積り式を出せば十分であろう．

ここで前章でも述べたように内生変数の数値オーダーが大幅に異なるため，計算機プログラムでは通常収束判定基準Δを外から与え

$$\boldsymbol{x}_n=\begin{pmatrix}x_1{}^{(n)}\\ \vdots\\ x_m{}^{(n)}\end{pmatrix}\qquad\left|\frac{x_k{}^{(n)}-x_k{}^{(n-1)}}{x_k{}^{(n-1)}}\right|<\Delta$$

$$(k=1,2,\cdots,m) \tag{5}$$

すべてが成立したnのところで収束解に至ったとみなしている．この時，真の解$\boldsymbol{x}_0$と，この$\boldsymbol{x}_n$の差がどれだけあるかを見積るのが本章の目的である．

$\boldsymbol{y}_n=\boldsymbol{x}_n-\boldsymbol{x}_{n-1}$, $\Delta_n=\boldsymbol{x}_n-\boldsymbol{x}_0$ とおくと

$A=\left(\frac{\partial f}{\partial \boldsymbol{x}}\right)_{x=x_0}$ とおいて

$$\Delta_n=\boldsymbol{x}_n-\boldsymbol{x}_0=f(\boldsymbol{x}_{n-1})-\boldsymbol{x}_0=f(\boldsymbol{x}_0+\Delta_{n-1})-\boldsymbol{x}_0$$

Taylor 展開して

$$(\Delta_n)_k=(A\Delta_{n-1})_k+\frac{1}{2}\Delta_{n-1}{}'B_k(\boldsymbol{x}_0+\theta\Delta_{n-1})\Delta_{n-1}$$

$$0<\theta<1 \qquad (k=1,2,\cdots,m)$$

$$y_k{}^{(n)}=(\Delta_n)_k-(\Delta_{n-1})_k=(A\Delta_{n-1})_k+\frac{1}{2}\Delta_{n-1}{}'B_k\Delta_{n-1}$$

$$-(\Delta_{n-1})_k=((A-I)\Delta_{n-1})_k+\Theta_k(\|\Delta_{n-1}\|^2)$$

$$\boldsymbol{y}_n=(A-I)\Delta_{n-1}+\Theta(\|\Delta_{n-1}\|^2)$$

$$=(A-I)(\Delta_n-\boldsymbol{y}_n)+\Theta(\|\Delta_{n-1}\|^2)$$

$$\Delta_n=-A(I-A)^{-1}\boldsymbol{y}_n+(I-A)^{-1}\Theta(\|\Delta_{n-1}\|^2)$$

$P=\begin{pmatrix}x_1{}^{(n)} & & 0\\ & \ddots & \\ 0 & & x_m{}^{(n)}\end{pmatrix}$ とおいて2次項を無視して

$$\left|\frac{x_k{}^{(0)}-x_k{}^{(n)}}{x_k{}^{(n)}}\right|\sim|(P^{-1}A(I-A)^{-1}\boldsymbol{y}_n)_k|$$

$$\boldsymbol{y}_n=P\cdot\begin{pmatrix}\frac{x_1{}^{(n)}-x_1{}^{(n-1)}}{x_1{}^{(n)}}\\ \vdots\\ \frac{x_m{}^{(n)}-x_m{}^{(n-1)}}{x_m{}^{(n)}}\end{pmatrix}$$

$$\left|\frac{x_k{}^{(n)}-x_k{}^{(n-1)}}{x_k{}^{(n)}}\right|=\left|1-\frac{x_k{}^{(n-1)}}{x_k{}^{(n)}}\right|<\frac{\Delta}{1-\Delta}\text{（(5)より）}$$

結局，近似的に打ち切りの相対誤差率は

$\|A\|_1{}^k=\|(a_{ij})\|_1{}^k=\sum_{j=1}^{m}|a_{kj}|$

なる記号を使うと

$$\left|\frac{x_k{}^{(0)}-x_k{}^{(n)}}{x_k{}^{(n)}}\right|\leq\|P^{-1}A(I-A)^{-1}P\|_1{}^k\frac{\Delta}{1-\Delta}$$
$$=\|P^{-1}AP(I-P^{-1}AP)^{-1}\|_1{}^k\frac{\Delta}{1-\Delta}$$

$P^{-1}AP=B$ とおくと

$$\left|\frac{x_k{}^{(0)}-x_k{}^{(n)}}{x_k{}^{(n)}}\right|\leq\|B(I-B)^{-1}\|_1{}^k\frac{\Delta}{1-\Delta}$$

例をあげると，タイワンモデルでは $\Delta=0.001$，GNPの打ち切り係数は

1973	1974	1975	1976	1977	1978	1979	1980
5.2	5.3	5.3	5.1	5.2	5.1	5.1	5.2

であるので，GNPの打切り誤差は最大±0.53%以内といえる．

しかしＪについては

1973	1974	1975	1976	1977	1978	1979	1980
39.6	18.0	246.3	629.5	37.1	55.6	23.2	45.3

たとえば1976年推計値では63%もの打ち切り誤差があり得るということであり，Ｊの推計値は精度がないことを示している．

ここでも，数値変動の大きい変数をモデルの中核部分に入れないことの重要性が出ている．

5. 計量モデルの安定条件

Samuelson 氏は連立系の局所的安定条件について以下のように記述している．f は C^∞ 級とする．

(A) 微分方程式系

$\frac{dx}{dt}=f(x)$，$f(0)=0$ のとき，解 $x=0$ は $\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)_{x=0}$ の固有値の real part がすべて負ならば安定であり，１つでも正になれば不安定である．

(B) 定差方程式

$x_{n+1}=f(x_n)$，$f(0)=0$

のとき解０は $\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)_{x=0}$ の固有値 λ が，すべて $|\lambda|<1$ のとき安定し，１つでも $|\lambda|>1$ のものがあれば不安定である．

(A)は Sirgent 教授等も用いているが，これは他分野では Lyapunof の定理として知られるものである．(A)は，$\varepsilon=+0$ として，

$\frac{dx}{dt}=\frac{x_{n+1}-x_n}{\varepsilon}$ とおくと

$x_{n+1}=x_n+\varepsilon f(x_n)$ と変形できる．

$\frac{\partial}{\partial x}(x+\varepsilon f(x))_{x=0}=I+\varepsilon\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)_{x=0}$

$|I+\varepsilon A$ の固有値$|<1\Leftrightarrow A$ の固有値の real part<0

$|I+\varepsilon A$ の固有値$|>1\Leftrightarrow A$ の固有値の real part>0

を考えると，荒っぽく言って(A)，(B)は同値である．それでは，計量モデル

(C) $x=f(x, y_t)$ (1)

の安定性はどう評価できるのであろうか．(1)は連立方程式であり“安定性”という概念は，それ自体にはあり得ないのは明らかである．f の C^2 級の仮定で十分のように見える．しかし(1)式を均衡体系の記述系と“解釈”すると安定性という概念が出てくる．

動学安定の定差方程式の結果(B)がここで使えるのは明らかである．

局所的にみて，計量モデル $x=f(x, y)$ の解 $x_0{}^t$ での安定性は $\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)_{x=x_0{}^t}$ の固有値絶対値がすべて１より小のとき成立，１つでも１より大なら不安定

さらに，外生変数 y_t が変化したときも安定性が保障されるか，という問題に対しては，局所的に保障される．[5]

最後にタイワンモデルで，行列固有値の絶対値（スペクトル・ラディアス）はすべて0.965～0.960であり，１より小，つまり安定条件を各年度とも満たしている．

謝辞：本論文作成については，各種助言と示唆をいただいた，アジア経済研究所統計部の諸氏，特にモデルの提供をいただいた坂井秀吉氏に感謝いたします．

参 考 文 献

[1] Samuelson : Foundation of Econometric Analysis, The President and Fellows of Harvard College

[2] Kuh, Edwin and John Neese : Econometric Model Diagnostics

[3] Varga : Matrix Iterative Analysis, Prentice Hall

[4] Stern : Theory of Nonlinear Networks and Systems An Introduction, Addison Wesley

[5] 北村 博「行列のスペクトルノルムと反復計算法」(copy) 日本 IBM・SI

[6] Institute of Developing Economies : Preliminary Results of Econometric Models in the ELSA Project, アジア経済研究所