経営科学への応用

鍋島 一郎・丸山 茂子

1. はしがき

経営科学，せまい意味でOR，での手法には種々あるが，多段決定過程として問題を把握し，それを定式化し解を見いだす一般的手法がDPである．

周知のように，DPは1950年代の初期にベルマン(Bellman)によって開発され，その理論的側面［2］［3］や応用計算面［4］の基礎が確立され，以来多くの人々が発展させ，特にコンピュータの進歩発達とともに応用領域も拡大されている．なお，ベルマンの1975年までの生活や研究活動については，彼の自伝［5］に詳しい．

経営科学におけるDPの重要性は，以下の事項などによることが大きい．

1) n 変数最適問題を n 段決定過程として，n 個の類似の1変数最適問題の系列に分解して解くこと．原問題を類似の k 段決定過程($k=1\sim n$)の族に埋め込むので，感度分析などにも有効なこと．

2) 各段で類似の計算をくりかえすので，コンピュータ向きの算法であること．

3) 目的関数に特に制約がないこと．

4) 特に，確率的や適応的な多段決定に有効であるが，非直列［9］やファジィ構造［7］もとり扱えること．

5)「次元のたたり」［2］と呼ばれるように，状態変数が多くなる場合や，多次元資源配分問題や組合せ的最適問題(特にNP完全問題)などでは計算上の負担(記憶容量や計算時間の増加)がおこるが，これを避けるための種々の方策：下界(上界)戦略の併用，リーチング計算，近似法，分解法，近傍探索など，が工夫されていること．[19]

DPでは，各段で状態，決定，値(利得，費用)の集合を考え，最適性原理の数学的表現であるくり返し関数方程式を解くが，状態と決定の集合が有限の場合，状態を頂点にもつ有向ネットワーク上での最適経路問題と考えることができる．

DPは，経営科学のみならず，現代最適制御，パターン認識，マルコフ決定過程や森林・水資源計画等にも応用されているが，経営科学関係では，長期計画，生産計画，在庫管理，最適経路問題，機械スケジューリング問題などや輸送，配分，設備取替，信頼性の問題等に応用されている．

紙面の都合上，以下，ベルマンが1950年代初期に非常に興味をもち［5］，数学の基本的問題の1つであると認識し，制御理論や人工知能理論の基礎である［8］［6］と考えた最適経路問題と，病院での患者やコンピュータ装置の運用等のスケジューリングへの応用を考え，彼自身が設定した機械スケジューリング問題，および，DPの開発初期以来特に応用された在庫管理について，DPとの関連やDP算法の効率化などを簡単に説明する．

なべしま いちろう，まるやま しげこ 電気通信大学 経営工学科

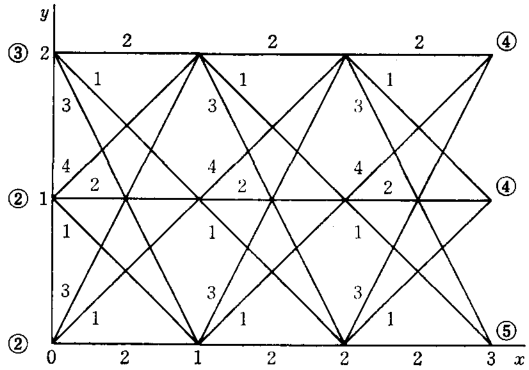

図 2.1

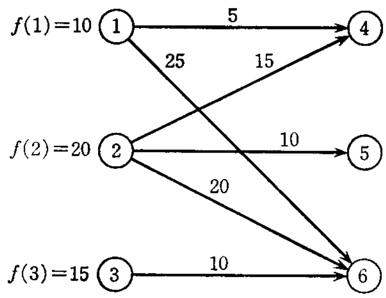

図 2.2

2. スケジューリング問題

2.1 最適経路問題とDP算法の効率化

2.1.1 最適進路問題［12］

たとえば，図2.1において，すべての弧は右方，右上，または右下に向いている．また，弧の費用は段不変で弧の両端にのみ依存し段 ($x=0,1,2,3,\cdots,N$) に依存しない．図2.1は3段である．円内は初期費用と最終費用である．問題は，ある初期点 y_1 よりある最終点 y_2 に至る最小費用の経路を求めることである．($y_1, y_2=0,1,2$)

$S(y_1,y_2,k)=y=y_1$ と $y=y_2$ を結ぶk段の最小費用経路の費用，ただし，端点費用を除く，

とおくと，$N=m+n$ 段問題に対し**折り曲げ手順** (doubling−up procedure)により，関数方程式は

$$(1)\quad S(y_1,y_2,m+n)=\min_{y=0,1,2}[S(y_1,y,m)+S(y,y_2,n)],$$

$$S(y_1,y_2,1)=c_{y_1y_2}=\text{弧}(y_1,y_2)\text{の費用},$$

となり，端点費用を，$x=0$ に対し $t_0(y)$, $x=m+n$ に対し $t_{m+n}(y)$ とおくと，求める最小費用は，

$$\min_{\substack{y_1=0,1,2\\ y_2=0,1,2}}[t_0(y_1)+S(y_1,y_2,m+n)+t_{m+n}(y_2)]$$

で与えられる．図2.1では $y_1=1, y_2=0; y_1=2, y_2=1$ で10．

折り曲げ手順で計算回数は少なくなるが，所与のNに対し，(1)でのくりかえし計算回数を最小ならしめる手順を見いだすことが問題として残る．

2.1.2 最短経路問題［12］［17］［6］

最長経路問題(PERTのクリティカル・パス，順列フロー・ショップでの総所要時間のクリティカル・パス表示)，ナップザック問題，信頼性経路，巡回販売人問題等，現問題の形に定式化できる問題が多く，この問題は経営科学での基本的問題である．

(a) ベルマン方程式

負の長さのサイクルのない一般ネットワークが n 個の頂点 $1,2,\cdots,n$ をもち，弧(i,j) の長さを d_{ij} とおくとき，f_i を頂点1から頂点 i への最短経路の長さ，とおくと，関数方程式は

$$(2)\quad f_i=\min_{k\neq i}[f_k+d_{ki}]\,(i=2\sim n),\quad f_1=0$$

となる．両辺に未知関数を含むので一般に直接的くりかえしでは解けない．各 f_i の上界列と下界列が求められ，これらは f_i に収束し解の存在と一意性が証明される．上界列(下界列)の収束による逐次近似法によって(2)が $O(n^3)$ オペレイションで解かれる．［6］

特に，サイクルのないネットワークに対しては，各弧(i,j)に対し $i<j$ なるように頂点番号がつけられるので，(2)の右辺が $\min\limits_{k<i}$ となり $O(n^2)$ のオペレイションで解かれる．

(b) ダイクストラ算法など

弧の長さが非負のネットワークに対し有効 ($O(n^2)$オペレイション) なダイクストラ (Dijkstra)算法がある．

一般に，通常のDPのくりかえし計算はプリング(pulling)で，この算法は計算順を変えてリーチング (reaching) を用いる．これらの手法の差

異は，たとえば図2.2［19］での関数値fはn段の各状態$\{1,2,3\}$に対して計算され，弧は可能な推移を示し，弧上の数値はその費用とする．通常のプリング計算では，$f(4)=\min[f(1)+5, f(2)+15]=15, f(5)=f(2)+10=30, f(6)=\min[f(1)+25, f(2)+20, f(3)+10]=25$．リーチング計算では，$n$段の各状態から到達される$n+1$段のすべての状態に対して，逐次一時ラベル(関数値$v$)を計算し改良する：$v(4)=f(1)+5=15$, $v(6)=f(1)+25=35$; $v(4)=f(2)+15=35$. $(v(4)=15)$, $v(5)=f(2)+10=30$, $v(6)=f(2)+20=40(v(6)=35)$; $v(6)=f(3)+10=25(v(6)=25)$．よって$f(4)=v(4)=15$, $f(5)=v(5)=30$, $f(6)=v(6)=25$を得る．特に，下界戦略の併用で，$f(2)=20+$(以後の下界)$\geqq$(最適値の上界)，となりn段で状態2が**終端された**(fathomed)場合には，プリングでは$f(4)$, $f(5)$, $f(6)$の計算で$f(2)$を考えるが，リーチングでは状態2から到達される状態は考える必要がないので計算量が減少する．

なお，リーチングを加速した計算手順もある［10］［11］．ダイクストラ算法(各頂点に一時ラベル(最短距離の上界)か永久ラベル(最短距離)かを与え，リーチングで全頂点が永久ラベルで終了)のDP定式化［12］は，まず，$N_i(1)$=頂点1への最短距離で，i個の最も1に近い頂点の集合，とし，$N_1(1)=\{1\}, N_i(1)=N_{i-1}(1)\cup\{k_i\}(i=2\sim n)$，ここに$k_i$は$f_1(j)=d_{1j}$(存在しないとき$+\infty$)，$f_{i-1}(k_i)=\min\limits_{j\notin N_{i-1}(1)} f_{i-1}(j)$で，$f_i(j)$は，頂点1より$N_i(1)$内の頂点を通り頂点$j$に至る最短経路の長さを示し，関数方程式

$$f_i(j)\begin{cases} f_{i-1}(j), & j\in N_i(1) \\ \min[f_{i-1}(j), f_{i-1}(k_i)+d_{k_i,j}], & j\notin N_i=(1) \end{cases}$$

$$i=2\sim n$$

で定まる．$f_i(k_i), i=1,2,\cdots,n$, が求める最短距離である．この算法のオペレイション数は約$3n^2/2$である．

イエン(Yen)は$n(n-1)$のより有効な算法を与えている．なお，すべての頂点対$\{k,j\}$に対し，kからjへの最短経路を求めるDP算法がフロイド(Floyd)により与えられている．オペレーション数は$2n(n-1)^2$である．

2.2 機械スケジューリング問題

DPが応用されたスケジューリング問題は種々あるが，2機械フローショップ総所要時間最小問題のジョンソン基準のDPによる導出とその拡張，2仕事ジョブ・ショップ総所要時間最小問題の図式解法での最短経路問題のDP解法，その他は文献［6］［20］に詳しいが，以下，単一機械でのDP算法効率化を記す．

2.2.1 NP完全単一機械問題

(a) 全費用最小問題

ヘルドとカルプ(Held & Karp)［13］は，全費用最小問題をDPで定式化している．各仕事$i(i=1\sim n)$の加工時間p_iと完了時刻tの費用関数$c_i(t)$が所与のとき，Sを$\{1,2,\cdots,n\}$の空でない部分集合，$C(S)$をSの仕事全体に対する最小全費用とおくと

$$C(S)=\min_{k\in S}[C(S-k)+c_k(\sum_{j\in S}p_j)],\ C(\phi)=0$$

もし，$C(S,k)$をkを最終仕事にもつSに対する最小全費用とおくと，上式は，次の関数方程式と同等である．［22］：

$$C(S,k)=\min_{m\in S-k}[C(S-k,m)+c_k(\sum_{j\in S}p_j)],$$

$$C(S)=\min_{k\in S}C(S,k).$$

$$C(\phi,k)=0, k=1,2,\cdots,n.$$

さらに，列の最初の仕事iに対して段取費用a_{0i}, 各順序対(i,j)に対して転換費用a_{ij}を考えれば

$$C(\{k\},k)=a_{0k}+c_k(p_k),\quad S=\{k\}$$

$$C(S,k)=\min_{m\in S-k}[C(S-k,m)+c_k(T(S-k)+p_k)+a_{mk}], |S|>1.$$

ここに，$T(S-k)=\sum\limits_{j\in S-k}p_j. C(S)\min\limits_{k\in S}C(S,k)$，となる．

オペレイション数は$O(n2^n)$で指数的である．

(b) 先行制約のもとでの全費用最小問題とDP算法の効率化［1］［21］［18］

(a)の問題にさらに先行制約が加われば計算の複

雑性は減少する．Sが実行可能とは，$j \in S$ ならばjに先行する仕事もSに含まれる場合と定めれば，オペレーション数は $O(Kn)$ 以下となる．Kは実行可能集合の数であり 2^n よりずっと小さい．しかし，計算の複雑性を減少するうえで問題となるのは，K個の実行可能集合の有効な生成手順を見つけることと，各実行可能集合Sに対し実行可能部分集合 $S-k$ を探し出すための記憶場所を定めることである．ベイカーとシュレイジ (Baker & Schrage) は，Sに含まれる仕事のラベルの和に等しい指標をSに割当てるラベリング手順を与えているが，これらの指標が空白なしに整数0, 1, 2, …, $K-1$ への1対1の写像を与えるとは限らず，ラベリング手順は時間がかかる．いっぽう，ローラー (Lawler) はリーチングにもとづく有効な生成手順とともに，上記の問題のＤＰ計算が $O(Kn)$ 時間で $O(n+K_{\max})$ の記憶場所を必要とする簡単で有効な計算機実行手順を与えている．ここに，$K_{\max}=\max_m K_m$ で K_m は大きさ m の実行可能集合Sの個数である．

同様に，組立ライン・バランシグ問題のＤＰ関数方程式 [14] に対しても，有効なSの生成手順とラベリング法が考えられている．[15]

3. 在庫管理における情報と決定

3.1 はじめに

経営情報システムの発達にともなった，そのもっている基本的性格を日本の技術的風土に適応せしめることは考察を要する問題である．1つの重要な問題は経営情報システムの種類と精度とを決定することである．もし管理の各段階においてシステムの完全情報を望めば，若干の時間と費用を必要とする．いっぽう，もしすみやかに決定するために不完全情報を用いるならば，最適でないシステムを管理する確率が存在する．われわれは情報と決定の双方において完全な精度をもちえない．これはハイゼンベルグの不確定性原理に類似である．ここではこの立場から最適在庫過程の情報と決定とのあいだの関係を議論する．第2節で一般に調和の原理を導出する．第3節では最適在庫過程における情報と決定の関係にこの調和の原理を適用しよう．それから量における近似，時間における近似，需要の近似，基準の近似，システムの構造の近似を要約する．第4節では在庫システムの設備に言及する．

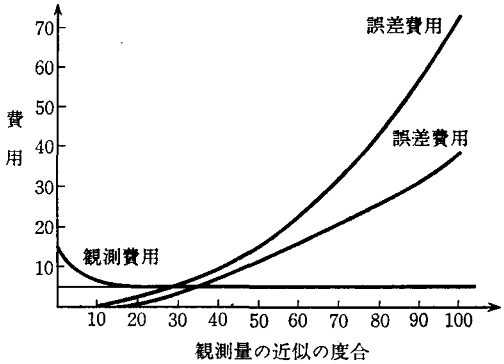

図 3.1

3.2 調和の原理

量子力学の確率的性格は不確定性原理に基礎を置いている．それは共軛量と呼ばれる対の量に対して，同時に同一の精度で測ることは理論的に不可能であるという調和の関係を示している．この物理学の原理に類似な現象は多くの分野に存在する．この調和の原理と経営情報システムにおける関係を議論しようというのである．

3.3 最適在庫過程における情報と決定

この節においては多段確率的在庫管理過程における情報と決定に関して調和の原理を適用しよう．多段確率的在庫過程に関する数学的模型に関しては[23]参照のこと．第1に，もし在庫量を正確に観測すれば，正しい決定と最適な期待費用が得られるが，観測費用を必要とする．これが量の近似である．第2に，各期において記録をとり，発注する代りに品物を急速に仕入れる特急費用を払ってすら，2，3期ごとに観測し発注することがよいかもしれぬ．これは時間の近似である．さらに需要に関する情報の近似の問題，最適にする基準の近似の問題，在庫システムの構成に関する近

表 1

K	1	10	20	30	40	50	60	70	80	90	100	
Sim.	108.5	102.4	96.9	91.9	86.1	80.8	77.3	77.1	72.3	67.6	68.2	I_1
	14.2	15.4	17.0	18.8	22.1	22.9	26.3	28.3	31.2	28.8	35.6	I_2
	99.7	88.0	90.1	91.1	93.1	95.5	95.8	95.9	97.9	100.6	96.0	I_3
	195.7	196.6	200.7	206.5	220.6	220.1	237.0	248.8	261.5	242.4	283.7	T
Ann.	0.0	0.5	2.1	4.9	9.0	14.8	22.2	31.5	42.7	56.3	72.3	$T-K(x)$
											198.5	$K(x)$

Sim.＝シミュレーション接近，Ann.＝解析的接近，$K(x)$＝正確解，T＝近似解

似の問題等が存在する．

3.3.1　観測の近似

観測費用と近似情報を用いて得られた利得とを調和する観測近似の度合いを決定しようとして，解析的数値的研究をともに用いて次の結果を得た[23]．これにより観測の費用と全期待費用とを調和する近似の度合いが決定される．

3.3.2　時間における近似

研究した問題は倉庫に残っている品物の数を数える時期を決定することである．解析的数値的研究の結果は表2で与えられる．期待どおり，信用損失費用と全期待費用とは増加する変数，すなわち観測時点間隔とともに増加する．そのとき近似の時間を用いて得られた観測費用と期待全費用とを調和する観測と管理の時点が決定できる[23]．

3.3.3　需要情報の近似

需要がある確率分布をもった独立な確率変数であると仮定する．需要の確率情報の完全性にしたがって，次の3つの場合に類別可能である．

1)　確率的問題；確率的性質が既知の場合

2)　アダプティブ問題；需要分布が未知のパラメータを含む場合

3)　ゲーム論的問題；確率的性質が未知の場合

表 2

Δ	2Δ	3Δ	4Δ	
107.1	140.3	171.1	203.2	I_1
14.1	12.9	13.3	22.82	I_2
101.0	106.7	102.7	99.4	I_3
193.7	219.8	252.9	342.0	T

期間がΔ，2Δ，3Δ，4Δとしたときの100週間のシミュレーションの全平均費用(T)の値

表3において，この三者の場合の解を比較している．当然，情報の完全性の減少にしたがって期待全費用は増加する[24]．

3.3.4　基準の近似

在庫システムの効率の基準を確立する問題は非常に基本的なことである．多段階問題，期間についての平均，確率基準等について議論しよう．

1)　多段階

一期間の最適政策は必ずしも多期間の最適政策とはならないが，ある条件のもとでは一致する．この問題は今後の研究課題である．

2)　期間についての平均

定常過程において(s, S)政策を特に選択し，この政策にもとづいた期待費用を計算し，これを最小にするように政策変数を選択する．この最小費

表 3

	$\mu=4$		$\mu=16$		$\mu=36$		$\mu=64$		$\mu=100$	
	Level	Total Cost	Level	Total Cost	Level	Total Cost	Level	Total Cost	Level	Total Cost
一般模型	7.0	6,307	31.0	23.57	70.0	53.1	499.0	195,922	499.0	166,935
適応模型	5.6	6,024	23.7	26.87	56.0	62.6	99.4	110.4	155.0	172.7
ゲーム模型	6.3	20.2	20.7	85.0	43.0	195.1	73.4	354.5	117.5	553,857

用をkで示す．いっぽう，DP接近において，割引率が1であれば，期間が無限大のとき，最小期待費用$f_n(x)$は無限大となる．$\lim_{n\to\infty}[f_n(x)/n]$と$k$とのあいだにある関係が存在することはエルゴード定理より当然であろう．

3） 確率基準

各期の在庫がある水準を越える確率を議論しよう．確率基準の利点は次のとおりである．第1に費用関数の推定を要しないので簡単である．第2に費用関数を考慮した政策に近似である[23]．

3.3.5 システムの構造の近似

多くの倉庫をもつ在庫システムを議論しよう．各個独立な在庫管理では各部門は分離的に発注し，それ自身の倉庫のみに関係している．集中在庫管理では反対に，発注量はネットワークのすべての部門に対して関連的になされる．集中的に在庫を管理するために利益と不利益とが存在する．

全供給ネットワークは中央部門で記録されるから，決定は効率的になされ，事故の場合に都合がよい．しかし決定は複雑となる．いかに多くの倉庫が集中管理するために最適であるか[25]．

3.4 在庫システムの設計

在庫管理に関して書かれた著書の大部分は，決定するために用いられる情報は得られていると仮定した．ここでは決定する方法を知っているという仮定のもとで，情報の種類と精度を見いださんとした．

この調査は在庫システムの設計と在庫政策の管理についての基礎を与えるであろう．

参考文献

[1] K. Baker and L. Schrage : Finding an Optimal Sequence by Dynamic Programming: An Extension to Precedence-Related Tasks, *Opns. Res.*, 26, 1(1978), 111-120

[2] R. Bellman : *Dynamic Programming*, Princeton Univ. Press, 1957. ダイナミック・プログラミング（小田中他訳）東京図書，1973

[3] R. Bellman : *Adaptive Control Process : A Guided Tour*, Princeton Univ. Press, 1961. 適応制御プロセス（渡辺茂訳）共立出版1966

[4] R. Bellman and S. Dreyfus : *Applied Dynamic Programming*, Princeton Univ. Press, 1962. 応用ダイナミック・プログラミング（小田中，有水共訳），日科技連，1962

[5] R. Bellman : *Eye of the Hurricane : An Autobiography*, World Scientific, 1984

[6] R. Bellman, A. O. Esogbue and I. Nabeshima : *Mathematical Aspects of Scheduling and Applications*, Pergamon Press, 1982

[7] R. Bellman and L. Zadeh : Decision Making in a Fuzzy Environment, *Manag. Sci.* 17, 4 (1970), B-141—B-164

[8] R. Bellman : *An Introduction to Artificial Intelligence : Can Computer think?*, Boyd and Fraser, 1978. 人工知能入門（小田中，石島共訳），日刊工業，1983

[9] U. Bertelé and F. Brioschi : *Nonserial Dynamic Programming*, Academic Press, 1972

[10] E. Denardo : *Dynamic Programming : Models and Applications*, Prentice-Hall, 1982

[11] E. Denardo and B. Fox : Shortest Route Methods : Reaching, Pruning, and Buckets, *Opns. Res.*, 27(1979), 161-186

[12] S. Dreyfus and A. Law : *The Art and Theory of Dynamic Programming*, Academic Press, 1977

[13] M. Held and R. Karp : A Dynamic Programming Approach to Sequencing Problems, *J. Soc. Indust. Appl. Math.*, 10(1962), 196-210

[14] M. Held, R. Karp and R. Shareshian : Assembly-Line Balancing—Dynamic Programming with Precedence Constraints, *Opns. Res.*, 11, 3(1963), 442-459

[15] E. Kao and M. Queyranne : On Dynamic Programming Methods for Assembly Line Balancing, *Opns. Res.*, 30, 2(1982), 375-390

[16] R. Larson : *State Increment Dynamic Programming*, Elsevier, 1968

[17] E. Lawler : *Combinatorial Optimization : Networks and Matroids*, Holt, Reinhart and Winston, 1976

[18] E. Lawler : Efficient Implementation of Dynamic Programming Algorithms of Se-

quencing Problems, *Report BW 106/79*, Stichting Mathematisch Centrum, 1979, 1-16
[19] T. Morin : Computational Advances in Dynamic Programming, *Dymamic Programing and Its Applications* (ed. M. L. Puterman), Academic Press, 1978, 53-90
[20] 鍋島一郎：動的計画法，森北出版，1968
[21] L. Schrage and K. Baker : Dymamic Programming Solution of Sequencing Problems with Precedence Constraints, *Opns. Res.*, 26, 3(1978), 444-449
[22] PWeeda : A Dynamic Programming Formulation for the One Machine Sequencing Problem. *Eur. J. Oper. Res.*, 2(1978), 298-300
[23] T. Odanaka : Information and Decision in Optimal Inventory Processes, *Proceeding of XXII TIMS*, (1975)
[24] T. Odanaka and S. Maruyama : Analytical and Computational Solution of Adaptive Inventory Processes, *Journal of Mathematical Analysis and Application*, (1985)
[25] Szendrovis, A.Z. : Comments on the Optimality in "Optimal and System Myopic Policies", *Management* Sci, Vol. 27, No. 9, (1981)

書評

三重野 重三著

新世代コンピュータグラフィックス

広済堂産報出版 146頁 1900円

コンピュータ技術における知的好奇心は最近では人工知能に移ってきたが，それ以前はパターン認識にあったのではなかろうか．私自身も昭和46年にむりやりに心電図の自動解析プロジェクトの一員(？)に入れられ，ローゼンフェルドの著作やゲシュタルト心理学を勉強した．しかし，それらの知識がいったいどのように現実適用されるのかわからず，プロジェクトには何の貢献もしないまま時を過ごした．

この本の主題は，"イマジネーションとパターン認識"にある．さらに著者の言を借りれば，次の4部より構成されている．

第1章　パターン認識と図形生成について，イラストや写真をまじえながら，身近な日常の例を具体的に示す．

第2章　パターン認識と図形生成の原理をやさしく解説している．

第3章・第4章　新しい認識・生成の方法として，位相幾何学的方法と逐次分割法を整理し，顔の表情認識・復顔の例などを紹介している．

第5章　視覚をもち，新世代の人工知能をそなえたロボットとその社会，通信ネットワークINSによる1990年代以降のビジョンを楽しく(?!)予想した．

以上のまえがきからの引用で大筋は把握できる．しかし，著者は自身の歩んでこられた研究を中心として，あたかも粋な技術エッセイを2人の子息と書きたかったのではないかと思われる．広範な技術がシャレたカルチャライズされた社会事象で味つけされている．平易な語り口のため，ややもすれば軽く読みとばしそうになるが，注意すれば含蓄に富んでいることがわかる．初心者よりも，木をみて森にまよい込んだ中堅技術者にとってオモシロイ本と思う．著者の意図はあくまで"新世代コンピュータグラフィックス"にあるのだろうが，私もいつか息子と2人でこのような本を書きたいという感情移入が入る楽しい本だと思う．三重野ファミリーに salute!

（住商コンピュータサービス㈱　新村秀一）