講 座

Karmarkarの新LP解法 (2)

刀根　薫

3. 諸 定 理

この節では基本問題の解法の有効性と収束性を示す．用いる記号をまとめて下に記す．

$\Omega=\{x \epsilon R^n \mid Ax=o\}$ （アフィン空間）

$S=\{x \epsilon R^n \mid x \geq o,\ \sum_{i=1}^{n} x_i=1\}$ （単体）

$D=\mathrm{diag}\ (a_1,\cdots,a_n)$ （$a_1,\cdots,a_n$ を対角成分とする対角行列）

$T: x'=\dfrac{D^{-1}x}{e^T D^{-1} x}$ （射影変換）

$T^{-1}: =\dfrac{D x'}{e^T D x'}$ （逆変換）

$\Omega'=\{x' \epsilon R^n \mid A D x'=o\}$ （変換されたアフィン空間）

$S'=\{x' \epsilon R^n \mid x' \geq o,\ \sum_{i=1}^{n} x_i'=1\}$ （単体）

$a_0=\left(\dfrac{1}{n},\cdots,\dfrac{1}{n}\right)$ （S' の重心）

$r=\sqrt{\dfrac{1}{n(n-1)}}$ （内接球の半径）

$R=\sqrt{\dfrac{n-1}{n}}$ （外接球の半径）

$B(a_0, \alpha r)$: 中心 a_0，半径 αr の球．$0<\alpha\leq 1$

$B(a_0, R)$: 中心 a_0，半径 R の球．

$\Omega''=\{y \epsilon R^n \mid By=\binom{o}{1}\}$ $(=\Omega' \cap S')$

ただし　$B=\begin{bmatrix} A\,D \\ 1\cdots 1 \end{bmatrix}$ である．

〔定理1〕 ステップ4で得られた b' は $c'^T x$ を $B(a_0, \alpha r)\cap\Omega''$ の上で最小化する．ここに $c'=Dc$ である．

（証明） $B(a_0, \alpha r)\cap\Omega''$ 上の任意の点を z とする．そのとき，$b', z \epsilon \Omega''$ であるから

$$B(b'-z)=o \Rightarrow B^T(BB^T)^{-1}B(b'-z)=o \Rightarrow$$
$$(c'-c_p)^T(b'-z)\,0 \Rightarrow c'^T(b'-z)=c_p^T(b'-z) \tag{3.1}$$

いっぽう

$$c_p^T(b'-z)=|c_p|\cdot\bar{c}^T\cdot[a_0-\alpha r\bar{c}-z]$$
$$=|c_p|\{\bar{c}^T(a_0-z)-\alpha r\} \tag{3.2}$$

ところが

$$\bar{c}^T(a_0-z)\leq|\bar{c}|\cdot|a_0-z|$$
$$\leq \alpha r \quad (\because z \epsilon B(a_0, \alpha r))$$

よって (3.2) より

$$c_p^T(b'-z)\leq 0$$

(3.1) より

$$c'^T(b'-z)\leq 0$$

したがって

$$c'^T b' \leq c'^T z$$

が成立する．

次にポテンシャル関数 $f(x)$ を次により定義する．

$$f(x)=\sum_{j=1}^{n}\ln\left(\frac{c^T x}{x_j}\right) \tag{3.3}$$

この関数は変換 T により次のように変形する．

$f(x)=f'(T(x))$ とすれば

$$f'(y)=\sum_{j=1}^{n}\ln\frac{c'^T y}{y_j}-\sum_{j=1}^{n}\ln a_j \tag{3.4}$$

x_j が有界であるので $f(x)$ が減少して $-\infty$ に向うことは $c^T x$ が減少して0に向うことを意味し，同様に $f'(y)$ の減少は $c'^T y$ の減少を意味することに注意する．

〔定理2〕 $B(a_0, \alpha r)\cap\Omega''$ の中に点 b' が存在して

(i)　$c'^T b'=0$ (3.5)

または

(ii)　$f'(b')\leq f'(a_0)-\delta$ (3.6)

を満たす．ここに δ は正の定数である．

（証明） Ω'' 上で $c'^T x$ を最小化する点を x^0 とする．

（ケース1） $x^0 \epsilon B(a_0, \alpha r)$ ならば，$b'=x^0$ とすれば，基本問題の仮定より(i)を満たすことがわかる．

（ケース2） $x^0 \notin B(a_0, \alpha r)$ のとき，線分 $\overline{a_0 x^0}$ が球 $B(a_0, \alpha r)$ と交わる点を b' とする（図3.1参照）．

とね　かおる　埼玉大学　政策科学研究科

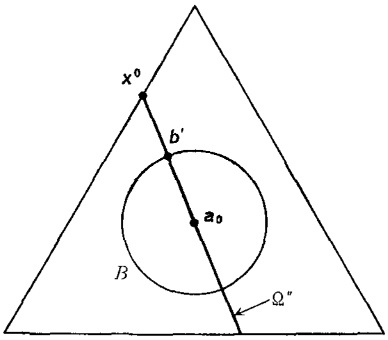

図 3.1

$$b'=(1-\lambda)\,a_0+\lambda\,x^0,\quad \lambda\epsilon\ (0,1)$$

と書き表わすことができ

$$b'\epsilon B\,(a_0,\alpha r)\cap\Omega''$$

である．また

$$\begin{aligned}c'^Tb'&=(1-\lambda)\,c'^Ta_0+\lambda\,c'^Tx^0\\&=(1-\lambda)\,c'^Ta_0\qquad(\because c'^Tx^0=0)\end{aligned}$$

よって

$$\frac{c'^Ta_0}{c'^Tb'}=\frac{1}{1-\lambda}$$

いっぽう

$$b_j'=(1-\lambda)\,a_{0j}+\lambda x_j{}^0$$

よって

$$\begin{aligned}f'(a_0)-f'(b')&=\sum_j\ln\frac{c'^Ta_0}{c'^Tb'}\cdot\frac{a_{0j}}{b_{0j}}\\&=\sum_j\ln\frac{(1-\lambda)a_{0j}+\lambda x_j{}^0}{(1-\lambda)a_{0j}}=\sum_j\ln\left\{1+\frac{\lambda}{1-\lambda}\ \frac{x_j{}^0}{a_{0j}}\right\}\end{aligned}$$

ここで次の不等式を用いる．

$$\begin{aligned}P_i\geq 0\Rightarrow&\prod_i(1+P_i)\geq 1+\sum_i P_i\\&\Rightarrow\sum_i\ln(1+P_i)\geq\ln(1+\sum_i P_i)\end{aligned}$$

よって

$$\begin{aligned}f'(a_0)-f'(b')&\geq\ln\left\{1+\frac{\lambda}{1-\lambda}\ \frac{1}{a_{0j}}\sum_j x_j{}^0\right\}\\&=\ln\left(1+\frac{n\lambda}{1-\lambda}\right)\end{aligned}$$

また

$$b'=(1-\lambda)\,a_0+\lambda x^0\Rightarrow\ b'-a_0=\lambda(x^0-a_0)$$

$$\Rightarrow\ \alpha r=|b'-a_0|=\lambda|x^0-a_0|\leq\lambda R$$

よって

$$\lambda\geq\alpha\cdot\frac{R}{r}=\frac{\alpha}{n-1}$$

$$1+\frac{\lambda n}{1-\lambda}\geq 1+\frac{\dfrac{n\alpha}{n-1}}{1-\dfrac{\alpha}{n-1}}=1+\frac{n\alpha}{n-1-\alpha}\geq 1+\alpha$$

したがって

$$f'(a_0)-f'(b')\geq\ln(1+\alpha)$$

が成立する．ここで

$$\delta=\ln(1+\alpha)$$

とおけば

$$f'(b')\leq f'(a_0)-\delta$$

が成立する．

〔定理 3〕 $B\,(a_0,\alpha r)\cap\Omega''$ 上で a'^Tx を最小化する点を b' とすれば

(i) $c'^Tb'=0$ (3.7)

または

(ii) $f'(b')\leq f'(a_0)-\delta$ (3.8)

を満足する．ここにはδ正定数で

$$\alpha=\frac{1}{4}\text{のとき}\quad\delta\geq 0.108\tag{3.9}$$

である．

定理 3 の証明のために補助定理を 2 つ用意する．

〔補助定理 3.1〕

$|x|\leq|\beta|<1$ ならば

$$|\ln(1+x)-x|\leq\frac{2(1-\beta)^2}{x^2}\tag{3.10}$$

が成立する．

（証明） $\ln(1+x)=x-\dfrac{1}{(1+\bar{x})^2}\cdot\dfrac{x^2}{2}$ （ここに $|\bar{x}|\leq|x|<\beta<1$）

よって

$$|\ln(1+x)-x|=\frac{x^2}{2}\cdot\frac{1}{(1+\bar{x})^2}\leq\frac{x^2}{2(1-\beta)^2}$$

〔補助定理 3.2〕

$\beta=\alpha\sqrt{\dfrac{n}{n-1}}$ とする．そのとき $x\epsilon B\,(a_0,\alpha r)$ ならば

$$\left|\sum_j\ln\frac{x_j}{a_{0j}}\right|\leq\frac{\beta^2}{2(1-\beta)^2}\tag{3.11}$$

が成立する．

（証明） $x\epsilon B\,(a_0,\alpha r)\Rightarrow\ |x-a_0|^2\leq\alpha^2r^2$

$$\Rightarrow\sum_j\left(\frac{x_j-a_{0j}}{a_{0j}}\right)^2\leq\frac{\alpha^2r^2}{\left(\dfrac{1}{n}\right)^2}=\frac{\alpha^2n^2}{n(n-1)}=\beta^2$$

$$\therefore\ \left|\frac{x_j-a_{0j}}{a_{0j}}\right|\leq\beta\qquad(j=1,\cdots,n)$$

$$\left|\ln\left(1+\frac{x_j-a_{0j}}{a_{0j}}\right)-\frac{x_j-a_{0j}}{a_{0j}}\right|\leq\frac{1}{2(1-\beta)^2}\left(\frac{x_j-a_{0j}}{a_{0j}}\right)^2$$

（補助定理 3.1より）

$$\begin{aligned}\therefore\ \left|\sum_j\ln\frac{x_j}{a_{0j}}-\sum_j\frac{x_j-a_{0j}}{a_{0j}}\right|&\leq\frac{1}{2(1-\beta)^2}\sum_j\left(\frac{x_j-a_{0j}}{a_{0j}}\right)^2\\&\leq\frac{\beta^2}{2(1-\beta)^2}\end{aligned}$$

ここに

$$\sum_j\frac{x_j-a_{0j}}{a_{0j}}=\frac{1}{n}\left(\sum_j x_j-\sum_j a_{0j}\right)=\frac{1}{n}(1-1)=0$$

であるから補助定理は成立する．

（定理 3 の証明）

$\bar{f}(\boldsymbol{x}) = n \ln \dfrac{\boldsymbol{c}'^T\boldsymbol{x}}{\boldsymbol{c}'^T\boldsymbol{a}_0}$ と定義する．

いま，$B(\boldsymbol{a}_0, \alpha r) \cap \Omega''$ 上の点で $f'(\boldsymbol{x})$ を最小化する点を $\boldsymbol{b}_m$ とする．$f'(\boldsymbol{a}_0)-f'(\boldsymbol{b}')$ を次のように変形する．

$$f'(\boldsymbol{a}_0)-f'(\boldsymbol{b}')=f'(\boldsymbol{a}_0)-f'(\boldsymbol{b}_m)+f'(\boldsymbol{b}_m)-f'(\boldsymbol{b}')$$
$$=[f'(\boldsymbol{a}_0)-f'(\boldsymbol{b}_m)]+[f'(\boldsymbol{b}_m)-(f'(\boldsymbol{a}_0)+\bar{f}(\boldsymbol{b}_m))]$$
$$-[f'(\boldsymbol{b}')-(f'(\boldsymbol{a}_0)+\bar{f}(\boldsymbol{b}'))]+[\bar{f}(\boldsymbol{b}_m)-\bar{f}(\boldsymbol{b}')]$$

もし $B(\boldsymbol{a}_0, \alpha r) \cap \Omega''$ 上での $\boldsymbol{c}'^T\boldsymbol{x}$ の最小値が 0 ならば定理は trivial に成立する．そうでなければ定理 2 より

$$f'(\boldsymbol{a}_0)-f'(\boldsymbol{b}_m) \geq \ln(1+\alpha) \tag{3.12}$$

が成立する．

$\boldsymbol{x} \in B(\boldsymbol{a}_0, \alpha r) \cap \Omega''$ に対して

$$f'(\boldsymbol{x})-(f'(\boldsymbol{a}_0)+\bar{f}(\boldsymbol{x}))=\sum_j \ln\frac{\boldsymbol{c}'^T\boldsymbol{x}}{x_j}-\sum_j \ln\frac{\boldsymbol{c}'^T\boldsymbol{a}_0}{a_{0j}}$$
$$-n\ln\frac{\boldsymbol{c}'^T\boldsymbol{x}}{\boldsymbol{c}'^T\boldsymbol{a}_0}=-\sum_j \ln\frac{x_j}{a_{0j}}$$

よって補助定理3.2より

$$|f'(\boldsymbol{x})-(f'(\boldsymbol{a}_0)+\bar{f}(\boldsymbol{x}))|=|\sum_j \ln\frac{x_j}{a_{0j}}|\leq\frac{\beta^2}{2(1-\beta)^2} \tag{3.13}$$

が成立する．

$\bar{f}(\boldsymbol{x})$ は $\boldsymbol{c}'^T\boldsymbol{x}$ と増減を共にするので，$\bar{f}(\boldsymbol{x})$ と $\boldsymbol{c}'^T\boldsymbol{x}$ は $B(\boldsymbol{a}_0, \alpha r) \cap \Omega''$ の上で同一の点すなわち $\boldsymbol{b}'$ で最小値をとる．

$$\therefore \bar{f}(\boldsymbol{b}_m) \geq \bar{f}(\boldsymbol{b}') \tag{3.14}$$

(3.12)，(3.13)，(3.14)より

$$f'(\boldsymbol{a}_0)-f'(\boldsymbol{b}') \geq \ln(1+\alpha)-\frac{\beta^2}{(1-\beta)^2}$$
$$\geq \alpha-\frac{\alpha^2}{2}-\frac{\alpha^2 n}{(n-1)(1-\alpha\sqrt{n/(n-1)})^2}$$

ここで

$$\delta \equiv \alpha-\frac{\alpha^2}{2}-\frac{\alpha^2 n}{(n-1)(1-\alpha\sqrt{n/(n-1)})^2} \tag{3.15}$$

とおけば，

$$f'(\boldsymbol{a}_0)-f'(\boldsymbol{b}') \geq \delta$$

が成立する．

$$n\to\infty \text{ のとき } \quad \delta=\alpha-\frac{\alpha^2}{2}-\frac{\alpha^2}{(1-\alpha)^2} \tag{3.16}$$

であり，$\alpha=\dfrac{1}{4}$ とすれば　$\delta \fallingdotseq 0.108$　である　□

（注意）　Karmarkar の原論文では補助定理3.1が

$$|\ln(1+x)-x| \leq \frac{x^2}{2(1-\beta)}$$

となっているがこれは誤りと思われる．このため(3.16)が

$$\delta=\alpha-\frac{\alpha^2}{4}-\frac{\alpha^2}{1-\alpha} \tag{3.17}$$

となっていて，$\alpha=\dfrac{1}{4}$ のとき $\delta=\dfrac{1}{8}$ としている．

〔定理 4〕
点列 $\{\boldsymbol{x}^{(k)}\}$ につき

(i)　$\boldsymbol{c}^T\boldsymbol{x}^{(k)}=0$ (3.18)

または

(ii) $f(\boldsymbol{x}^{(k+1)}) \leq f(\boldsymbol{x}^{(k)})-\delta$ (3.19)

が成立する．ここに δ は α によって決まる定数であり

$\alpha=\dfrac{1}{4}$ のとき　$\delta=0.108$ である．

（証明）　定理 3 より

$$f'(\boldsymbol{b}') \leq f'(\boldsymbol{a}_0)-\delta \quad \text{または } \boldsymbol{c}'^T\boldsymbol{b}'=0$$

が成立する．逆変換 T^{-1} により

$$\boldsymbol{x}^{(k)}=T^{-1}(\boldsymbol{a}_0),\quad \boldsymbol{x}^{(k+1)}=T^{-1}(\boldsymbol{b}')$$

であるから，

$$f(\boldsymbol{x}^{(k+1)}) \leq f(\boldsymbol{x}^{(k)})-\delta$$

または

$$\boldsymbol{c}^T\boldsymbol{x}^{(k+1)}=0$$

が成立する　□

〔定理 5〕（主定理）
この算法により $0(n(q+\log n))$ 回以内の反復後に

(i)　$\boldsymbol{c}^T\boldsymbol{x}=0$ (3.20)

または

(ii) $\dfrac{\boldsymbol{c}^T\boldsymbol{x}}{\boldsymbol{c}^T\boldsymbol{a}_0} \leq 2^{-q}$ (3.21)

を満たす可能解 $\boldsymbol{x}$ を見いだす．

まず次の補助定理5.1から証明する．

〔補助定理5.1〕基本問題(2.1)の“仮定 2”(初期可能解 $\boldsymbol{x}^{(0)}>0$ が既知である)は，一般性を失うことなく

$$\boldsymbol{x}^{(0)}=\left(\frac{1}{n},\cdots,\frac{1}{n}\right)^T$$

となるように問題を変形することができる．

（証明）　$x_i^{(0)}=\dfrac{1}{n+1}(i=1,\cdots,n)$，$x_{n+1}^{(0)}=\dfrac{1}{n+1}$ として次の問題を作る．

$$\left.\begin{array}{ll} \text{目的関数} & \boldsymbol{c}^T\boldsymbol{x}+Mx_{n+1}\to\text{最小化} \\ \text{制約条件} & A\boldsymbol{x}-(n+1)A\boldsymbol{x}^{(0)}\cdot x_{n+1}=0 \\ & \sum_{i=1}^{n+1} x_i=1 \\ & x_i \geq 0\ (i=1,\cdots,n+1) \end{array}\right\} \tag{3.22}$$

ただし M は十分大なる正数とする．

この問題が基本問題と同じ最適解をもつことは明らかである．そして $x_i^{(0)}=\dfrac{1}{n+1}(i=1,\cdots,n+1)$ はこの問題の可能解である．

（定理 5 の証明）補助定理5.1より一般性を失うことなく $x_i^{(0)}=\dfrac{1}{n}(i=1,\cdots,n)$ と仮定することができる．

最初の m 回の反復中 $c^T x^{(k)}=0$ が達成されなかったとする．そのとき定理4より

$$f(x^{(k+1)}) \leq f(x^{(k)})-\delta \quad (k=0,1,\cdots,m-1)$$

よって

$$f(x^{(k)}) \leq f(x^{(0)})-k\delta$$

$$\sum_j \ln \frac{c^T x^{(k)}}{x_j^{(k)}} \leq \sum \ln \frac{c^T x^{(0)}}{x_j^{(0)}}-k\delta$$

これを書き直して

$$n \ln \frac{c^T x^{(k)}}{c^T x^{(0)}} \leq \sum_j \ln x_j^{(k)}-\sum_j \ln x_j^{(0)}-\delta k$$

しかし　$x_j^{(k)} \leq 1$，$x_j^{(0)}=\frac{1}{n}$ であるから

$$\ln \frac{c^T x^{(k)}}{c^T x^{(0)}} \leq \ln(n)-\frac{k}{n}\delta$$

よって

$$m=0(n(q+\ln(n)))$$

回の反復の後には

$$\ln \frac{c^T x^{(m)}}{c^T x^{(0)}} \leq -0(q)$$

となり，$x=x^{(m)}$ をこの算法の出力とすればそれは

$$\frac{c^T x}{c^T x^{(0)}} \leq 2^{-q}$$

を満たす．もし m 回の反復中に

$$c^T x^{(k)}=0$$

となったならば $x^{(k)}$ を出力として終る．　□

4. 仮定を外す方法

基本問題には3つの仮定が設定されていた．この節でそれらを除去しよう．

4.1 同次形にする方法

$$\left.\begin{array}{l} Ax=b \\ x \geq o \end{array}\right\} \qquad (4.1)$$

を同次形にし，かつ $\sum_i x_i=1$ とするために次のような変形を行なう．まず十分大なる M に対し

$$\sum_{i=1}^n x_i \leq M \qquad (4.2)$$

として，x_{n+1} を導入し

$$\sum_{i=1}^n x_i+x_{n+1}=M \qquad (4.3)$$

とおく．次に

$$x_i'=\frac{x_i}{M} \quad (i=1,\cdots,n+1) \qquad (4.4)$$

として

$$\sum_{i=1}^{n+1} x_i'=1 \qquad (4.5)$$

を得る．この x' を用いれば(4.1)は

$$A\begin{bmatrix} x_1' \\ \vdots \\ x_n' \end{bmatrix}=\frac{1}{M}b$$

$$\Rightarrow A\begin{bmatrix} x_1' \\ \vdots \\ x_n' \end{bmatrix}-\frac{1}{M}b\left(\sum_{i=1}^{n+1} x_i'\right)=o$$

これを整頓して

$$A'x'=o \qquad (4.6)$$

を得る．ここに

$$A'=[A:o]-\frac{1}{M}b\,e^T \qquad (4.7)$$

である．ただし $e^T=[1,\cdots,1]$ とする．

4.2 初期可能解を求める方法——Phase I——

$Ax=b$ の $x>o$ を満たす可能解を求めるには，任意に $x^{(0)}(>o)$ をえらび次の LP を作る．

$$\left.\begin{array}{ll} \text{目的関数} & \lambda \rightarrow \text{最小化} \\ \text{制約条件} & (Ax-b)-\lambda(Ax^{(0)}-b)=o \\ & x \geq o \end{array}\right\} \qquad (4.8)$$

この LP は $x=x^{(0)}(>o)$，$\lambda=1$ という正の可能解をもっている．前の方法により同次形にした上で基本算法を適用する．$\lambda \rightarrow 0$ になったときの x は元の問題の初期可能解である．もし $\lambda \rightarrow 0$ とならないとき——$f(x)$ が基本算法で δ ずつ減少しなくなったとき——不能と判定する．

4.3 目的関数の最小値を0にする方法

目的関数 $c^T x$ の最小値をはさむ上，下の数 u，l を決める．Karmarkar 論文では $2^{0(L)}$ と $-2^{0(L)}$ としているが，これはもちろん理論上のことで，phase I 終了時の可能解に対する $c^T x$ を u とし，$\min c_i$ を l にすればもっとよい上，下限が得られる．この u,l をもとに暫定的な上下限として

$$\left.\begin{array}{l} u'=l+\frac{2}{3}(u-l) \\ l'=l+\frac{1}{3}(u-l) \end{array}\right\} \qquad (4.9)$$

を計算する．この l' を仮想的な最小値とみなして目的関数の係数を次式により変更する．

$$c^T x-l'\left(\sum x_i\right)=\sum(c_i-l')x_i \qquad (4.10)$$

この目的関数を暫定的な目的関数として次のように改訂した基本算法を適用する．

以下，次のような用語，記号を用いる．

c_m: $c^T x$ の真の最小値

範囲 w: $u-l$（上限と下限の幅）

〔基本算法への改訂〕

ステップ5で得られた b につき

$$c^T b<l'$$

が成立するかどうかをしらべ，もし成立する場合は，

$$c'^T b''=l'$$

となる点を線分 $\overline{a_0 b'}$ 上に求めて，b' の代りに b'' を用いてステップ5を実行する．

この改訂した算法を用いて進む場合，２つの場合が起り得る．

〈ケース１〉　$c_m \leq l'$ の場合

定理２と定理３の証明を次のように改めれば，基本算法に関する諸命題はそのまま通用する．

いま，$B(\boldsymbol{a}_0, \alpha r) \cap \Omega''$ 上で $\boldsymbol{c}'^T\boldsymbol{x}$ を最小化する点を $\boldsymbol{x}_m$ とする．もし

$$\boldsymbol{c}'^T\boldsymbol{x}_m < 0$$

ならば，定理２の証明の中で，$\boldsymbol{x}^*$として，線分 $\overline{\boldsymbol{a}_0\boldsymbol{x}_m}$ 上で $\boldsymbol{c}'^T\boldsymbol{x}^* = 0$ を満たす点を用いる．証明の残りの部分はそのまま通用する．定理３は，$\boldsymbol{c}'^T\boldsymbol{b}'' = 0$ であるから自明に成立する．

もし

$$\boldsymbol{c}'^T x_m \geq 0$$

ならば，定理２，定理３の証明になんら変更はない．いずれの場合もポテンシャル関数が δ だけ減少するか，または，仮想的最小値 l' を達成する点を得るかである．

〈ケース２〉　$l' < c_m$ の場合

ポテンシャル関数が δ 以上減少しなくなるので，そのとき仮想的な最小値が真の最小値より小さいことを知る．

さて改訂した基本算法を実行している途中でケース２がおこったならば，$l' < c_m$ であることがわかるので

$$l \leftarrow l'$$

として下限を修正する．

また，u' よりも小さい目的関数値をもつ可能点が見つかったならば

$$u \leftarrow u'$$

として上限を修正する．

どちらの場合がおこっても範囲は 2/3 に縮小される．しかも，そのどちらかは

$$\left(1-\frac{\delta}{n}\right)^{kn} \leq \frac{1}{2}$$

を満たす k につき

$$n\,(k + ln\,(n))\ \text{ステップ以内}$$

でおこる．なぜならもし下限がこのステップ内で改訂されないならば，ポテンシャル関数は毎回少くとも δ だけは減少しているので，$\boldsymbol{c}^T\boldsymbol{x}$ は u' より小になるからである．

こうして $\ln 0\,(nL)$ ステップ以内で範囲は $2^{0(L)}$ から $2^{-0(L)}$まで縮小し，楕円体法と同じように，結果を丸めて正確な最適解を得ることができる．

4.4　計算複雑度

これまで計算の精度に関する定数としてLを用いてきた．その値は，楕円体法と同じく次式により定義される．

$$L = \log\,(1 + |D_{max}|) + \log\,(1+\alpha) + \log mn$$

ここに

$D_{max} = \max\{\det(X)\,|\,X$ は制約式の係数行列Aの正方小行列$\}$

$\alpha = \max\{|c_i|,\ |b_i|\quad (i = 1, \cdots, n)\}$

である．

基本算法(または改訂した基本算法)を $0^{(nL)}$ ステップ反復すれば最適解の $2^{-0(L)}$以内に入るようになるので，そこで丸めて真の最適解を得る．この辺の事情は楕円体法と同じである．

各ステップの計算の中では(2.31)式が大部分を占めるが，そこで最悪の場合 $0\,(n^3L)$ の算術演算を要する．しかし Karmrkar の論文[4]のような工夫をすれば，$0\,(n^{2.5}L)$ ですむので，全体として

$$0\,(n^{3.5}\,L^2)$$

の計算複雑度をもつ．

5.　予備的数値実験

K法を数値計算法としてインプリメントするためには様々な改良を必要とする．すべてこれからの研究をまたねばならない．思いつくままにそのいくつかをあげてみる．

(1) 仮定を外す方法として *big M* を導入することは数値計算上，けた落ちを発生させることになるので要注意．

(2) 本来の係数行列 A がもっている sparsity を破壊するような変形(たとえば(4.7)式)は避けたい．

(3) (2.31)式の計算法に関して Karmarkar は，Dの変化が小さい間は $(BB^T)^{-1}$ を変えずにそのまま使い，変化が大きくなったら rank-one modification によって$(BB^T)^{-1}$を改訂する方法を提案している．この方法によって $0\ (n^{2.5}L)$ の計算量を実現している．しかし数値計算上は B^T をHouseholder変換したほうがよいだろう．もっともここでもsparsityの問題は残るが．

(4) 算法の途中で，最終的な基底変数と非基底変数の区別がつくようになったら，その段階で基底の逆行列を求めて単体基準をしらべてみる．このことは，最終段階ではもちろん必要となるが，それを途中で早めにやる方法はないか．

(5) α の大きさと収束の速さの関係．

以上のような気がかりな点はあるにせよ，とりあえず数値実験してみようと思い立って，マイコンプログラムを作り“超”小型問題を解いてみた．

用いた算法は本講座に説明したものとほぼ同じである．目的関数の係数を直交投影させる計算(2.31)は，逆

表 5.1 反復回数

	問 題 I	問 題 II	問 題 III
ε	10^{-6}	10^{-6}	10^{-6}
phase I	$\alpha=1$ 4回	$\alpha=1$ 5回	$\alpha=1$ 2回
phase II	$\alpha=0.5$ 63回	$\alpha=0.5$ 57回	$\alpha=0.5$ 59回

行列を求める代りに連立1次方程式を解くようにしている．また，収束判定は次のようにした．

phase I では目的関数値が ε 以下

phase II では（範囲 w）／（｜目的関数値｜＋1）が ε 以下

解いた問題は以下のとおり．変数はすべて非負とする

〔問題 I〕（$n=5, m=3$）

目的関数 $z=3x_1+5x_2\rightarrow$最大化

制約条件 $x_1+7x_2+x_3=140$

$2x_1+4x_2+x_4=100$

$3x_1+3x_2+x_5=120$

（最適解：$x_1=35$, $x_2=7.5$, $x_3=52.5$, $x_4=0$, $x_5=0$, $z=142.5$）

〔問題 II〕（$n=7$, $m=5$）

目的関数 $z=3x_1+4x_2-x_3\rightarrow$最小化

制約条件 $2x_1+3x_2-3x_3+x_4=210$

$1.5x_1+0.5x_2-1.5x_3+x_5=120$

$x_1+x_2+x_3=80$

$x_1+3x_2-x_3-x_6=40$

$2.5x_1+5x_3-x_7=50$

（最適解：$x_1=0$, $x_2=30$, $x_3=50$, $x_4=270$, $x_5=180$, $x_6=0$, $x_7=200$, $z=70$）

〔問題 III〕（$n=9, m=3$）退化した問題

表 5.2 問題IIIの解（反復回数61回目）

```
-------------------------------
     OPTIMAL SOLUTION
-------------------------------
X( 1 )=     8.99582
X( 2 )=     6.6131E-06
X( 3 )=     4.00067
X( 4 )=     5.42731E-06
X( 5 )=     1.00734E-05
X( 6 )=     5.95732E-05
X( 7 )=     1.09516E-05
X( 8 )=     .0012351
X( 9 )=     5.82325E-05

OBJECTIVE FUNCTION=-12.9931
```

目的関数 $z=-x_1+x_2-x_3-x_4+2x_5-x_6+2x_7++3x_8-5x_9\rightarrow$最小化

制約条件 $x_1+5x_2-3x_3+4x_4-3x_5+2x_8-8x_9=-3$

$-5x_2-x_3-5x_4+4x_5-x_6+2x_7+x_9=-4$

$x_1+2x_2+5x_4+x_5+x_6+x_7-2x_8+3x_9=9$

（最適解：$x_1=9$, $x_2=0, x_3=4, x_4=x_5=x_6=x_7=x_8=x_9=0$, $z=-13$）

表5.1に計算結果を示す．

この表には，収束判定数と，各phaseの反復回数および用いた α の値を記した．

最終的な最適解は，たとえば問題IIIの場合表5.2のようになっている．がこれが61回の反復後の値である．

反復の途中で x, z，範囲がどう変化したかを表5.3に示す．

これからもわかるように，かなり早い段階で基底に入る変数とそうでない変数が区別できそうである，逆変換の式(2.34)からも明らかなように，いちど小さくなった変数が再び復活してくるのは容易なことではない．しか

表 5.3 問題IIIの反復回数と解

反復回数	10	20	30	40	50	60
x_1	3.58121	10.0968	9.27271	9.00865	9.00207	8.99893
x_2	1.04768	.132741	4.70274E-03	1.62557E-04	2.01892E-05	8.75099E-06
x_3	2.72546	3.95045	4.05949	4.00207	4.00054	3.99918
x_4	.809656	.110951	3.94447E-03	1.36222E-04	1.68148E-05	7.21723E-06
x_5	1.42072	.190186	.0084781	2.87569E-04	3.41105E-05	1.37803E-05
x_6	2.42174	1.03909	.0426013	1.46562E-03	1.81896E-04	7.88332E-05
x_7	1.50619	.209787	8.73107E-03	2.97773E-04	3.5869E-05	1.48276E-05
x_8	5.64471	3.21957	.32187	.0112614	1.78506E-03	1.16498E-03
x_9	1.73863	1.02769	.0939624	3.06113E-03	2.85189-E04	8.72436E-05
z	6.65207	-9.61158	-12.8391	-12.9923	-12.9987	-12.9951
範 囲	55.4773	7.30565	.285055	7.41482E-03	2.90573E-04	2.68221E-05

もそのような例は今までのところおこっていない．

興味があるのは範囲(＝目的関数値の上限－下限)の減少の仕方である．図5.1に各問題の「反復回数対範囲」のグラフを示す．いずれの場合も，目的関数の精度を10進で1桁上げるためには10回程度の反復を要していることがわかる．Karmarkar の理論の正しさを示すものである．

最後に，α の値による反復数への影響はこれらの例題に関する限り顕著ではなかった．もっと多くの実験と理論的な解明が必要である．

6. 将来への展望
――ＬＰの高速化がもたらすもの――

Dantzig が New York Times の中でコメントしたように，事ははじまったばかりなのである．Karmarkar の仕事の偉大さは理論面と数値計算面で分離して考える必要がある．理論的には，Khachiyan の楕円体法と同じく大域的な解析である点がすぐれている．単体法を含めて，これまでのほとんどの勾配法は局所的な解析である．すなわち，解法の途中で目的関数値が大域的な最適解に向ってどのような率で改善されるかという評価ができないという弱点をもいている．ある場合には非常に収束が速いが，別の場合にはきわめて遅いことがあり得る．それに対してK法は最悪の場合でも一定の比率で目的関数値が改善されるという保証がある．平均的な行動に関してはより詳細な分析が必要であるが，理論的な収束率よりよい値を示すであろう．

非線形計画法(NLP)に関しても事情は同様である，K法を凸NLPに適用することにより大域的な収束性を保証することが可能になるであろう．

以上は理論的な面での評価であるが，数値計算法としての評価には，もっと時間を要する．前節でとりあげた“超”小型問題に関するかぎり単体法より“はるかに”収束は遅いし，精度もよくない．Karmarkar 自身は“超”大型問題になればK法の優位性が立証されるとしているが，現在のところ筆者には試しようがないというのが正直な感想である．いずれにせよ，数値計算法としては多くの改良がなされねばならない．

もしK法によって“超”大型問題を解くことがコスト的に引き合うようになったならば，どのような適用分野が開かれるであろうか．New York Times や Time によれば，すでにいくつかの企業がK法にアプローチしているらしい．American Airlineでは乗員のスケジューリング問題，燃料の積載計画などに，Exxonでは石油精製問題に適用することを検討中である．いずれも従来のものよりもより広域的な最適化を目的としている．AT&Tでは，全米の電話網の使用効率を最大化するような長距離通話のルーチング問題を検討中である．またパターン認識の分野でも，最大マッチング問題を解くサブルーチンへの適用が考えられ，リアルタイム処理への道を開く可能性もある．スペースをめぐる諸問題には自動パイロットなどの面で利用されるであろう．いずれもリアルタイムLPという数理計画の新局面の登場であり今後の動向が注目される．

〔参考文献〕 前回と同じ

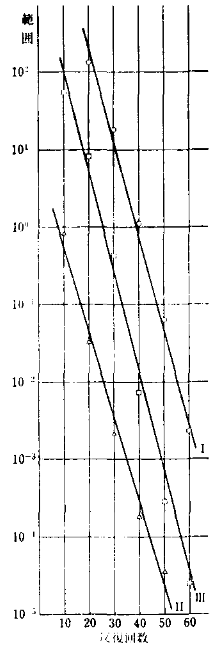

図 5.1

○…問題Ｉ　△…問題Ⅱ　□…問題Ⅲ

3月号講座正誤表 (校正ミスをおわびします)

頁行	誤	正
216頁左↓14	*ston D.C.*	*gton D.C.*
216頁左↑16	*"Why in*	*"Why is*
216頁右↓2	Karmarker	Karmarkar
217頁左↓2	…ある点を$\boldsymbol{x}^{(0)}=(x_1^{(0)}, x_2^{(0)}, x_3^{(0)})$起点	→…ある点$\boldsymbol{x}^{(0)}=(x_1^{(0)}, x_2^{(0)}, x_3^{(0)})$を起点
218頁右↑10	$f_G-f_E=v(f_G-f_D)$	$f_G-f_E=\nu(f_G-f_D)$
219頁左↑16	$v=\frac{R}{r}=n-1(2.17)$	$\nu=\frac{R}{r}=n-1(2.17)$
219頁右 式(2.24)の中	$\boldsymbol{x}'=\frac{D^{-1}\boldsymbol{x}}{\boldsymbol{c}^TD^{-1}\boldsymbol{x}}$	$\boldsymbol{x}'=\frac{D^{-1}\boldsymbol{x}}{\boldsymbol{e}^TD^{-1}\boldsymbol{x}}$
式(2.25)の中	$\boldsymbol{x}=\frac{D\boldsymbol{x}'}{\boldsymbol{c}^TD\boldsymbol{x}'}$	$\boldsymbol{x}=\frac{D\boldsymbol{x}}{\boldsymbol{e}^TD\boldsymbol{x}'}$
219頁右 式(2.25)の下	ここに $\boldsymbol{c}^T=\cdots$	ここに $\boldsymbol{e}^T=\cdots$
220頁左 式(2.30)の中	$B=\begin{bmatrix} AD \\ \boldsymbol{c}^T \end{bmatrix}$	$B=\begin{bmatrix} AD \\ \boldsymbol{e}^T \end{bmatrix}$
220頁左↑1	$\boldsymbol{c}^T=(1, \cdots, 1)$	$\boldsymbol{e}^T=(1, \cdots, 1)$
220頁右 式(2.34)の中	$\boldsymbol{b}=\frac{D\boldsymbol{b}'}{\boldsymbol{c}^TD\boldsymbol{b}'}$	$\boldsymbol{b}=\frac{D\boldsymbol{b}'}{\boldsymbol{e}^TD\boldsymbol{b}'}$
220頁右↓11	$\nu=1/\sqrt{n(n-1)}$	$r=1/\sqrt{n(n-1)}$