

フィールドライフデータの 解析手法

宮川 雅巳

1. はじめに

寿命データの大きな特徴といえば、故障以前に観測が打切られたセンサードデータを含むことであろう。従来から寿命試験では試験時間短縮のために定時打ち切り方式や定数打ち切り方式などが考案され、そのための解析手法もパラメトリックを中心に整備されてきた。いっぽう、品質管理において品質保証活動のはたす役割が大きくなるにつれ、ユーザーの手にわたった製品の寿命情報の収集ならびに解析の方法論が不可欠なものになっている。

フィールドでの寿命データは一般にさまざまな時点で右側もしくは左側から打切られたものを含み、しかもすでにある時間稼働したものを途中から観測する場合などもありきわめて「不完全」な様相をみせている。またフィールドデータは寿命試験データに比べその「量」は豊富であるが「質」においては劣るのが常であるから、特定の分布形やモデルを仮定したうえでのパラメータ推定よりも、確率紙にプロットしその結果から必要に応じて外れ値の検出、使用環境や使われ方による層別、複数の故障モードに対する競合モデルのあてはめなどの前処理が先決であろう。確率紙へのプロットの際、分布関数のノンパラメトリック推定値が必要になるが、これまでに提案されたさまざまな不完全データにもとづく分布関数の推定法は、

データの「重み」の配分という見地から統一した解釈が可能である。さらにこの解釈は近年注目を集めている Jackknife や Bootstrap, すなわち「サンプルからの再抽出」にも通ずるものである。以下これについて考えてみよう。

2. ランダムセンサードデータの解析手法

図1に示すような使用開始時点がそれぞれ異なるアイテムにおいて、現時点で未故障のものは中途打ち切りになるので使用開始時点をそろえ小さい順に並べれば図2のように故障と打ち切りの入り混じったデータとなる。このようなデータをランダムセンサードデータと呼ぶ。使用開始時点が暦時間において等しくとも実稼働時間がそれぞれ異なれば同様のデータを得る。ランダムセンサードデータは競合モデルにより定式化される。すなわち寿命を表わす確率変数 X とこれに独立な打ち切り変数 Y を考え、

$$T = \min(X, Y)$$

$$\delta = \begin{cases} 1 & \dots X \leq Y \text{ のとき} \\ 0 & \dots X > Y \text{ のとき} \end{cases}$$

が観測されるものとする。図1の例では使用開始時点から現時点までの時間を打ち切り変数 Y とすればよい。また複数の故障モードが存在し競合する場合に、個々の故障モードの寿命特性に興味があるならば他のモードによる故障は打ち切りとみなせるので同様のデータ形式となる（これが競合モデ

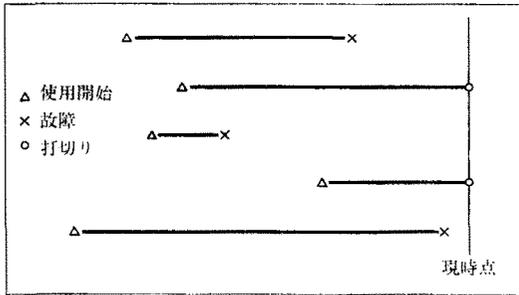


図1 使用開始時点の異なるデータ

ルである)。図2ではxを特定のモードによる故障、○をその他のモードによる故障とみなせばよい。このようなランダムセンサードデータにもとづく分布関数、信頼度関数のノンパラメトリック推定法として以下に述べるいくつかの方法がある。

2.1 Kaplan-Meier 推定量

まず E.L. Kaplan と P. Meier が提案した Kaplan-Meier 推定量 [5] (彼らは product-limit 推定量と呼んだ。以下 K-M 推定量と記す) の基本的発想を述べよう。あるアイテムについて2年前に使用開始したものに対して50個のサンプル、1年前に使用開始したものに対して200個のサンプルを採取し表1に示すようなデータを得たとする。そこで2年間正常である確率 $R(2)$ の推定を考える。このときまず単純に第1サンプルだけを用いて

$$\hat{R}(2) = \frac{36}{50} = 0.72$$

と推定できる。彼らはこれを reduced-sample 推定量と呼んだ。この推定量は不偏で一致性をもつが、第2サンプルの200個のデータをまったく使

表1 使用開始時点の異なる2組のサンプル

	第1サンプル 残存数	故障数	第2サンプル 残存数	故障数
2年前	50	8	200	20
1年前	42			
現在	36			

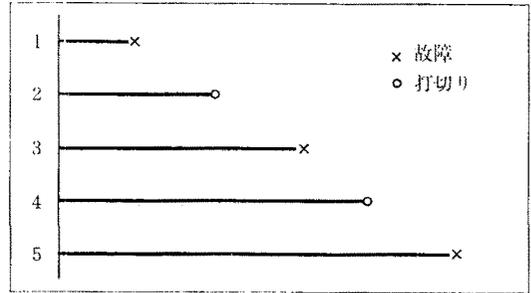


図2 ランダムセンサードデータ

わないのは何とも惜しい気がする。そこで彼らは次のように考えた。2年間正常であるには、まず最初の1年間正常であり、その条件のもとでつづく1年間も正常でなければならない。すなわち、

$$R(2) = R(1) \times R(2|1)$$

が成り立つ。このとき $R(1)$ の推定には第2サンプルも併用できる。これより別な推定値

$$\hat{R}(2) = \frac{180+42}{200+50} \times \frac{36}{42} = 0.761$$

を得る。これが K-M 推定量である。ただし第1サンプルと第2サンプルが同一の分布にしたがうことがこの推定量を用いる前提条件である。

表1の例は観測間隔が1年の区間分けされたデータだが、図2のような連続観測データに対しては観測間隔が限りなく短いものとして同様の手続きを踏めばよい (これが product-limit 推定量と呼ばれるゆえんである)。すなわち故障時間と打ち切り時間をあわせて小さい順に並べた。 $t_1 \leq t_2 \leq \dots \leq t_n$ に対して K-M 推定量は

$$\hat{R}(t) = \prod_{t_i \leq t} \left(\frac{n-i}{n-i+1} \right) \quad (2.1)$$

で与えられる。ここで δ_i は t_i が故障 ($\delta_i=1$) か打ち切り ($\delta_i=0$) かを示している。(2.1) は故障時点だけで jump する階段関数で図2のデータに適用すれば図3のようになる。K-M 推定量はノンパラメトリック下での最尤推定量としても導出されるものである。またこのとき先ほどの reduced-sample 推定量は図1のように個々のア

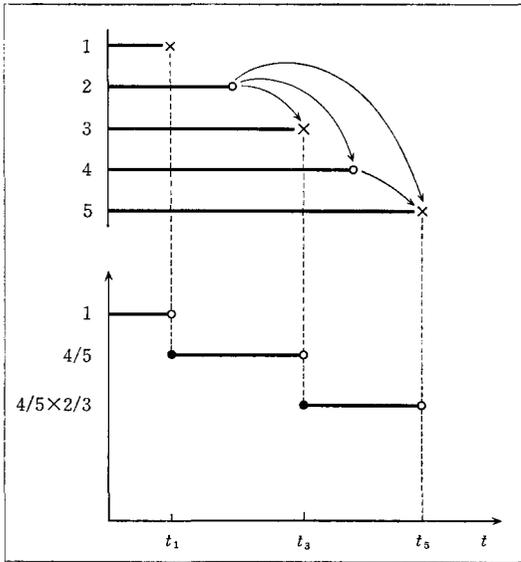


図3 K-M推定量と重みの配分

アイテムの打ち切り時間がわかれば構成できるが、はじめから図2の形でデータが与えられたときにはもはや構成できないことに注意したい。

さてそこで別な見地から K-M 推定量を解釈してみよう。図3において5個のデータは無作為に抽出されたサンプルであればもともと等しい重みをもっている。この値を1としよう。そこで打ち切りデータは、真の寿命がその打ち切り時間よりも長いという情報だけをもっているので、その重みはそれより大きい故障時間もしくは打ち切り時間をもつデータへ均等に割り振られるのが自然であろう。

図3では No.2 の重みは No.3, 4, 5 へとそれぞれ $1/3$ ずつ割り振られ、さらに No.4 がその段階で自身も持っている $4/3$ の重みを No.5 へ割り当てる。結果として No.1, 3, 5 の重みはそれぞれ $1, 4/3, 8/3$ となるが、これをデータ数5で割った $1/5, 4/15, 8/15$ がちょうど K-M 推定量の jump の高さになっているのである。すなわち K-M 推定量とは打ち切りデータの重みを後続データへ均等配分した後の経験分布と考えられる。これが Efron [2] の再配分 (redistribution) による解釈である。最大値 t_n が打ち切りデータのとき、 $t > t_n$ では K-M 推定量は定義され

ないが、これは t_n の重みの割り振り先がないからである。

K-M 推定量は任意の t での信頼度を推定するものであるから、図2のような区間分けされていないデータを確率紙へプロットする際の故障時点での信頼度の推定値としては、Herd [3] の方法

$$\hat{R}(t_i) = \prod_{j \leq i} \left(\frac{n-j+1}{n-j+2} \right)^{\delta_j} \quad (2.2)$$

を用いることを推奨したい。(2.2) はいわば平均ランクのランダムセンサードデータへの拡張である。

2.2 累積ハザード法

寿命分布が連続のとき、信頼度関数 $R(t)$ と故障率関数 $\lambda(t)$ のあいだには

$$R(t) = \exp \left\{ - \int_0^t \lambda(x) dx \right\} \quad (2.3)$$

の関係があり

$$H(t) = \int_0^t \lambda(x) dx$$

を累積ハザード関数と呼ぶが、このとき $H(t)$ を

$$\hat{H}(t) = \sum_{t_i \leq t} \frac{\delta_i}{n-i+1} \quad (2.4)$$

で推定しようというのが累積ハザード法であり、Nelson [6] によって提唱された。(2.4) を (2.3) に代入すると

$$\hat{R}(t) = \prod_{t_i \leq t} \left\{ \exp \left(- \frac{1}{n-i+1} \right) \right\}^{\delta_i}$$

となり K-M 推定量とは一致しないが、1次近似の関係にあることが容易に理解できよう。累積ハザード法も K-M 推定量とまったく同様の重みの配分を行っており、(2.4) の分子分母で先行する打ち切りデータから割り振られた重みを打ち消し合っている。

ところで K-M 推定量、累積ハザード法は次のような年齢を考慮したデータ解析にも適用できる。たとえば図4に示すように一定期間のデータ採取を行なうとき、すでに稼働中であったアイテ

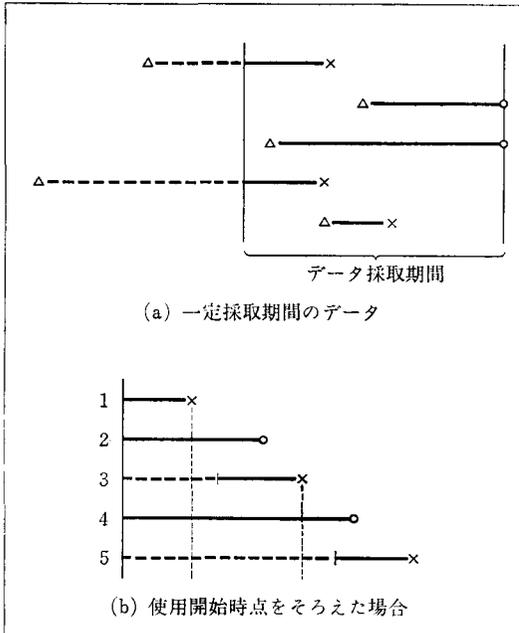


図 4 年齢を考慮したデータ解析

ムも混入してくる (図 4 (a)). このとき使用開始時点がわかれば図 4 (b) のようにまとめられるがここで No. 3, 5 のアイテムはそれぞれ破線の分だけ稼働してきたという条件付のサンプルであるから, 破線部を実線とみなして解析すると偏った推定結果を導くので注意を要する. このような場合は K-M 推定量 (Herd の方法も含む), 累積ハザード法のどちらを用いるにしても, 各故障時点の直前, 直後の残存数としてその時点を通る実線の数だけを数えればよいのである.

2.3 平均順位法

再び図 2 のデータをとりあげよう. そこで各故障データの故障順位 (寿命が全データ中で何番目に短いかを示す) を考えてみる. 図 5 からわかるように, No. 1 の故障順位は常に 1 番であるが, No. 3 の故障順位は No. 2 の真の寿命が区間 C にあれば 3 番, 区間 D, E, F にあればいずれも 2 番である. そこでこれらの平均をとり $(3 + 2 + 2 + 2) / 4 = 2.25$ 番を平均順位とし, これを, たとえば平均ランク $i / (n + 1)$ やメジアンランクの近似式 $(i - 0.3) / (n + 0.4)$ の i に代入し, 分布

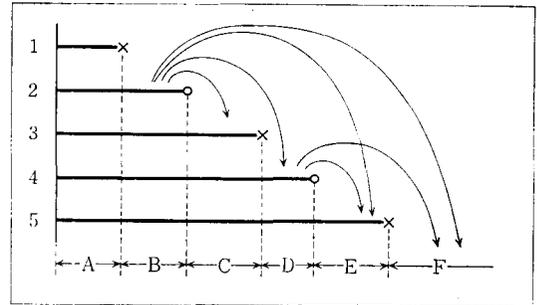


図 5 平均順位法の考え方と重みの配分

表 2 配分後の各区間の重み

	A	B	C	D	E	F
1	1	0	1.25	0	1.875	1.875

関数を推定しようというのが平均順位法であり, Johnson[4] によって提唱された.

j 番目 (故障データ中の順位) の故障データの平均順位 r_j を求める一般式は

$$r_j = r_{j-1} + \frac{(n+1) - r_l}{(n+1) - k} \quad (2.5)$$

k : j 番目の故障データより前で最も近い打ち切りデータの全データ中順位

l : k に該当する打ち切りデータより前で最も近い故障データの故障データ中順位

で与えられる. 一見わかりにくい式だが, No. 3 のアイテムにあてはめれば, $j=2, k=2, l=1$ で $r_2 = 1 + (6-1)/(6-2) = 2.25$, No. 5 では $r_3 = 2.25 + (6-2.25)/(6-4) = 4.125$ となる.

さてそこで平均順位法を再び重みの配分で解釈してみよう. K-M 推定量ではいわば故障時間と打ち切り時間の各時点が等しい重みをもち, 打ち切り時点の重みが後続する時点へ均等に割り振られていた. ところが平均順位法では, n 個の時点が作る $(n+1)$ 個の排反する区間が等しい重みをもち右端が打ち切りになる区間の重みが後続する区間へ均等に割り振られると考えることができる. 図 5

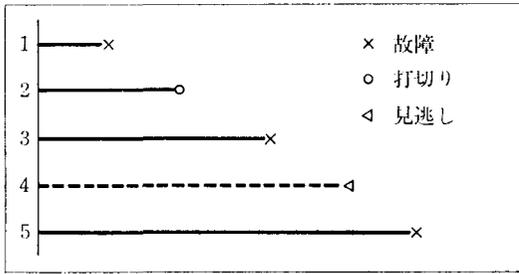


図 6 両側ランダムセンサードデータ

の例ではAからFの6区間が等しい重みをもつ(これを1としよう), 区間Bの重みがC, D, E, Fに均等に1/4ずつ割り振られ, さらに区間Dがその段階でもつ5/4の重みがEとFに均等に5/8ずつ割り振られる. 結果として各区間の重みは表2のようになり, 各故障データの平均順位は先行する区間の重みの和として与えられることがわかる. (2.5)の第2項はまさに1つの打切りデータがあった段階で残っている重みを後続区間に均等配分することを意味している. なお平均順位を平均ランクに代入した推定量は(2.2)のHerdの推定量に一致する. その意味ではHerdの推定量も点ではなく区間に重みを与えた推定量なのである.

3. 両側ランダムセンサードデータの解析手法

図1に示す状況において, 現時点以前に故障したアイテムについてはただ故障していたということがフィールドデータでは多々ある. これはいわば「見逃し」データ, すなわち左側から打ち切られたデータである. 冗長システムにおいても個々のコンポーネントについては同種のデータが観測されうる. そこで打切りデータと同時に見逃しデータがランダムに混入した場合の解析法を考えよう.

図6はデータの一例であるが, このときK-M推定量流の重みの配分を適用しようとするれば,

No.2の重みを後続するNo.3, 4, 5へ, No.4の重みを先行するNo.1, 2, 3へそれぞれ均等配分することになるが, ここでNo.2とNo.4が互いに重みを与え合うためやや複雑である.

そこでもういちど図3のランダムセンサードデータにもどって考えてみよう. No.2の重みはいったんはNo.4へも割り振られるが, 結局それはNo.5に割り当てられる. すなわち最終的には故障時点だけが重みをもつ. そこで最初から故障時点だけに重みを割り振ることにしよう. そのときNo.2の重みをNo.3, 5へどういう割合で割り振るかが問題となるが, この割合はその段階でNo.3とNo.5がもっている重みに比例させるのが自然であろう. そこで最初はNo.2の重みをNo.3, 5へ1/2ずつ割り振り, さらにNo.4の重みはすべてNo.5へ割り振る. 結果としてNo.1, 3, 5の重みは(1, 3/2, 5/2)となる. そこで今度はNo.2の重みを得られた重みに比例させNo.3, 5へ3/8, 5/8ずつ割り振り直す. さらにNo.4の重みをNo.5へ割り振った結果, 3点の重みは(1, 11/8, 21/8)となる. これにもとづき, もういちど割り振り直せば(1, 43/32, 85/32)となり, 以下これをくりかえせば2.1で得られた(1, 4/3, 8/3)へと収束していく. これがEfronのself-consistent推定量[2]の考え方である.

この方法を図6の両側ランダムセンサードデータに適用すれば, 最初はNo.2の重みをNo.3, 5へ, No.4の重みをNo.1, 3へそれぞれ均等配分し, その結果, 得られた新しい重み(3/2, 2, 3/2)にもとづき2回目の配分を行なう. これを要求する精度で収束するまでくりかえせばよい. この例では簡単な平衡方程式を解くことにより最終的なNo.1, 3, 5の重みは $((5-\sqrt{5})/2, \sqrt{5}, (5+\sqrt{5})/2)$ であることがわかるが, 10回程度のくりかえしで小数点以下3桁まで一致する. このくりかえし法はまさにDempsterら[1]のEMアルゴリズムにおける擬似データ発生

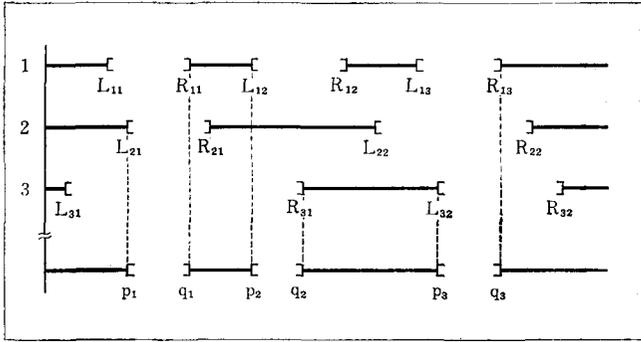


図 7 部分集合データと集合C

(Eステップ)と尤度最大化(Mステップ)のくりかえしであるが、次節に述べるようにさらに一般化される。

4. ランダムな部分集合データの解析手法

打ち切りデータや見逃しデータはランダムな区間データの特別な場合だが、区間データをさらに一般化すれば、アイテム*i*についてその寿命 X_i が $(0, \infty)$ のある部分集合 A_i に属する($X_i \in A_i$)という形で情報が与えられるものになろう。Turnbull[8]はこのような部分集合データに対して self-consistent の概念を用いた解析手法を与えている。

アイテム*i*の寿命を含む部分集合を

$$A_i = \bigcup_{j=1}^{k_i} [L_{ij}, R_{ij}], \quad (i=1, 2, \dots, n)$$

$$0 \leq L_{i1} \leq R_{i1} < L_{i2} \leq \dots \leq R_{ik_i} \leq \infty$$

としたとき、これより排反する区間 $[p_l, q_l]$

($l=1, \dots, m$)を

- 1) p_l は $\{L_{ij}\}$ の要素、 q_l は $\{R_{ij}\}$ の要素とする。
- 2) $[p_l, q_l]$ の内部には $\{L_{ij}\}$ 、 $\{R_{ij}\}$ の要素を含まない。

の2条件を満たすように構成し

$$C = \bigcup_{i=1}^m [p_i, q_i]$$

とおく。図7に部分集合データの一例と対応するCを示す。そこで前節までの考え方をそのまま適用すれば、 A_i ($i=1, \dots, n$)がもともと等しい重みを最終的にCの各区間に適当に割り振ることになる。このときK-M推定量が故障時点だけに重みをもったように、ノンパラメトリック下での尤度最大化をはかっているため、必然的に重みの割り振られる点や区間はできるかぎり少なく狭くなってしまふ。集合Cはまさにそれである。

各 A_i がもつ重み1をCの各区間へ割り振る手順は前節と同じで、まず A_i が含む $[p_l, q_l]$ に均等配分する。これを A_1, \dots, A_n について行なった結果 $[p_l, q_l]$ ($l=1, \dots, m$)がもつた重みに比例して2度目の割り振りを行ない、以下これをくりかえす。所定の精度で収束したならば、Cの各区間の重みをデータ数*n*で割りこれを $F(q_l) - F(p_l)$ の推定値とする。これより $F(q_l)$ ($l=1, \dots, m$)の推定値が求まることになる。たとえば図1のように、使用開始時点が異なる(ただし既知)アイテムに対して、現時点で未故障か既故障かだけがわかる場合にもこの方法を適用すれば分布関数を推定できるわけで、たいへん有用な方法といえよう。

5. おわりに

フィールドライフデータで見られる各種不完全データからの分布関数のノンパラメトリック推定法を「重み」の配分という見地から解釈してみた。本来重みの配分法は多種多様であるが、本稿で述べてきた self-consistent 推定量に対応する配分法はノンパラメトリック下における尤度最大化に結びつくため、時としてデータに合わせすぎた推定値を得ることにもなる。場合によっては分布の「なめらかさ」を出すために重みの配分先を多目にとることも必要であろう。またこの配分法は2.1でみたように均等配分を基本とするわけだ

が、これは打切りのメカニズムが寿命と無関係という前提によっている。近年 Robertson[7]らは一般の場合における K-M 推定量流の配分法を示したが、寿命分布の推定に直接役立つものではない。部分集合データでいえば、各区間の生成メカニズムを考慮して配分割合を変えていくことが重要な手続きであるが、これには多くの課題が残されているのが現状であろう。

参 考 文 献

- [1] Dempster, A. P., Laird, N. M. and Rubin, D. B. : Maximum Likelihood from Incomplete Data Via EM Algorithm. *Jour. Roy. Statist. Soc. B*, Vol. 39,(1977), 1-22
- [2] Efron, B. : Two Sample Problem with Censored Data. In *Proc. Fifth Berkley Symp. on Math. Statist. Prob.*, (1967), 831-853
- [3] Herd, G. R. : Estimation of Reliability from Incomplete Data. *Proc. Sixth Natl. Symp. on Reliab. and QC*, (1960), 202-217
- [4] Johnson, L. G. : *The Statistical Treatment of Fatigue Experiments*. Elsevier Pub. Co., (1964)
- [5] Kaplan, E. L. and Meier, P. : Nonparametric Estimation from Incomplete Observations. *Jour. Amer. Statist. Assoc.*, Vol. 53, (1958), 457-481
- [6] Nelson, W. : Theory and Applications of Hazard Plotting for Censored Failure Data. *Technometrics*, Vol. 14, (1972), 945-966
- [7] Robertson, J. B. and Uppuluri, V. R. R. : A Generalized Kaplan-Meier Estimator. *Ann. Statist.*, Vol. 12, (1984), 366-371
- [8] Turnbull, B. W. : The Empirical Distribution Function with Arbitrarily Grouped, Censored and Truncated Data. *Jour. Roy. Statist. Soc., B*, Vol. 38, (1976), 290-295