青信号通り抜けの術？

筑波大学社会工学系　生田　誠三

1. 問題提起

片道ほぼ4kmの道のりを自転車通勤しはじめてから5年になる．年約250日の通勤として地球をほぼ1/4周したことになる．また通勤路には計11個所の信号があるので，これまでに延べ2万7500個の信号を渡ったことになる．この間，この11個の信号をすべて赤で停止という「最悪の場合」とすべて青で通過という「最良の場合」が，まれではあったがそれぞれ何度かあった．早く目的地に着いたからといって特に何かがよくなるわけではないが，赤信号で停止させられることなく交差点を通過できることは，何となくハッピーな気持にさせてくれるものである．

ある朝，授業に遅れそうになりいつもより自転車の速度を上げたところ，たまたま最初の信号のところで赤のため停止する羽目になった．ところが，その信号がやがて青に変ったとき，後からのんびりとやってきた自転車がちょうどこの信号に到着し停止することなくまんまと渡ってしまったのである．この後に続く4つほどの信号でことごとくこのような「兎と亀の競争」が続いた．なぜこのようなことになってしまったのか．理由は簡単である．私の自転車のスピードが信号の点滅時間と同期していなかっただけのことである．

各信号の点滅時間間隔と各区間の距離を調べれば，すべての信号を青で通り抜けることができるよう各区間の速度をそれぞれ求めることは，計算の上ではまったく容易なことである．しかしこのやりかたは必ずしも実際的ではない．区間ごとに速度を変えるなどというせせこましいことは，考えごとをしながらのんびり通勤できるという自転車通勤のささやかな楽しみを，半減どころか台無しにしてしまうであろう．「のんびりと…というのが自転車通勤の良さとするなら，赤信号で止まるぐらいの心の余裕があってもいいじゃないか」という意見も聞こえてきそうだが，信号停止は思考停止にもなるのでできるだけ避けたいというのが実は本音である．以上のささやかな問題意識をORという科学の俎上にのせるために，これをいくぶん明確に次のように定義しよう．「全区間を，

1. できるだけ同じ速度で，
2. 自転車通勤として快適な速度の範囲で，
3. できるだけ赤信号で止まらず青信号をうまく通り抜ける

ことができるようにするには，各区間の速度をいかに設定すべきか」

2. データ

通勤路の信号の数を$N+1$とし，最初の信号から順に信号$1, 2, \cdots, N+1$と呼び，信号iと$i+1$の区間を区間iと呼ぶことにする．ここでは$N=10$である．区間iの距離d_iは付表の第2列目の通りである(1/127,500の地図より測定)．信号の点滅は時間帯とブロックによって細かく制御されているが，私の通勤路の東(ひがし)大通りでは，どういうわけか，夕方の帰宅時にすべての信号が同時点滅(同時に赤，青，黄に変る)することがある．実測の結果，その時の青の点灯時間は$t=56$秒，赤と黄の点灯時間は$T=44$秒であった．私の場合，快適な自転車の速度sの範囲は，$S_0=8$ km 以上$S_1=16$km 以下である．次節での解析の都合上$D_j=d_1+d_2+\cdots+d_j, K_j=k_0+k_1+\cdots+k_j$ ($k_0=0$とす

る)，$M=t+T$ とする．

3. 解　析

この問題は，最初の信号(信号 1)が青になり，自転車がその交差点を渡りはじめてから最後の信号(信号 $N+1$) を渡り終るまでのあいだを考えればよい．いま仮に区間 i は，信号が青に変り自転車がその区間を渡りはじめてから数えてちょうど k_i 回目の青のときに渡りきるように決めたとしよう．k_i は 0 以上の整数で，$k_i=0$ は区間 i を渡りはじめたときの青の信号が赤に変ってしまわないうちに区間 i を渡りきることを意味している．いま，信号 1 が青に変った直後（この時刻を 0 とする)に速度 s km/hで区間 1 をスタートするとしよう．定義より，区間 1 は，信号が k_1 回目の青の時刻 k_1M からそれが赤に変る時刻 k_1M+t までのあいだに渡りきらなければならない．したがって不等式 $k_1M\leq d_1/s\leq k_1M+t$ が成立していなければならない．後での一般化のために，これを $k_1M-t\leq D_1/s-K_0M-t\leq k_1M$ のように変形しておこう．この不等式を満たす速度 s でスタートするとき，信号 2 は待たずに渡ることができ，したがってこの信号 2 が赤に変るまでのあいだに区間 2 を $A=s(k_1M-D_1/s+K_0M+t)=s(K_1M+t)-D_1$ km 進むことができる．よって，区間 2 の残りの距離は $d_2-A=D_2-s(K_1M+t)$ となる．そのときの時刻を改めて 0 としよう．そのとき信号はすでに赤に変ってしまっているので，区間 2 は，信号が k_2 回目の青に変る時刻 k_2M-t からそれが赤に変るまでの時刻 $k_2M(=(k_2M-t)+t)$ までのうちに渡りきらなければならない．したがって，不等式 $k_2M-t\leq D_2/s-K_1M-t\leq k_2M$ を得る．同様にして一般に $k_iM-t\leq D_i/s-K_{i-1}M-t\leq k_iM, 1\leq i\leq N,$ を得る．これは $D_i/(K_iM+t)\leq s\leq D_i/K_iM, 1\leq i\leq N,$ のように整理することができる．したがって，すべての区間を青で通り抜けることができるためには，速度 s は次の不等式を満たしていなければならない．

(1) $\max\limits_{1<i<N} D_i/(K_iM+t)\leq s\leq \min\limits_{1<i<N} D_i/K_iM$

$S_0\leq s\leq S_1.$

このような s がいつも存在するとはかぎらない．そこで次式を考える．

(2) $\max\limits_{1<i<J} D_i/(K_iM+t)\leq s\leq \min\limits_{1<i<J} D_i/K_iM$

$S_0\leq s\leq S_1 \quad 1\leq J\leq N.$

ある $J(1\leq J\leq N)$ に対して，上式を満たす s が存在すれば，それが区間 J まで青で通り抜けることができる速度をとなる．そのような s が存在する J のうちで最大のものを J^* とするとき，区間 J^*+1 より先の区間では別の速度を決めてやらなければならない．そのためには，区間 J^*+1 から最後の区間までを改めて区間 1 から区間 N とみなし，上と同じ議論を適用すればよい．

4. 計　算

$k_1, k_2, \cdots, k_{10}$ を試行錯誤的にいろいろと変えて計算した結果，往路では区間 1 から区間 9 までは時速 9.7km，区間10を時速 6.4km にし，帰路では全区間を時速9.8kmにするのがよいという結論を得た(付表の第 3, 4 列目)．

5. 実　施

さてここで，速度計などありようもないオンボロ自転車でこのようにして求めた速度をいかにして保つか，が問題となってくる．まず 9.7 km/h と 9.8 km/h という 2 つの速度はほとんど同じであるから，これらを 9.7 km/h で代表してもかまわないであろう．かくて 6.4 km/h と 9.7 km/h という 2 つの速度を，後者は前者のほぼ 1.5 倍という感じで覚えておけばいいことになる．この 2 つの速度をペダルを踏む脚の回転数で覚えるのはいたって簡単である．前者の 6.4 km/h は古曲「さくらさくら」に，後者の 9.7 km/h はラベル作曲の「ボレロ」に合わせればいいのである．かくて，素っ気ないORは香り高い芸術と融合し得るや否や，という私の永年の命題にも肯定的に答が与えられた．

6. 考　察

以上の計算は，横軸に時間，縦軸に信号の位置をとったグラフ上に信号点滅のバー・チャートを描くことによっても簡単に解くことができる．しかし，すべての信号が同時点滅しないなどより複雑な場合をいちいちグラフを書いて解くなどというのは，かなり大変な仕事になろう．より一般的な，したがってより現実的なケースをコンピュータを使って解くといった場合には，計算に必要な数式あるいはアルゴリズムが必要になってくる．ここでのべた方法は，そのための1つの手がかりを与えるであろう．このモデルを，単に交通問題としてだけではなく，もっと一般的な観点から眺めると次のようなモデルが浮び上がってくる．

「物事の進行を阻害する閉塞が何段階にもわたってランダムに発生する（これを仮に**ブロック現象**と呼ぼう）というような物理的，あるいは経営，経済学的現象において，その進行努力をできるだけ均一にし，ブロックによる中断をできるだけ受けずに，かつできるだけ速やかに目的を達するには，進行努力をいかにコントロールすべきか」

表 1　各区間の距離と速度

区間 i	距離 d_i	速度(往)	速度(帰)
1	278m	〃	〃
2	278m	〃	〃
3	306m	〃	〃
4	500m	〃	〃
5	278m	9.7km/h	9.8km/h
6	361m	〃	〃
7	222m	〃	〃
8	722m	〃	〃
9	417m	〃	〃
10	278m	6.4km/h	〃