

# QNA: Queueing Network Analyzer

## について (2)

木村 俊一

### 4. 点過程の再生過程による近似

QNの各ノードへの到着過程は、一般には再生過程ではない。あるノードからの客の退去過程についてさえも、退去時間間隔は系列相関をもっている。まして、複数のノードからの退去過程が分岐され、重ね合わされた確率過程が、再生過程であり得るはずがないことは明らかである。このように複雑な確率構造をもつ非再生過程を、最初のいくつかのモーメントを合わせるという意味で、適当な再生過程で近似することを考える。

#### 4.1 点過程の表現

$R_+=[0, \infty)$ 上の点過程(point process)として、各ノードへの到着過程を考察する。この点過程は、その総数が無限個の到着時点を表わす点を含んでいるが、 $R_+$ 内の有界な区間内では、その点の数は有限であると仮定する。

$S_n(n \geq 1)$ で第  $n$  番目の点の位置( $R_+$ 内の座標)を表わすことにしよう。 $n=0$ に対しては、 $S_0=0$ とおく。第  $(n-1)$ 番目と第  $n$  番目の点の間隔を  $X_n=S_n-S_{n-1}(n \geq 1)$ で表わす。また、 $\{N(t), t \geq 0\}$ で、区間  $[0, t]$ 内の点の数を記録する計数過程(counting process)を表わすことにする。 $\{S_n\}$ を用いて定義すると、

$$N(t) = \max \{n \geq 0 | S_n \leq t\}, \quad t \geq 0 \quad (4.1)$$

となる。すべての  $n$  と  $t$  に対して、2つの事象  $\{S_n \leq t\}$  と  $\{N(t) \geq n\}$  は等価であるから、 $\{N(t)\}$  が与えられたとき、 $\{S_n\}$  と  $\{X_n\}$  は次のように構成することができる。

$$S_0 = 0 \quad (4.2)$$

$$S_n = \min \{t \geq 0 | N(t) \geq n\}, \quad n \geq 1$$

$$X_n = S_n - S_{n-1} \quad (4.3)$$

以上より、確率過程  $\{S_n\}$ ,  $\{X_n\}$ ,  $\{N(t)\}$  は、同一の点過程の3つの異なった表現になっていることがわかる。

近似の対象となる点過程に対して、通常その定常性(stationarity)を仮定する。しかし、計数過程  $\{N(t)\}$  と区間系列  $\{X_n\}$  について、それぞれ異なった定常性の概念がある。計数過程  $\{N(t)\}$  が定常であるとは、 $k$  個の増分の組

$[N(t_1+h)-N(s_1+h), \dots, N(t_k+h)-N(s_k+h)]$ の同時分布が、すべての自然数  $k$  とすべての  $(s_1, \dots, s_k)$  および  $(t_1, \dots, t_k)$  ( $0 \leq s_i < t_i, i=1, \dots, k$ )の組に対して、 $h(>0)$  にはよらないことをいう。一方、区間系列  $\{X_n\}$  が定常であるとは、 $k$  個の組

$[X_{n_1+h}, X_{n_2+h}, \dots, X_{n_k+h}]$ の同時分布が、すべての自然数  $k$  とすべての非負整数の組  $(n_1, \dots, n_k)$  に対して、自然数  $h$  によらないことをいう。

計数過程  $\{N(t)\}$  とそれに関連して(4.3)を用いて得られる区間系列は、必ずしも同時には定常となり得ないが、Palm 測度にもとづくある弱い条件下では、この2つの定常性の対応関係を示すことができる。

混同を避けるために、 $\{N_s(t)\}$  で定常な計数過程を表わし、(4.2), (4.3)で構成される区間系列を  $\{Y_n\}$  で表わすことにしよう。これに対して、定常区間系列  $\{X_n\}$  に対応する計数過程を  $\{N(t)\}$  で表わし、Palm 過程と呼ぶことにする。 $\{N(t)\}$  は、原点  $t=0$  において点が生じたという条件のもとでの  $\{N_s(t)\}$  とみなせることが知られている[11]。この対応を保証する十分条件として、 $\{N_s(t)\}$  に対し、 $EN_s(t) < \infty$ 、あるいは  $\lim_{t \rightarrow \infty} N_s(t)/t < \infty$  の内いずれかが満たされていることを仮定する。

この1対1対応関係は、次のように表現することもできる[6, p.40]。  $\Psi_k(t) \equiv P\{N_s(t)=k\}$ ,  $\Phi_k(t) \equiv P\{N(t)=k\}$  ( $k \geq 0$ )とおくと、 $t \geq 0$  に対し、

$$\Psi_0(t) = 1 - \lambda \int_0^t \Phi_0(u) du \quad (4.4)$$

$$\Psi_k(t) = \lambda \int_0^t \{\Phi_{k-1}(u) - \Phi_k(u)\} du, \quad k \geq 1$$

ここで、 $\lambda = EN_s(1)$  であり、計数過程の強度(intensity)と呼ばれる。(4.4)を  $\{\Phi_k(t)\}$  に関して逆に解くと、

$$\Phi_0(t) = -\frac{1}{\lambda} \Psi_0'(t) \quad (4.5)$$

$$\Phi_k(t) = \Phi_{k-1}(t) - \frac{1}{\lambda} \Psi_k'(t), \quad k \geq 1$$

を得る。\$X\_1, Y\_1\$ の分布関数をそれぞれ \$F, G\$ で表わすと、(4.2), (4.3) より、\$F(t) = 1 - \Phi\_0(t), G(t) = 1 - \Psi\_0(t)\$ の関係式が成り立つから、(4.4), (4.5) を用いて、

$$G(t) = \lambda \int_0^t \Phi_0(u) du = \lambda \int_0^t \{1 - F(u)\} du \quad (4.6)$$

$$F(t) = 1 + \frac{1}{\lambda} \Psi_0'(t) = 1 - \frac{1}{\lambda} G'(t) \quad (4.7)$$

が導かれる。

#### 4.2 定常区間法と漸近法

ある定常計数過程 \$\{N\_s(t)\}\$ で表現される点過程を、再生過程で近似することを考える。この再生過程の再生時間間隔の系列は \$\{X\_n\}\$ の近似であり、また、その計数過程は、Palm 過程 \$\{N(t)\}\$ の近似になっている。さらに、この再生過程の平衡再生過程 (equilibrium renewal process) は、\$\{N\_s(t)\}\$ の近似になっている [12, p. 44]。この節では、点過程を近似する再生過程の再生時間間隔の最初のいくつかのモーメントを導く基本的な 2 つの方法について述べる。

再生過程の区間系列を \$\{R\_n\}\$ で表わすことにする。このとき、\$\sum\_{k=1}^n R\_k\$ と \$S\_n = \sum\_{k=1}^n X\_k\$ の \$m\$ 次までのモーメントを一致させる方法が、ここで提案する近似法である。この一致をみるためには、モーメントそのものを扱うよりも、半不変係数 (semi-invariant, または cumulant) を用いたほうが便利である。ここで、ある確率変数 \$Z\$ の \$j\$ 次半不変係数 \$\beta\_j \equiv \beta\_j(Z)\$ は、\$\log E e^{tZ}\$ の Taylor 展開

$$\log E e^{tZ} = \sum_{j=0}^{\infty} \beta_j(Z) \frac{t^j}{j!}$$

の係数として定義され、\$j=1, 2, 3\$ に対しては、

$$\beta_1(Z) = EZ, \beta_2(Z) = \text{Var}(Z), \beta_3(Z) = E(Z - EZ)^3$$

という関係がある。より高次の半不変係数についても、モーメントとの間の対応関係が知られている [5, p. 65]。半不変係数を用いる利点は、独立で同一の分布にしたがう確率変数列 \$\{Z\_n\}\$ に対しては、すべての \$j\$ と \$n\$ について、

$$\beta_j\left(\sum_{k=1}^n Z_k\right) = n \beta_j(Z_1)$$

という性質をもっている点にある。この性質を用いると、\$\{R\_n\}\$ の \$m\$ 次までの半不変係数を、

$$\beta_j(R_1) \simeq \frac{1}{n} \beta_j(S_n), \quad j=1, \dots, m \quad (4.8)$$

によって近似することができる。この近似法は、区間個数 \$n\$ をパラメータとして含み、特に、\$n=1\$ を用いるとき、定常区間法 (stationary-interval method), \$n=\infty\$

を用いるとき、漸近法 (asymptotic method) と呼ばれる。すなわち、\$j=1, \dots, m\$ に対し、

$$\text{定常区間法: } \beta_j(R_1) = \beta_j(X_1) \quad (4.9)$$

$$\text{漸近法: } \beta_j(R_1) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \beta_j(S_n) \quad (4.10)$$

独立でない確率変数列 \$\{X\_n\}\$ に対しても、その和の期待値は各々の期待値の和に等しいことから、同一分布であることさえ仮定すれば、\$j=1\$ については、すべての \$n\$ に対し、\$\beta\_1(S\_n) = n \beta\_1(X\_1)\$ が成り立つ。したがって、(4.8) よりすべての \$n\$ に対し、\$\beta\_1(R\_1) = \beta\_1(X\_1)\$ が成り立つ。

\$j \geq 2\$ に対しては、半不変係数 \$\beta\_j(S\_n)\$ は確率変数列 \$\{X\_n\}\$ の間の相関に影響される。たとえば、分散 \$\beta\_2(S\_n)\$ は共分散を含み、

$$\beta_2(S_n) = \sum_{k=0}^{n-1} (n-k) \text{Cov}(X_1, X_{1+k}) \quad (4.11)$$

と表わされる。このことより、漸近法は \$\{X\_n\}\$ の間のあらゆる相関を含んでいるが、定常区間法は \$X\_1\$ の性質のみを用いて他の区間との相関をまったく無視していることがわかる。

漸近法については、点過程の表現として \$\{S\_n\}\$ の代わりに計数過程 \$\{N(t)\}\$ を用いることもできる。まず、

$$\theta_j = \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{t} \beta_j(N(t)), \quad j=1, \dots, m \quad (4.12)$$

とおき、\$\{\theta\_j\}\$ は有限の値をとると仮定する。\$\{N(t)\}\$ が再生過程であれば、\$\{\theta\_j\}\$ は \$\{R\_n\}\$ のモーメントの関数として表わすことができる [13]。\$\{R\_n\}\$ の分布関数を \$H\$、その \$j\$ 次モーメントを \$\mu\_j \equiv \mu\_j(H)\$ で表わすことにする。分布 \$H\$ に対し、\$\mu\_{m+1} < \infty\$ およびある \$k\$ についてた込み \$H^{\*k}\$ が絶対連続な部分をもつことを仮定する。このとき、\$\theta\_j\$ は \$\{\mu\_1, \dots, \mu\_j\}\$ の関数となり、\$j=1, 2\$ に対しては、

$$\theta_1 = \mu_1^{-1}, \quad \theta_2 = \mu_1^{-3} (\mu_2 - \mu_1^2) \quad (4.13)$$

と表わせる (\$j=3, 4\$ に対する表現は、[14, p. 133] 参照)。逆に \$\{\theta\_1, \theta\_2\}\$ が与えられたとき、\$\{\mu\_1, \mu\_2\}\$ を得るには、

$$\mu_1 = \theta_1^{-1}, \quad \mu_2 = \mu_1^3 \theta_2 + \mu_1^2 \quad (4.14)$$

を用いればよいことがわかる。(4.13), (4.14) は再生過程に対しては厳密に成立するが、一般の点過程に対しては近似でしかないことに注意しよう。

#### 4.3 分布のあてはめ

定常区間法あるいは漸近法によって得られた \$\{R\_n\}\$ の近似モーメントに、適当な分布をあてはめることを考える。モーメントそのものも応用上十分な情報をもっているが、次節で扱う重ね合わせ点過程の近似においては、定常区間法を用いるさいに、陽な分布形が必要となる。また、6章において、待ち時間の分布を近似するさいに

も必要である。

一般の点過程に対しては、(4.8)は近似にすぎないので、得られた $m$ 個の半不変係数をもつ非負確率変数の分布が常に存在するとは限らない。しかしながら、(4.8)は、平均と分散については $n$ によらず常に正の値を与えるため、 $m=2$ の範囲では何ら問題は生じない。この節では、QNAへの応用を考慮して、平均と変動係数のみを用いる分布のあてはめに議論を限定する。

あてはめの対象である分布 $H$ の密度関数を $h$ で、またその変動係数を $c \equiv c(H) = \sqrt{\mu_2 \mu_1^{-2} - 1}$ で表わすことにしよう。

$c=1$ となる分布 $H$ としては、指数分布

$$h(x) = \gamma e^{-\gamma x}, \quad x \geq 0, \gamma > 0 \quad (4.15)$$

をあてはめることにする。 $j$ 次モーメントは、 $\mu_j = j!/\gamma^j$ で与えられる。このあてはめは、待ち行列理論の中で指数分布が占める重要でかつ標準的な役割を考えると、きわめて自然なものといえる。

$c \neq 1$ のときにも、この指数分布に何らかの変換をほどこした分布が有用である。 $0 \leq c < 1$ と $c \geq 1$ の2つの場合に分けて考察してみよう。

#### High Variability ( $c \geq 1$ )

$c \geq 1$ のときには、 $H$ として、指数分布の1次結合をあてはめる。 $n$ 個の平均の異なる指数分布を1次結合した分布を $n$ 次の超指数分布(hyper-exponential distribution)と呼び、記号 $H_n$ で表わす。その密度関数は、

$$h(x) = \sum_{i=1}^n p_i \gamma_i e^{-\gamma_i x}, \quad x \geq 0 \quad (4.16)$$

$j$ 次モーメントは、 $\mu_j = j! \sum_{i=1}^n p_i / \gamma_i^j$ で与えられる。ここで、 $\gamma_i > 0$ ,  $p_i \geq 0 (i=1, \dots, n)$ ,  $\sum_{i=1}^n p_i = 1$ ,  $c(H_n) \geq 1$ となることは容易に示すことができる[7, p. 142]。明らかに、 $H_n$ を決定するパラメータには $(2n-1)$ 個の自由度があるから、最低次数 $n=2$ の場合でもその自由度は3となり、平均と変動係数だけで決定することはできない。 $H_2$ のパラメータの自由度を1つ下げる条件として、ここでは、均衡平均(balanced means):  $p_1/\gamma_1 = p_2/\gamma_2$ を仮定する。このとき、平均 $\mu_1$ 、変動係数 $c$ をもつ $H_2$ のパラメータは、

$$p_i = \frac{1}{2} \left( 1 \pm \sqrt{\frac{c^2 - 1}{c^2 + 1}} \right), \quad \gamma_i = \frac{2p_i}{\mu_1}, \quad i=1, 2 \quad (4.17)$$

で与えられ、この分布を記号 $H_2^b$ で表わす。

#### Low Variability ( $0 \leq c < 1$ )

$0 \leq c < 1$ のときには、 $H$ として、指数確率変数とある非負定数 $d$ との和の分布を用いることにする。この分布は、ずらし指数分布(shifted exponential distribution)と呼ばれ、記号 $M^d$ で表わされる。その

密度関数は、

$$h(x) = \gamma e^{-\gamma(x-d)}, \quad x \geq d, \gamma > 0 \quad (4.18)$$

変動係数は、 $c(M^d) = (1 + \gamma d)^{-1} \leq 1$ で与えられる。 $M^d$ を決定するパラメータは $\gamma$ と $d$ の2つだけであるから、 $\mu_1, c$ によって一意に決定され、

$$\gamma = (c\mu_1)^{-1}, \quad d = (1-c)\mu_1 \quad (4.19)$$

となる。

#### 4.4 重ね合わせ

$n$ 個の独立な点過程を重ね合わせた点過程を、再生過程で近似することを考える。 $\{N_i(t)\} (i=1, \dots, n)$ で重ね合わされる $n$ 個の計数過程を表わすと、

$$N(t) = \sum_{i=1}^n N_i(t), \quad t \geq 0 \quad (4.20)$$

によって重ね合わせ計数過程 $\{N(t)\}$ が定義される。要素となる過程 $\{N_i(t)\}$ は必ずしも再生過程である必要はないが、4.2節の方法により、再生過程による近似は常に可能であるから、以後すべての $\{N_i(t)\}$ は再生過程であると仮定する。

一般に、要素過程が再生過程であっても、 $\{N(t)\}$ は再生過程にはならない。唯一の例外は、すべての要素過程がポアソン過程の場合で、このとき $\{N(t)\}$ もまたポアソン過程になる[3]。また、全体の強度を固定して要素過程の数を増し、同時に各要素過程の強度を弱めてゆくと $\{N(t)\}$ がポアソン過程に収束することが知られている[3]。この事実は、 $n$ が大きい場合には、 $\{N(t)\}$ をポアソン過程で近似できることを意味しているが、Albin[1]による数値実験では、このポアソン近似は、要素過程の性質にも依存するが、 $n=1000$ 程度にならないと有効とはいえないことが判明している。QN内での各ノードからの退去過程の重ね合わせの数は、通常高々10のオーダーであるからポアソン近似はこの場合適当とはいえない。以上より、 $n$ の値が比較的小さい場合に対する $\{N(t)\}$ の近似が必要であることがわかる。

#### 定常区間法

$n$ 個の独立な定常計数過程 $\{N_{si}(t)\} (i=1, \dots, n)$ を考える。 $\{N_{si}(t)\}$ に対応するPalm過程の定常区間系列 $\{X_{in}\}$ の分布関数を $F_i$ 、その $j$ 次モーメントを $\mu_{ij}$ で表わす。

近似の対象となる定常重ね合わせ過程 $\{N_s(t)\}$ は、

$$N_s(t) = \sum_{i=1}^n N_{si}(t), \quad t \geq 0 \quad (4.21)$$

で定義される。 $\{N_s(t)\}$ に対応するPalm過程 $\{N(t)\}$ の定常区間系列 $\{X_n\}$ の分布関数 $F$ と、その $j$ 次モーメント $\mu_j \equiv \mu_j(F)$ を計算する。まず、 $\{N_s(t)\}$ と $\{N(t)\}$ は同一の強度をもつことから、(4.21)より、

$$\mu_1^{-1} \equiv \lambda = \sum_{i=1}^n \lambda_i \quad (4.22)$$

が直ちに得られる。ただし、 $\lambda_i = \mu_{i1}^{-1} (i=1, \dots, n)$ 。  
 4.1節と同様に、 $\{N_{si}(t)\}, \{N_s(t)\}$  の区間系列をそれぞれ  $\{Y_{in}\}, \{Y_n\}$  で表わし、またそれらの分布関数を、 $G_i, G$  で表わすことにする ( $i=1, \dots, n$ )。このとき、(4.6)より、

$$1 - G_i(t) = P\{Y_{i1} > t\} = \lambda_i \int_t^\infty \{1 - F_i(u)\} du$$

を得る。 $Y_1 = \min_i Y_{i1}$  の関係と要素過程間の独立性から、

$$\begin{aligned} 1 - G(t) &= P\{Y_1 > t\} \\ &= \prod_{i=1}^n P\{Y_{i1} > t\} \\ &= \prod_{i=1}^n \lambda_i \int_t^\infty \{1 - F_i(u)\} du \end{aligned}$$

が成り立つ。したがって、

$$G(t) = 1 - \prod_{i=1}^n \lambda_i \int_t^\infty \{1 - F_i(u)\} du \quad (4.23)$$

(4.7), (4.23)より、

$$1 - F(t) = \frac{1}{\lambda} \sum_{i=1}^n \lambda_i \{1 - F_i(t)\} \prod_{k \neq i} \lambda_k \int_t^\infty \{1 - F_k(u)\} du, \quad t \geq 0 \quad (4.24)$$

を得る、 $j$  次モーメント  $\mu_j(F)$  は、 $j \geq 2$  に対し、

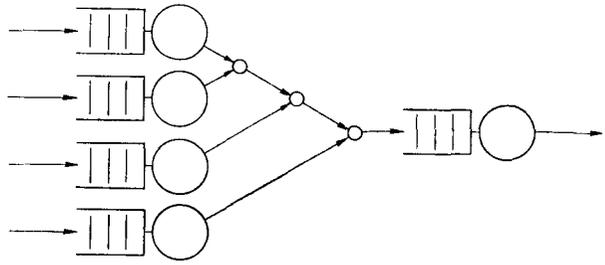
$$\begin{aligned} \mu_j &= \int_0^\infty j t^{j-1} \{1 - F(t)\} dt \\ &= \frac{1}{\lambda} j(j-1) \int_0^\infty [t^{j-2} \prod_{i=1}^n \lambda_i \int_t^\infty \{1 - F_i(u)\} du] dt \end{aligned} \quad (4.25)$$

で与えられる。

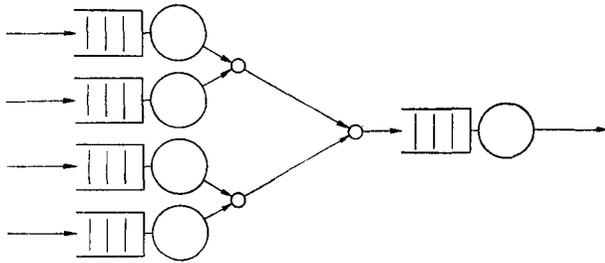
分布  $F$  の変動係数を計算するためには、 $\mu_2$  に対する (4.25) の  $(n+1)$  重積分を、解析的あるいは数値的に評価する必要があるが、これは容易ではない。Kuehn[8]は、要素過程の分布  $F_i$  をその変動係数に応じて  $M^d$  または  $H_2^b$  で置き換え、同時には 2 個ずつの重ね合わせをくりかえすことで、積分を含まない  $\mu_2$  の近似法を提案している。Whitt[14]は、Kuehnの方法を少し修正して、 $n$  個の要素過程を 2 個ずつ対にし、ツリー状に重ね合わせてゆく方法を提案している。いずれの方法も、変動係数に応じた対の構成法に関する考察が欠落しているため、さらに研究が必要である。

Kuehn や Whitt らの近似法を考慮して、定常区間法による 2 つの独立な再生過程の重ね合わせ点過程を再生過程で近似する手順をまとめておこう。

- [ステップ 1]  $F_i (i=1, 2)$  の平均と変動係数を求める。
- [ステップ 2] (4.22) を用いて、 $F$  の平均を計算する。
- [ステップ 3]  $c(F_i)$  に応じて  $F_i$  を  $M^d$  または  $H_2^b$  で近似し、(4.25) を用いて、 $c(F)$  を計算する。
- [ステップ 4] もし必要ならば、 $F$  の近似分布として  $M^d$  または  $H_2^b$  をあてはめる。



(a) Kuehn の近似法



(b) Whitt の近似法

図 4.1 重ね合わせ；定常区間法における近似

### 漸近法

(4.20) で示されるように、点過程の重ね合わせは独立な計数過程の和として表わされるから、 $\{X_n\}$  や  $\{S_n\}$  よりも計数過程を点過程の表現として用いたほうが扱いやすい。(4.20) の両辺の  $j$  次半不変係数をとると、

$$\beta_j(N(t)) = \sum_{i=1}^n \beta_j(N_i(t)), \quad t \geq 0 \quad (4.26)$$

となり、(4.14) と同様に、各要素過程の漸近的性質から分布  $F$  のモーメントを得ることができる。

要素過程  $\{N_i(t)\}$  に対し、

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{t} \beta_j(N_i(t)) = \theta_{ij}, \quad i=1, \dots, n, \quad j=1, \dots, m$$

と定義し、すべての  $i, j$  について  $\theta_{ij} < \infty$  と仮定する。このとき、(4.26) より、 $j=1, \dots, m$  に対し、

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{t} \beta_j(N(t)) \equiv \theta_j = \sum_{i=1}^n \theta_{ij} \quad (4.27)$$

を得る。(4.14) を用いると、分布  $F_i$  の変動係数は、

$$c^2(F_i) = \mu_{i2}^{-2} (\mu_{i2} - \mu_{i1}^2) = \theta_{i2} / \theta_{i1}$$

と表わせる。(4.27) より、分布  $F$  の平均と変動係数は、

$$\mu_1^{-1} = \lambda = \sum_{i=1}^n \lambda_i \quad (4.28)$$

$$c^2(F) = \sum_{i=1}^n \frac{\lambda_i}{\lambda} c^2(F_i) \quad (4.29)$$

と求められる。さらに高次のモーメントについても、同様に導くことができる。

漸近法による  $n$  個の独立な再生過程の重ね合わせ点過程を再生過程で近似する手順をまとめておこう。

表 4.1 2つの再生過程の重ね合わせに対する $c^2(F)$ の近似 (上段: 定常区間法, 下段: 漸近法)

| $c_1^2 \backslash c_2^2$ | 0.33         | 0.67         | 1.00         | 2.00         | 10.00         |
|--------------------------|--------------|--------------|--------------|--------------|---------------|
| 0.33                     | 0.46<br>0.33 | 0.56<br>0.50 | 0.66<br>0.67 | 0.74<br>1.17 | 0.88<br>5.17  |
| 0.67                     |              | 0.70<br>0.67 | 0.82<br>0.83 | 0.97<br>1.33 | 1.20<br>5.33  |
| 1.00                     |              |              | 1.00<br>1.00 | 1.18<br>1.50 | 1.51<br>5.50  |
| 2.00                     |              |              |              | 1.50<br>2.00 | 2.24<br>6.00  |
| 10.00                    |              |              |              |              | 5.50<br>10.00 |

[ステップ1]  $F_i (i=1, \dots, n)$  の  $m$  次までのモーメントを求め (ここでは  $m=2$  としている).

[ステップ2] (4.13) を用いて,  $\{\theta_{ij}\}$  を計算する.

[ステップ3] (4.27) を用いて,  $\{\theta_j\}$  を計算する.

[ステップ4] (4.14) を用いて,  $\{\mu_j\}$  を計算する.

[ステップ5] もし必要ならば,  $F$  の近似分布として  $M^a$  または  $H_2^b$  をあてはめる.

表 4.1 は, 2つの独立な再生過程の重ね合わせに関して, 定常区間法と漸近法による変動係数の近似を比較したものである[17]. ただし, 表中では, 変動係数の2乗の値が示されており, 要素過程の強度は,  $\lambda_1 = \lambda_2 = 0.5$  に固定してある. 2つの近似解は,  $c^2(F_i) = 1 (i=1, 2)$  のときには, ポアソン過程の重ね合わせに相当するので, 両者は確かに一致している. しかし, 他の組み合わせ, 特に, 少なくとも一方が大きな変動係数をもつ場合には, かなり異なった結果を与えることがわかる. このことは要素過程での変動が大きい場合には, 広範囲で正確で, かつ簡単な再生過程近似を得ることが容易ではないことを示している.

## 5. 内部到着過程

QN の各ノードへの到着過程は, 外部から到着した客と他のノードから退去した客が, 分岐され重ね合わされて, 複雑な構造の点過程を形成している. この章では, 前章の再生過程近似に関する結果を利用して, 内部到着を表わす点過程の区間系列の平均と変動係数を与える方程式を導く.

### 5.1 トラヒック率方程式

ノード  $i (i=1, \dots, n)$  への客の総到着率を  $\lambda_i$ , ノード  $i$  からの退去率を  $\delta_i$  で表わすと, 一般的に,  $\delta_i = \lambda_i \gamma_i$  の関係がある. ここで,  $\gamma_i$  は 2.1 節で標準入力 of オプションとして示された客の生成・結合に関する乗数である.

$\{\lambda_i\}$  を導く方程式は, Jackson 型 QN 等のマルコフモデルと同様に, そのノードでの到着と退去の率の平衡を示す関係式に他ならない. すなわち,

$$\lambda_j = \lambda_{0j} + \sum_{i=1}^n \lambda_i \gamma_i q_{ij}, \quad j=1, \dots, n \quad (5.1)$$

で与えられる. (5.1) はトラヒック率方程式 (traffic rate equations) と呼ばれ, 行列表記を用いると,

$$A = A_0(I - \Gamma Q)^{-1} \quad (5.2)$$

の形に書き直すことができる. ここで,  $A = (\lambda_1, \dots, \lambda_n)$ ,  $A_0 = (\lambda_{01}, \dots, \lambda_{0n})$ ,  $I = (\delta_{ij})$  (単位行列),  $\Gamma = (\gamma_{ij})$  ( $\gamma_{ii} = \gamma_i, \gamma_{ij} = 0 (i \neq j)$ ). 行列  $\Gamma Q$  のスペクトル半径 (spectral radius) を  $sp(\Gamma Q)$  で表わすと, (5.1) の解が一意に存在するための必要十分条件は,  $sp(\Gamma Q) < 1$  となる. この条件は, 客の生成または結合が起こる場合には, 特にチェックの必要がある.

(5.1) の解  $\{\lambda_i\}$  を用いて, 各ノードでのトラヒック密度, または利用率 (utilization)

$$\rho_i = \lambda_i \tau_i / m_i, \quad i=1, \dots, n \quad (5.3)$$

が求められる.  $\rho_i < 1$  であるノードは安定 (stable) であるといい, 逆に,  $\rho_i \geq 1$  となるノードは不安定 (unstable) であるという. QN 内に 1 つでも不安定なノードがあるときには, QNA はエラー・メッセージとトラヒック密度の値を出力して停止する.

ノード  $i$  における呼量 (offered load) は,

$$\alpha_i = \lambda_i \tau_i, \quad i=1, \dots, n \quad (5.4)$$

で定義され, 平均稼働窓口数に一致する.  $\alpha_i$  と  $\rho_i$  は, 単一窓口ノードに対しては明らかに一致し,  $\alpha_i$  のほうが窓口数が多くなるにつれて, その意味が明確な分だけ  $\rho_i$  よりも有用になってくる.

ノードに関するこれらの諸量を計算した後, QNA は, QN の枝に関する次の特性量を計算し出力する.

$\lambda_{ij} = \lambda_i \gamma_i q_{ij}$ : ノード  $i$  からノード  $j$  への内部到着率

$p_{ij} = \lambda_{ij} / \lambda_j$ : ノード  $j$  への到着客の内, ノード  $i$  からの客の割合

$p_{0j} = \lambda_{0j} / \lambda_j$ : ノード  $j$  における外部到着客の割合

$d_i = \lambda_i \gamma_i (1 - \sum_{j=1}^n q_{ij})$ : ノード  $i$  から QN 外部への退去率

$d_0 = \sum_{i=1}^n d_i$ : QN 外部への総退去率

### 5.2 トラヒック変動方程式

ノード  $i (i=1, \dots, n)$  への客の到着時間間隔の変動係数を  $c_{ai}$  で表わすことにする. このとき,  $\{c_{ai}^2\}$  は, 連立 1 次方程式

$$c_{aj}^2 = a_j + \sum_{i=1}^n c_{ai}^2 b_{ij}, \quad j=1, \dots, n \quad (5.5)$$

の解として与えられる. (5.5) はトラヒック変動方程式

表 5.1  $\Sigma GI_i/M/1$  待ち行列に対する近似の平均相対誤差 (%)

| $\rho$ | 定常区間法 |    | 漸近法 |     | $n$ | 定常区間法 |  | 漸近法 |  |
|--------|-------|----|-----|-----|-----|-------|--|-----|--|
|        |       |    |     |     |     |       |  |     |  |
| 0.3    | 0     | 19 | 2   | -18 | 12  |       |  |     |  |
| 0.5    | -5    | 36 | 4   | -20 | 22  |       |  |     |  |
| 0.7    | -19   | 38 | 8   | -19 | 31  |       |  |     |  |
| 0.8    | -28   | 28 | 16  | -16 | 42  |       |  |     |  |
| 0.9    | -39   | 13 |     |     |     |       |  |     |  |

(traffic variability equations) と呼ばれ, 定数  $a_j$ ,  $b_{ij}$  は,

$$a_j = 1 + w_j [p_{0j} c_{0j}^2 - 1 + \sum_{i=1}^n p_{ij} \{ (1 - q_{ij}) + (1 - w_{ij}) \gamma_i q_{ij} \rho_i^2 x_i \}] \quad (5.6)$$

$$b_{ij} = w_j p_{ij} q_{ij} \gamma_i \{ w_{ij} + (1 - w_{ij}) (1 - \rho_i^2) \} \quad (5.7)$$

と表わされる. ここで,  $x_i, w_{ij}$  は, ノード  $i$  からの退去に, また,  $w_j$  はノード  $j$  における重ね合わせに関係したパラメータで, これまでに求められた  $\rho_i, p_{ij}$  等のデータのみを用いて表わすことができる. QNA の第 1 版では,

$$x_i = 1 + m_i^{-0.5} \{ \max(c_{si}^2, 0.2) - 1 \} \quad (5.8)$$

$$w_{ij} = 0 \quad (5.9)$$

$$w_j = \{ 1 + 4(1 - \rho_j)^2 (\nu_j - 1) \}^{-1} \quad (5.10)$$

が用いられている. ここで,

$$\nu_j = \left( \sum_{i=0}^n p_{ij} \right)^{-1} \quad (5.11)$$

((5.10), (5.11) と (2.8), (2.9) との対応に注意しよう).

以下の小節では, 方程式 (5.5) の導出手順を, 内部到着過程を形成する重ね合わせ, 分岐, 退去の 3 つの要因に分けて述べる.

### 5.2.1 重ね合わせ

表記法の混乱を避けるために, まず, 4.4 節の結果を QNA での記号を用いてまとめておこう. 定常区間法および漸近法によるノード  $j$  ( $j=1, \dots, n$ ) への内部到着過程の変動係数の近似を, それぞれ,  $c_{SI}(j)$  および  $c_A(j)$  で表わすことにする. 定常区間法については, (4.22), (4.25) より,

$$c_{SI}^2(j) = 2\lambda_j \int_0^\infty \left[ \prod_{i=0}^n \lambda_{ij} \int_t^\infty \{ 1 - F_{ij}(u) \} du \right] dt - 1 \quad (5.12)$$

と求められる. ただし,  $F_{ij}(i=0, \dots, n, j=1, \dots, n)$  は, ノード  $i$  (または外部) から退去した客のノード  $j$  への到着時間間隔分布を表わす. また, 漸近法については, (4.28), (4.29) より,

$$c_A^2(j) = \sum_{i=0}^n \frac{\lambda_{ij}}{\lambda_j} c_{ij}^2 = \sum_{i=0}^n p_{ij} c_{ij}^2 \quad (5.13)$$

となる. ただし,  $c_{ij} = c(F_{ij})$ .

表 5.2 ハイブリッド法における重み関数

| 変数          | 重み関数                           | 最適パラメータ            | 平均相対誤差 (%) |
|-------------|--------------------------------|--------------------|------------|
| —           | $a$                            | $a=0.4$            | 12         |
| $\nu$       | $a\nu^{-1}$                    | $a=1.5$            | 11         |
| $\nu$       | $(1+a\nu)^{-1}$                | $a=0.2$            | 10         |
| $\nu$       | $(a+b\nu)^{-1}$                | $a=1.1$<br>$b=0.3$ | 10         |
| $\rho, \nu$ | $\{ 1 + a(1-\rho)b\nu \}^{-1}$ | $a=6.0$<br>$b=2.2$ | 3          |
| $\rho, \nu$ | $a\rho b\nu$                   | $a=0.9$<br>$b=0.4$ | 5          |

表 4.1 でも示されたように, 定常区間法と漸近法は, 要素過程の構成によっては非常に大きな差異を生じる. Albin [2] は, これら 2 つの近似と真の値との関係を調べるために, 重ね合わせ到着過程をもつ全部で 180 通りの  $\Sigma GI_i/M/1$  待ち行列に対して, シミュレーションを行なった. 彼女は, シミュレーションによって得られた平均系内客数を,  $c_{SI}, c_A$  に 4.3 節の方法ではめた分布を到着分布とする  $GI/M/1$  待ち行列の平均系内客数と比較することで, 定常区間法と漸近法のもつ誤差の平均的特徴を明らかにした. 表 5.1 は, これら 2 つの近似の平均相対誤差と  $\rho, n$  との関係を示したものである. 表中で, 定常区間法については, (5.12) を直接計算せずに Whitt の近似法 (4.4 節) を用いている.

この表より定常区間法と漸近法は, 誤差の符号に関しては互いに逆の傾向をもち, 各々単体として用いるよりは何らかの方法で組み合わせるほうが, より精度の高い近似が期待できることがわかる. Albin [2] は, このような組合せ法として,  $c_{SI}^2$  と  $c_A^2$  の 1 次結合  $c_H^2 = w c_A^2 + (1-w) c_{SI}^2$  (5.14) を提案し, これをハイブリッド法 (hybrid method) と呼んでいる. ここで,  $w$  は重み関数 (weighting function) と呼ばれ, トラフィック密度  $\rho$  と “実効” 要素過程数  $\nu$  の関数になっている. ノード  $j$  における実効要素過程数  $\nu_j$  は (5.11) で定義され, 特にすべての要素過程の強度が等しいときには,  $\nu_j = n$  となる.

定常区間法と漸近法の性質から,  $w \equiv w(\rho, \nu)$  は次の 4 つの条件を満たす必要がある.

- 1°.  $0 \leq w(\rho, \nu) \leq 1$
- 2°.  $\rho \rightarrow 1$  のとき,  $w(\rho, \nu) \rightarrow 1$
- 3°.  $\rho \rightarrow 0$  のとき,  $w(\rho, \nu) \rightarrow 0$
- 4°.  $\nu \rightarrow \infty$  のとき,  $w(\rho, \nu) \rightarrow 0$

ここで 2° は, 重負荷のときには漸近法が正確になり, 3°

は、軽負荷のときに定常区間法が正確になることから課せられる。また、4°は、要素過程の数が大きいときには、定常区間法は正しくポアソン過程に収束するが、漸近法はそのような性質をもたないことよっている。さらに、Franken[4]の極限定理から、 $\nu$ が大きいときには、 $w(\rho, \nu)$ は、 $\nu^{-1}$ のオーダーで減少することも知られている。

表 5.2は、これらの条件を満たす  $w$  の候補関数と、シミュレーションとの比較による各々のパラメータの最適値を示したものである。平均相対誤差は、180通りの  $\sum GI_i/M/1$  待ち行列について、相対誤差を算術平均して求めている[2]。この表から、重み関数

$$w = \{1 + 6(1 - \rho)^{2.2} \nu\}^{-1} \quad (5.15)$$

を用いれば、かなり精度が改良されることがわかる([2]では、 $\sum GI_i/G/1$ についても数値検証を行なって、(5.15)の有効性を確かめている)。

しかし、 $c_{SI}^2$ は  $c_{ij}^2$  に関して非線形であるため扱いにくく、このため  $c_H^2$  もまた同じ性質をもっている。そこで、Albin は、この点を改良するために、 $c_{SI}$  を指数分布の変動係数である 1 で置き換えることを提案している。すなわち、

$$c_H^2 = w c_A^2 + (1 - w) \quad (5.16)$$

このとき、重み関数  $w$  についても、

$$w = \{1 + 2.1(1 - \rho)^{1.5} \nu\}^{-1} \quad (5.17)$$

に置き換える必要がある。(5.16)は、 $c_{ij}^2$  に関して線形で扱いやすく、また、平均相対誤差についても、 $\sum GI_i/M/1$  待ち行列については 4%で、(5.15)の 3%とほとんど変わらないことが確かめられている。

QNA では、(5.17)で与えられる重み関数が、 $w(\rho, 1) = 1$  を満たさないこと、さらには、重負荷における  $\sum GI_i/G/m$  に関する Newell[10]、Whitt [20] らの新たな研究成果を考慮して、ノード  $j$  における重み関数  $w_j$  を、(5.10)の形に修正して用いている。

**注意 5.1** クラス・ルート入力から標準入力への仕様変換(2.7)~(2.9)も、ハイブリッド法を用いて導かれたものである。

### 5.2.2 分岐

再生過程のある確率分布にしたがって分岐したとき、個々の分岐された枝の上での点過程もまた再生過程となる。それゆえ、QN 内の各ノードからの退去過程を再生過程とみなす近似の下では、マルコフ的経路選択によって分岐された後続のノードへの到着過程もまた再生過程となる。

簡単のため、変動係数  $c_d$  をもつ退去過程が、確率  $p_j$  ( $j=1, \dots, k$ ) で、 $k$  個の点過程に分岐される場合を考えよう。退去時間間隔の分布の LS 変換を  $\phi(s)$ 、第  $j$  番目の

分岐点過程の区間系列分布の LS 変換を  $\phi_j(s)$  とすると (3.2) と同様にして、

$$\phi_j(s) = \frac{p_j \phi(s)}{1 - (1 - p_j) \phi(s)}, \quad j=1, \dots, k$$

が容易に導かれる。 $\phi_j(s)$  を  $s$  に関して微分することにより、分岐点過程の変動係数  $c_j$  が、

$$c_j^2 = p_j c_d^2 + 1 - p_j, \quad j=1, \dots, k \quad (5.18)$$

と求められる。

### 5.2.3 退去

#### 定常区間法

定常区間法によって複数窓口ノードの退去過程を解析することは容易ではない。しかし、単一窓口のノードに対しては、 $GI/G/1$  待ち行列の退去過程に関する Marshall [9]の結果から、退去過程の変動係数を、

$$c_d^2 = c_a^2 + 2\rho^2 c_s^2 - 2\rho(1 - \rho)EW/\tau \quad (5.19)$$

と表わすことができる。ここで、 $EW$  は、 $GI/G/1$  待ち行列の平均待ち時間を表わしている。(5.19)より、ノードでの輻輳状態が変動係数  $c_d$  に強い影響をおよぼすことがわかる。Whitt [15, 16]は、ある不等式による  $EW$  の評価から、

$$EW \approx \frac{(c_a^2 + c_s^2)\tau\rho}{2(1 - \rho)}$$

が、簡単ではあるが、十分に良い近似を与えることを示した(6.1節参照)。この近似式を用いると、 $c_d^2$  が、

$$c_d^2 = \rho^2 c_s^2 + (1 - \rho^2) c_a^2 \quad (5.20)$$

という、 $c_a^2, c_s^2$  に関して線形な形で与えられる。ここでは、(5.20)にもとづいて、複数窓口ノードの退去過程の変動係数を、次の式によって近似する。

$$c_d^2 = 1 + (1 - \rho^2)(c_a^2 - 1) + \rho^2 m^{-0.5}(c_s^2 - 1) \quad (5.21)$$

明らかに、 $m=1$  のとき(5.21)は(5.20)に一致し、(5.20)の1つの拡張になっている。また、 $M/M/m$  あるいは  $M/G/\infty$  待ち行列に対しては、(5.21)は  $c_d^2 = 1$  を与えるが、この結果は、これらの待ち行列の退去過程がポアソン過程になるという事実と一致している。しかしながら、数値実験との比較から、サービス時間が一定分布にしたがう( $c_s^2=0$ )ときには、(5.21)は  $c_d^2$  を過小評価する傾向があることが示されている。このため、QNA の第1版では、(5.21)の代わりに、 $c_d^2 = 1 + (1 - \rho^2)(c_a^2 - 1) + \rho^2 m^{-0.5} \{\max(c_s^2, 0.2) - 1\}$  (5.22)を用いている。いずれにしても、複数窓口ノードの退去過程に関しては、まだ研究の余地がかなり残されている[19]。

#### 漸近法

次に、退去過程の漸近的な性質から、その変動係数  $c_d$

を導いてみよう。

時間区間 $[0, t]$ 内のあるノードへの総到着客数を $A(t)$ 、そのノードからの総退去客数を $D(t)$ で表わすことにする。また、時刻 $t$ におけるそのノードでの客数を $Q(t)$ で表わすことにする。このとき、これらの過程の間には、

$$D(t) = A(t) - Q(t) + Q(0), \quad t \geq 0 \quad (5.23)$$

の関係がある。Whitt[21]は、関係式(5.23)より、

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{t} \beta_j(D(t)) = \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{t} \beta_j(A(t)), \quad j \geq 1 \quad (5.24)$$

が、次の条件を仮定することにより導かれることを示した。

$$\sup_t E[|Q(t) - Q(0)|^k] < \infty, \quad k \geq 1 \quad (5.25)$$

(5.24)は、漸近法による退去過程の近似が、到着過程のそれと等価であることを示している。したがって、変動係数については、 $c_a = c_a$ が成り立つ。

#### ハイブリッド法

5.2.1節における重ね合わせのときと同様に、定常区間法と漸近法による退去過程の近似を組み合わせることで、近似精度の改良をはかってみよう。しかし、退去過程の近似に関しては、重ね合わせの場合と異なり、定常区間法のほうが漸近法よりも、重負荷を除けば常に良い近似を与えることが数値実験からわかっている。したがって、ハイブリッド法における重み関数の決め方が問題になる。

Whitt[18]は、退去過程の近似の精度が、後続のノードでの輻輳状態と密接に関連していることを示し、そのトラヒック密度の関数として重み関数を決定することを提案している。一般に、あるノードから退去した客は、分岐後それぞれ異なったトラヒック密度のノードへ進むことから、この重みづけは分岐による変換の後に行なわなければならない。ノード $i$ からの退去過程の変動係数を $c_{di}$ で表わすと、(5.18)より、ノード $j$ へ進む客の分岐退去過程の変動係数 $c_{ij}$ は、

$$c_{ij}^2 = q_{ij} c_{di}^2 + 1 - q_{ij} \quad (5.26)$$

で与えられる。(5.26)の $c_{di}^2$ を定常区間法および漸近法によって近似し、これらを重み関数 $w_{ij} \in [0, 1]$ によって1次結合すると、

$$c_{ij}^2 = w_{ij} (q_{ij} c_{di}^2 + 1 - q_{ij}) + (1 - w_{ij}) [q_{ij} \{ (1 - \rho_i^2) c_{ai}^2 + \rho_i^2 x_i \} + 1 - q_{ij}] \quad (5.27)$$

を得る。重ね合わせの場合と同様に、漸近法は重負荷のときに漸近的に正しい解を与えることから、重み $w_{ij}$ は、 $\rho_j$ の増加関数で、 $\rho_j \rightarrow 1$ のとき $w_{ij} \rightarrow 1$ を満たすように選ぶべきである。しかし、残念ながら、これまでのところ、適当な重み関数が見つけられていないため[21]、

QNAの第1版では(5.9)を用いている。

**注意 5.2** ノード $i$ でのサービス終了後、客の生成または結合が行なわれる場合には、QNAでは、漸近法により退去過程の変動係数の2乗の値を $\gamma_i c_{di}^2$ に変換している。この変換は、分岐による変換の前に行なわなければならない。

#### 5.2.4 (5.5)~(5.7)の導出

5.2.1~5.2.3節の結果を総合すると、内部到着過程の変動係数は、次の式によって与えられる。

$$\begin{aligned} c_{aj}^2 &= 1 - w_j + w_j \sum_{i=0}^n p_{ij} c_{ij}^2 \\ &= 1 - w_j + w_j [p_{0j} c_{0j}^2 + \sum_{i=1}^n p_{ij} \{ w_{ij} (q_{ij} \gamma_i c_{ai}^2 \\ &\quad + 1 - q_{ij}) + (1 - w_{ij}) [q_{ij} \gamma_i \{ (1 - \rho_i^2) c_{ai}^2 + \rho_i^2 x_i \} \\ &\quad + 1 - q_{ij}] \}] \end{aligned} \quad (5.28)$$

(5.28)を整理すると、トラヒック変動方程式(5.5)と、その係数(5.6)、(5.7)を得る。

#### 参考文献

- [1] Albin, S. L., "On Poisson Approximations for Superposition Arrival Processes in Queues," *Mgmt. Sci.*, **28**, 126-137 (1982).
- [2] Albin, S. L., "Approximating a Point Process by a Renewal Process, II: Superposition Arrival Processes to Queues," *Opns. Res.*, to appear.
- [3] Çinlar, E., "Superposition of Point Processes," *Stochastic Point Processes: Statistical Analysis, Theory and Applications*, pp. 549-606, P. A. Lewis (ed.), John Wiley & Sons, New York, 1972.
- [4] Franken, P., "A Refinement of the Limit Theorem for the Superposition of Independent Renewal Processes," *Theory Prob. Appl.*, **8**, 320-327 (1963).
- [5] Gnedenko, B. V. and A. N. Kolmogorov, *Limit Distributions for Sums of Independent Random Variables*, Ed. 2, Addison-Wesley, Reading, 1968.
- [6] Khintchine, A. Y., *Mathematical Methods in Queueing Theory*, Griffin, London, 1960.
- [7] Kleinrock, L., *Queueing Systems, Vol. I: Theory*, Wiley-Interscience, New York, 1975.
- [8] Kuehn, P. J., "Approximate Analysis of General Queueing Networks by Decompo-

- sition," *IEEE Trans. Comm.*, COM-27, 113-126 (1979).
- [9] Marshall, K. T., "Some Inequalities in Queueing," *Opns. Res.*, 16, 651-665 (1968).
- [10] Newell, G. F., "Approximations for Superposition Arrival Processes in Queues," *Mgmt. Sci.*, to appear.
- [11] Port, S. C. and C. J. Stone, "Spacing Distribution Associated with a Stationary Random Measure on the Real Line," *Ann. Prob.*, 3, 387-394 (1977).
- [12] Ross, S. M., *Applied Probability Models with Optimization Applications*, Holden-Day, San Francisco, 1970.
- [13] Smith, W. L., "On the Cumulants of Renewal Processes", *Biometrika*, 46, 1-29(1959).
- [14] Whitt, W., "Approximating a Point Process by a Renewal Process, I: Two Basic Methods," *Opns. Res.*, 30, 125-147 (1982).
- [15] Whitt, W., "Refining Diffusion Approximations for Queues," *Opns. Res. Letters*, 1, 165-169 (1982).
- [16] Whitt, W., "The Marshall and Stoyan Bounds for IMRL/G/1 Queues are Tight," *Opns. Res. Letters*, 1, 209-213(1982).
- [17] Whitt, W., "Approximations for Networks of Queues," *Proc. 10th International Teletraffic Congress*, Montreal, 1983.
- [18] Whitt, W., "The Queueing Network Analyzer," *Bell System Tech. J.*, 62, 2779-2815 (1983).
- [19] Whitt, W., "Departures from a Queue with Many Busy Servers," *Math. Opns. Res.* to appear.
- [20] Whitt, W., "Queues with Superposition Arrival Processes in Heavy Traffic," submitted for publication.
- [21] Whitt, W., "Approximations for Departure Processes and Queues in Series," *Nav. Res. Log. Qtr.*, to appear.



ラッセル L. エイコフ著 川瀬武志/辻新六 共訳

## 問題解決のアート

建帛社 1983年 274頁 3200円

企業がかかえる問題に十分満足できる答を与えるのは、容易なことではない。問題解決にいたるまでの過程は、悩みと苦しみの連続である。けれども問題解決の過程に美と楽しみをとりもどしたい、少なくともそういう考えで問題にとりくんでゆきたい、という姿勢を強調するためにまとめられたのが本書である。より充実した答を得ようと私たちにふるいたたせるもの、そして私たちに感動させるような答に出会うと、それは美しいものと考えるのは問題解決の「アート」の役目なのだ、ということをさまざまな実例によって展開している。

本書は2部より構成されている。第1部は問題解決の基本的な考え方について 目標(望ましい結果)、制御変数(方策)、非制御変数(環境)、およびこれら3つの構成要素間の関係の各項目にわたり、寓話をあげて

説明し、ついでそれから得られる教訓を示す、という形式で著者独自の思想にもとづいた「アート」の意味づけを与えている。第2部は、全米の科学・技術情報システム、都市交通、多次元組織構造、宣伝の効果などの事例について、問題の提起と解決が得られるまでの柔軟な発想による問題への対応過程が述べてある。

第1部は問題解決のとりのくみ方の理論編で、第2部は現実問題への適用の実例を紹介する、という構成となっており、手法中心の解説書ではない。この点が本書の特長で、序文にみられるように、長年にわたって問題解決にとりくんだ著者の豊富な経験が語られており、実務家には大へん参考になる。

ただ、評者には読みづらい部分もあったが、全体として楽しく読めるように訳された訳者のご苦勞を多としたい。(村中 聖)